

INFANTADO*





119-2

Pl 215
in 20.

TRAITE

DE TRIGONOMETRIE

TRAITÉ
DE TRIGONOMÉTRIE.

TRAITÉ

DE TRIGONOMETRIE

RECTILIGNE ET CIRCULAIRE

PAR M. LEONHARD EULER

TRAITÉ

DE TRIGONOMETRIE

PAR M. LEONHARD EULER

DE TRIGONOMETRIE

RECTILIGNE ET CIRCULAIRE

PAR M. LEONHARD EULER

TRAITÉ

DE TRIGONOMETRIE

RECTILIGNE ET CIRCULAIRE

PAR M. LEONHARD EULER

TRAITÉ

DE TRIGONOMETRIE

RECTILIGNE ET CIRCULAIRE

PAR M. LEONHARD EULER

TRAITÉ

DE TRIGONOMETRIE

TRAITÉ
DE TRIGONOMÉTRIE
RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE,

CONTENANT des Méthodes et des Formules nouvelles,
avec des applications à la plupart des problèmes
de l'Astronomie.

PAR M. CAGNOLI,

Citoyen de Vérone, Membre de la Société Italienne; &c.

TRADUIT DE L'ITALIEN PAR M. CHOMPRÉ.



DE L'IMPRIMERIE DE DIDOT L'AÎNÉ.

A PARIS,

Chez DIDOT fils aîné, — JOMBERT jeune, Libraire, rue Dauphine.

M. DCC. LXXXVI.



P R É F A C E.

Si ce Traité peut faciliter l'étude de la Trigonométrie; si, par la disposition des tables et par les formules nombreuses qu'il renferme, il peut être d'un usage commode pour les Savants, j'aurai rempli le double but que je me suis proposé. J'espère que les Commencans me sauront gré d'avoir très souvent sacrifié à la clarté l'élégance des démonstrations. Rien de plus facile sans doute à comprendre et à pratiquer que les substitutions, et ce moyen est presque le seul dont je me suis servi pour établir les propositions et résoudre les problèmes, en partant pour l'ordinaire d'une construction géométrique : car représenter une question par une figure, c'est soumettre cette question à l'esprit et aux yeux tout à la fois ; et si d'ailleurs on fait, pour la résoudre, une heureuse application de l'analyse, il résulte de cette méthode mixte des démonstrations plus précises, des figures moins compliquées.

Quoique les Traités de Trigonométrie soient très multipliés, celui-ci ne paroîtra peut-être pas tout-à-fait dépourvu d'utilité. Ce qui sur-tout m'a déterminé à le publier, ce sont des formules nouvelles, qui donnent, sous des expressions

très simples, les différentielles finies des lignes trigonométriques. Parmi les usages nombreux et importants qu'on peut faire de ces formules, je me contenterai d'en indiquer ici deux principaux.

En premier lieu, si l'on emploie ces formules pour différentier une équation, on obtient une équation différentielle finie, c'est-à-dire mathématiquement rigoureuse et vraie, quelle que soit la grandeur des variations ou différences. D'où il résulte une nouvelle masse d'équations trigonométriques qui servent à résoudre autant de problèmes qu'il y a de diverses quantités dans ces équations, puisque chacune de ces quantités peut être seule inconnue. Je démontre par les exemples qu'en effet cette classe d'équations donne une solution facile de bien des problèmes résolus jusqu'à présent par des voies beaucoup plus pénibles.

En second lieu, si on convertit ces mêmes équations en proportions, et qu'on les compare ainsi transformées avec les analogies différentielles infinitésimales, dont on fait un si grand usage dans les cas où les variations sont petites à la vérité, mais finies, et non pas infiniment petites; on parvient à connoître avec précision les quantités négligées dans les analogies infinitési-

miales, et l'on a un moyen facile de tenir compte de ces quantités quand elles sont d'une certaine importance. À l'aide de quelques exemples, je fais voir que les erreurs des analogies différentielles infinitésimales, dans les applications journalières qu'on en fait, sont plus graves qu'on ne le croit communément.

Les analogies différentielles fondées sur l'hypothèse de deux parties constantes dans le triangle, peuvent encore s'appliquer avec autant de facilité que d'utilité aux cas où cinq parties et même où toutes les parties du triangle varient. Je donne à cet effet une méthode générale, à l'usage de laquelle concourt particulièrement l'emploi des signes + et — par lesquels j'ai eu soin d'indiquer dans la construction des analogies, si les variations des diverses parties du triangle se font en un même sens ou en sens contraires.

Pour ce qui regarde la résolution des triangles, principal objet de la Trigonométrie, mes recherches dans cette partie n'ont pas été non plus absolument infructueuses. Sans parler des formules nouvelles, que le Lecteur distinguera, j'ai cherché des solutions commodes pour les cas particuliers; lorsque, par exemple, au lieu de la valeur absolue de quelques parties du triangle, on ne connoît que

leur somme ou leur différence; ou lorsqu'à raison de leur grandeur les sinus ou les cosinus ne peuvent donner avec précision, au moyen des tables ordinaires, la valeur des arcs correspondants. J'épargne au Calculateur la considération de la perpendiculaire dans les triangles sphériques; et pourvu qu'on observe seulement les règles des signes pour les lignes trigonométriques dans les divers quarts du cercle, j'ai disposé les solutions de sorte qu'on ne peut se tromper en aucun cas sur l'espece de l'arc cherché; c'est un point sur lequel des Auteurs célèbres ont donné des règles inexactes, ainsi qu'il me semble l'avoir démontré. J'ai aussi restreint les limites des cas douteux, autant qu'on peut le faire par la seule Trigonométrie. Enfin j'ai rapproché les triangles sphériques des triangles rectilignes, et cette comparaison, si je ne me trompe, curieuse autant que neuve, peut avoir encore son utilité.

Quant à la pratique de la Trigonométrie sur le terrain, j'expose avec détail ce qu'il y a de plus essentiel pour mettre l'Ingénieur ou le Géographe en état d'opérer avec l'exactitude la plus scrupuleuse.

La Trigonométrie fournit des moyens pour se servir commodément des logarithmes dans les ad-

ditions et dans les soustractions, quels que soient les cas et les expressions. L'idée de ces moyens n'est pas absolument neuve ; mais faute d'une méthode générale facile à pratiquer, telle que la méthode que je propose, on n'a point imaginé d'avoir recours à ces expédients dans une infinité d'occasions où on peut en retirer un avantage réel.

De cette méthode générale découlent naturellement les solutions de toutes les équations du second et du troisième degré par le moyen de la Trigonométrie.

Je trouve aussi que le calcul différentiel conduit aisément à la valeur de l'inconnue, quel que soit le degré ou la nature d'une équation. Quoique le moyen que j'indique se présente de lui-même, je le crois nouveau, et mes Lecteurs jugeront si, en l'employant ainsi que me l'ont suggéré mes formules différentielles trigonométriques, il est digne de quelque attention.

Il m'a paru convenable d'insérer dans ce Traité les premiers principes du calcul différentiel, et de la méthode du retour des séries, attendu les applications continuelles que j'ai faites de ces principes. Je me suis attaché surtout à les expliquer avec clarté, parcequ'en général je suppose le Lecteur seulement initié dans les Mathé-

matiques. Il peut entreprendre de parcourir cette Trigonométrie, pourvu qu'il sache résoudre une équation, qu'il possède le calcul arithmétique, sur-tout pour les décimales, et qu'il connoisse les proportions, les progressions, les premières propositions de la Géométrie, l'usage et la théorie élémentaire des logarithmes.

Si je ne parle ni de la réduction des logarithmes imaginaires aux arcs circulaires, ni de la sommation des séries infinies par le moyen de la circonférence du cercle, ni de l'usage des facteurs imaginaires des sinus pour trouver le terme général des séries récurrentes, ni de quelques autres sujets semblables déjà traités avec autant de précision que de netteté dans *l'Analyse des infinis* du grand Euler; je crois que j'ai dû m'en dispenser, ces diverses questions étant à proprement parler du ressort de l'analyse.

J'ai multiplié les applications aux problèmes de l'Astronomie, science dans laquelle la Trigonométrie joue le rôle principal, et les solutions que je donne de la plupart de ces problèmes sont neuves en général, ou pour la méthode, ou pour les résultats. C'est sur-tout ici qu'on aura lieu de reconnoître l'utilité du grand nombre de formules nouvelles contenues dans ce Traité.

Je ne dis rien des tables mises à la fin de l'Ouvrage : elles indiquent assez par elles-mêmes et leurs usages et leurs avantages. Au moyen de formules expéditives qui font partie de celles que j'ai données, j'ai calculé les logarithmes de la table (BB), depuis le logarithme du nombre 1163. Pour être sûr de n'avoir commis aucune erreur dans leur calcul, j'ai formé tous les logarithmes des nombres intermédiaires, et j'ai pris jusqu'à la septième différence. Cette opération m'a fourni l'occasion de vérifier l'exactitude d'un grand nombre d'autres logarithmes de la même table.

Je ne nomme point ici les Auteurs desquels j'ai emprunté ce que j'ai jugé ne pouvoir être mieux. Il m'a paru plus à propos de leur faire hommage de ce qui leur appartient, dans le cours même de l'Ouvrage.

Je crois n'avoir omis que des méthodes compliquées et inutiles à la Trigonométrie ; ensorte que ce Traité peut être regardé comme complet. C'est ce dont on se convaincra en parcourant la table des matières.

La partie typographique a été revue avec soin tant par moi que par quelques Gens de Lettres qui ont bien voulu m'aider dans cette revision : on sait combien les fautes d'impression fatiguent et rebu-

rent, sur-tout dans un Livre de Mathématiques.

Il me reste à prier le Lecteur de consulter l'Appendice qui termine cette Trigonométrie ; il y trouvera des corrections , des explications et des additions utiles.

La traduction françoise de ce *Traité* , publiée en même temps que le texte , mérite une entière confiance : non-seulement cette Version est d'une main exercée dans les deux Langues et dans les Mathématiques *, mais de plus elle a été écrite de concert avec moi , pour ainsi dire sous mes yeux , et avec toute l'attention que je devois attendre du Traducteur, d'après les motifs qui l'ont déterminé à se charger de ce travail, son amitié pour moi et le desir d'être utile.

* M. Chompré a donné des *Éléments d'Arithmétique, d'Algebre et de Géométrie* (à Paris , chez Nyon l'aîné) , dont il vient de paroître une seconde édition.



TABLE DES CHAPITRES

ET DES MATIERES PRINCIPALES.

CHAPITRE I. Définitions et Notions préliminaires.	
Explications de quelques signes et abréviations dont on fait usage dans ce Traité ,	art.8
CHAP. II. Valeur relative des lignes trigonométriques.	
Des signes des lignes trigonométriques ,	35
Table des signes des lignes trigonométriques dans les quatre quarts du cercle ,	42
CHAP. III. Idée préliminaire de la résolution des triangles rectilignes.	
CHAP. IV. Valeurs relatives des lignes trigonométriques appartenantes à la somme ou à la différence de deux arcs , et aux arcs multiples.	
CHAP. V. Expressions des arcs en parties du rayon , et des lignes trigonométriques par les puissances des arcs.	
Éléments du calcul différentiel ,	130
Nouvelles formules pour les différentielles finies des lignes trigonométriques ,	139
Différentielles infinitésimales des lignes trigonométriques ,	140
Règle <i>de maximis</i> ,	141
Exposition et explication de la méthode du retour des séries ,	148
Des signes des lignes trigonométriques des arcs négatifs ,	154
CHAP. VI. Des tables trigonométriques en nombres naturels.	
Exposition de méthodes nouvelles pour calculer la table des sinus , &c. ,	157
Instructions sur l'usage des tables ;	162
CHAP. VII. Des tables trigonométriques en logarithmes.	
Des logarithmes des fractions décimales ,	164

Des logarithmes des nombres ,	art. 170
Construction de formules très convergentes pour la formation des logarithmes des nombres ,	175
Tables pour la conversion des logarithmes hyperboliques en logarithmes vulgaires et <i>vice versâ</i> ,	181 et 182
Méthode pour la construction des tables trigonométriques en logarithmes ,	189
Application des nouvelles formules ci-dessus (175) à l'extraction des racines numériques ,	190
Du complément arithmétique ,	194
Méthode générale pour l'application facile des logarithmes aux additions et aux soustractions , dans tous les cas ,	195 à 209
CHAP. VIII. Résolution des triangles rectilignes rectangles.	
Table pour la résolution d'un triangle ABC rectangle en A ,	213
Formules pour avoir les arcs avec précision , nonobstant la grandeur des sinus ou des cosinus ,	217
Résolution des triangles rectangles dans quelques cas particuliers ,	218
CHAP. IX. Résolution des triangles rectilignes obliquangles.	
Résolution de ces triangles dans quelques cas particuliers ,	237
CHAP. X. Des analogies différentielles des triangles rectilignes.	
Expressions finies et nouvelles des analogies différentielles ,	251 ; et 264 à 277
Des limites de l'usage des analogies différentielles sous la forme infinitésimale ordinaire ,	258 à 260
Table des analogies différentielles finies et infinitésimales des triangles rectilignes ,	279
Application de ces analogies aux cas où toutes les parties du triangle sont variables , à l'exception d'une seule , ou sans exception ,	283 à 285
CHAP. XI. Pratique de la Trigonométrie rectiligne sur le terrain.	

ET DES MATIERES PRINCIPALES. xj

De la mesure d'une base,	art. 289
De la mesure des angles,	294
Des vérifications du graphometre,	298
De la mesure des hauteurs, et des corrections pour les angles d'élévation,	302 à 310
De la mesure des distances,	312
De la réduction des angles au centre de la station,	318
De la réduction des triangles d'un plan à un autre plan,	320
Des meilleures conditions des triangles, et de la construction des signaux,	331
De la maniere de lever les plans, et de construire les cartes topographiques et les cartes géographiques de peu d'étendue,	337
Problèmes de Trigonométrie-pratique,	342
CHAP. XII. Résolution numérique, par la Trigonométrie, de toute équation du second et du troisieme degré.	
CHAP. XIII. De la résolution numérique d'une équation quelconque.	
Méthode indirecte, générale et nouvelle,	364
Application aux équations transcendantes,	367
Résolution particuliere de certaines équations trigonométriques finies ou infinies,	369
CHAP. XIV. Définitions, notions et propositions préliminaires, particulieres à la Trigonométrie sphérique.	
CHAP. XV. Résolution des triangles sphériques rectangles.	
Regles générales pour parvenir à appliquer les formules de la Trigonométrie sphérique aux triangles rectilignes, même lorsque ces formules contiennent des cotangentes ou des cosinus de côtés,	425
Table pour la résolution d'un triangle sphérique ABC rectangle en A,	430
Formules pour avoir les arcs avec précision, nonobstant la grandeur des sinus ou des cosinus,	432

Table pour la résolution, en certains cas, d'un triangle sphérique rectangle,	art. 438
Résolution des triangles sphériques rectilatères,	440
Résolution de deux triangles sphériques rectangles lorsqu'ils ont un angle commun,	441
Lorsqu'ils ont un côté commun,	447
Lorsqu'ils ont une même hypoténuse,	454
CHAP. XVI. Résolution des triangles sphériques obliques.	
Résolution du triangle isoscele,	498
De la mesure de la surface du triangle sphérique,	499
Exemples du calcul des triangles obliques,	500
CHAP. XVII. Résolution des triangles sphériques par la règle et le compas.	
CHAP. XVIII. Comparaison des triangles sphériques et des triangles rectilignes.	
Comparaison des parties du triangle sphérique aux parties correspondantes du triangle rectiligne formé par les cordes des arcs que le premier a pour côtés,	510 à 516
Résolution des triangles sphériques par le moyen des formules de la Trigonométrie rectiligne,	517 à 533
Des erreurs notables qu'on s'expose à commettre, en résolvant comme rectilignes rectangles les petits triangles sphériques dans lesquels un des côtés de l'angle droit est un arc de petit cercle,	534
Moyens faciles pour éviter ces erreurs,	536
CHAP. XIX. Des analogies différentielles des triangles sphériques.	
Table contenant un grand nombre de nouvelles analogies finies ou infinitésimales,	541 à 679
Démonstration des analogies de cette table,	680
Observations sur l'usage et l'utilité de ces analogies,	721
Exemples du calcul des analogies différentielles des triangles sphériques,	731

Des erreurs graves qu'occasionnent souvent les analogies
infinitésimales dont on a fait usage jusqu'à présent, art. 735

CHAP. XX. Résumé sur l'application de la Trigonométrie à la
résolution des problèmes.

CHAP. XXI. Applications de la Trigonométrie à l'Astronomie.

Connoissant l'ascension droite et la déclinaison d'un
astre, trouver sa longitude et sa latitude, 740

Connoissant la longitude et la latitude d'un astre, trouver
son ascension droite et sa déclinaison, 745

Connoissant les différences d'ascension droite et de dé-
clinaison entre deux astres, et ces différences étant
petites, trouver les différences de longitude et de lati-
tude, 746

Déduire les différences en ascension droite et en décl-
inaison, des petites différences en hauteur et en azi-
muth, 752

Méthode expéditive pour calculer une table des azimuths,
des distances au zénith, et des angles de variation, 755

Trouver l'heure par l'observation de deux étoiles dans
un même vertical, connoissant d'ailleurs leurs décl-
inaisons et leurs ascensions droites, 756

De l'effet de la réfraction sur le moment du lever et du
coucher des astres, 757

Déterminer le temps que le disque du soleil emploie à
se lever ou à se coucher, 761

Déterminer la durée du crépuscule, Ibid.

Du changement d'amplitude produit par la réfraction ho-
rizontale, 762

Trouver l'élongation d'une planète, au temps de sa sta-
tion apparente, 766

Équations fondamentales de la théorie des planetes, 767

Problème de Kepler. Solution I, 769

Solution II, 771

Méthode très expéditive pour calculer les tables de l'équation du centre, et du rayon vecteur d'une planète, art.	772
Trouver la plus grande équation du centre,	773
Méthode très expéditive pour calculer plus exactement qu'on ne l'a fait jusqu'ici la table générale du mouvement des comètes dans une orbite parabolique,	774
Trouver le mouvement horaire d'une planète en longitude,	775
Trouver le mouvement horaire en latitude,	776
Trouver le mouvement des nœuds des orbites des planètes, sur l'écliptique, produit par les attractions réciproques,	777
Trouver le <i>maximum</i> du mouvement du nœud d'un satellite sur l'orbite de Jupiter, causé par l'attraction d'un autre satellite,	780
Trouver le changement de l'ascension droite, de la longitude, de la latitude et de l'angle de position des astres, et celui de l'obliquité de l'écliptique, occasionnés par l'attraction des planètes sur la Terre,	782
Trouver la correction de l'ascension droite et de la déclinaison d'un point quelconque de l'écliptique, relativement à la diminution de l'obliquité,	783
Trouver les changements de l'ascension droite, de la déclinaison, et de l'angle de position des astres, causés par la précession des équinoxes,	784
Des effets de la nutation,	785
Des effets de l'aberration,	786
Déterminer les dimensions de la Terre, en la supposant de figure elliptique,	793
Méthode facile pour tenir compte de l'ellipticité de la Terre dans le calcul des parallaxes,	800
Formules pour le calcul des diverses parallaxes,	803
Trouver la distance apparente des centres de deux astres,	806

Table des angles de la verticale , et des logarithmes des rayons terrestres ,	art. 807
Trouver la longitude d'un lieu de la Terre ,	813
Corriger les observations faites en employant un réticule de 45° non situé dans la direction exacte du mouvement diurne ,	821
Corriger les erreurs auxquelles les observations sont sujettes , à raison de la différence entre le parallèle vrai et le parallèle apparent ,	822
Trouver le moment où le mouvement d'un astre en hauteur est le plus rapide ,	831
Déduire la hauteur méridienne , des hauteurs observées près du méridien ,	833
Ayant trois hauteurs d'un astre , et connoissant le temps où chacune de ces hauteurs a été observée , trouver l'angle horaire et la déclinaison de l'astre , et la hauteur du pôle ,	834
Connoissant la déclinaison et deux hauteurs d'un astre , et les moments des observations des hauteurs , trouver l'angle horaire de l'astre et la hauteur du pôle ,	835
Ayant les mêmes données et de plus la hauteur du pôle , trouver l'angle horaire de l'astre ,	836
Connoissant trois longitudes et trois latitudes héliocentriques ou sélénocentriques d'une tache , trouver l'inclinaison de l'équateur solaire ou lunaire sur l'écliptique , le lieu des nœuds de cet équateur , et la distance de la tache au pôle de rotation ,	837
CHAP. XXII. Des projections , et des planispheres géographiques et astronomiques.	
APPENDICE.	

Fin de la Table.



CORRECTION ESSENTIELLE.

Table I, formule 42°, $\sqrt{\frac{1 + \cos.2A}{1 - \cos.2A}}$ lisez $\sqrt{\frac{1 - \cos.2A}{1 + \cos.2A}}$

Fautes reconnues depuis l'impression de l'Appendice.

Pag. 94, lig. 4; des autres nombres composés lisez des nombres composés qui y ont leurs facteurs

Pag. 420, lig. avant-dernière; de la parallaxe lisez du logarithme de la parallaxe

Art. 840, lig. 2; égaux à ceux de latitude. lisez égaux dans l'étendue d'une même carte.

*EXTRAIT des registres de l'Académie Royale des Sciences ,
du 11 Février 1786.*

MM. DE LA LANDE et MÉCHAIN, qui avoient été nommés pour examiner le *Traité de Trigonométrie* par M. CAGNOLI, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet ouvrage digne d'être approuvé et imprimé sous son Privilège. En foi de quoi j'ai signé le présent certificat. A Paris le 11 Février 1786.

LE M^{rs} DE CONDORCET, Sec. perp.

AVIS AU RELIEUR.

Les six Planches des Figures doivent être placées à la fin du Volume.

Les Tables numérotées depuis I jusqu'à IX, se placeront de même à la fin, avant ou après les Planches.



TRIGONOMÉTRIE

T R A I T É

D E

T R I G O N O M É T R I E.

C H A P I T R E P R E M I E R.

Définitions et Notions préliminaires.

1. **T**RIGONOMÉTRIE, mot tiré du Grec, signifie *mesure des triangles*. Etant données quelques parties d'un triangle, la Trigonométrie enseigne les moyens de *trouver la valeur* de chacune des autres. Cette opération s'appelle *résolution des triangles*. Les parties que la Trigonométrie considère dans le triangle sont les angles et les côtés. La mesure des surfaces renfermées entre les côtés des triangles, est du ressort de la Géométrie plutôt que de la Trigonométrie.

2. Il est aisé de concevoir combien la Trigonométrie est une science utile et même agréable ; puisqu'au moyen de ses calculs on mesure, avec autant d'exactitude que de facilité, les distances accessibles et inaccessibles : par exemple, la largeur d'un fossé, d'un fleuve, d'un lac ; la hauteur d'un clocher, d'une montagne ; les dimensions d'un bastion, d'un retranchement ; les distances respectives des lieux ; enfin celles des astres et leurs divers mouvements dans l'immensité de l'espace.

3. Le triangle formé par des lignes droites appartient à la Trigono-

métrie *plane* ou *rectiligne*. Si les côtés sont des arcs de cercle considérés ou décrits sur la surface d'une sphere, la résolution du triangle est alors l'objet de la Trigonométrie *sphérique*.

Je suppose le lecteur instruit de la division du cercle adoptée par les géomètres, en 360 *parties* ou *degrés* égaux; de celle de chaque degré en 60 *minutes* ou *minutes premières*, de chaque minute première en 60 *secondes*, de chaque seconde en 60 *tierces*, et ainsi de suite. Pour abrégér, si l'on veut désigner, par exemple, un arc de six degrés vingt-sept minutes quarante-huit secondes, on écrit $6^{\circ} 27' 48''$.

4. La Trigonométrie fait usage de quelques lignes auxquelles on a attribué les dénominations suivantes.

Fig. 1. Etant donné un arc tel que BD, moindre que de 90° , terminé par les rayons CB, CD: si de l'une des extrémités de cet arc, du point B, par exemple, on mene la perpendiculaire BA sur l'autre rayon CD; BA s'appelle le *sinus*, AC le *cosinus* et AD le *sinus verse* de l'arc BD ou de l'angle ACB. La perpendiculaire est donc le sinus; la partie du rayon comprise entre cette perpendiculaire et le centre est le cosinus; et la portion du rayon qui reste entre la perpendiculaire et l'arc, c'est-à-dire la différence entre le rayon et le cosinus, est le sinus verse, qu'on nomme aussi la *fleche*.

Comme la valeur d'un angle dépend de l'arc qui le mesure, nous emploierons indifféremment l'un ou l'autre: or l'arc appartient à la Trigonométrie sphérique, et l'angle formé par deux lignes droites à la Trigonométrie plane; tout ce que nous dirons des *lignes trigonométriques* convient donc également à ces deux especes de Trigonométrie. Aussi avons-nous jugé inutile de diviser cet ouvrage en deux parties.

5. Des définitions précédentes il résulte que si BE est perpendiculaire à CF, BE sera le sinus, CE le cosinus, EF le sinus verse de BF. Supposons que BF soit le complément de l'arc BD, ou, ce qui revient au même, que ACE soit un angle droit; BE sera parallèle et égale à AC, CE sera parallèle et égale à AB; c'est-à-dire que le

sinus de BF = le cosinus de BD = le cosinus de $(90^\circ - BF)$, et que Fig. 1.
 le cosinus de BF = le sinus de BD = le sinus de $(90^\circ - BF)$. Donc
le sinus d'un angle est égal au cosinus du complément de cet angle,
et le cosinus est égal au sinus du complément. D'où il suit que le
 sinus de 45° = le cosinus de 45° . Ce qui est d'ailleurs évident, puis-
 qu'alors le triangle auquel ces deux lignes appartiennent est isoscele
 et rectangle.

EF se nomme le *cosinus verse* de BD, et AD le *cosinus verse*
 de BF. Le cosinus verse n'est que la différence entre le sinus et le
 rayon.

6. Si la perpendiculaire (4) étoit menée de l'autre extrémité D sur
 le rayon CB, il en naîtroit un triangle égal absolument à ABC: puis-
 qu'il auroit de même un angle droit; que l'angle C seroit commun,
 et l'hypothénuse BC de l'un, égale à l'hypothénuse CD de l'autre.
 Donc la nouvelle perpendiculaire seroit égale à BA, et diviseroit
 BC en deux parties respectivement égales à AC et à AD. Les ré-
 sultats sont donc les mêmes, quelque soit celle des deux extré-
 mités d'un arc, d'où l'on fasse partir la perpendiculaire.

7. Si de l'extrémité D d'un rayon CD, on élève une perpendi-
 culaire DG jusqu'à la rencontre d'un autre rayon CB prolongé, la
 perpendiculaire DG se nomme la *tangente*, et le rayon prolongé
 CG la *sécante* de l'arc BD.

La droite FH étant de même la tangente et CH la sécante de BF
 complément de BD, la première se nomme *cotangente* et la se-
 conde *cosécante* de l'angle ACB. Par la même raison DG est la
 cotangente, et CG la cosécante de BF.

8. Pour abréger, on écrit R au lieu de *rayon*, sin. au lieu de
sinus, cos. pour *cosinus*; tang., cot., séc., coséc., au lieu de *tan-*
gente, *cotangente*, *sécante*, *cosécante*; enfin sin.v. et cos.v.,
 pour *sinus verse* et *cosinus verse*. Par exemple, sin.BD signifie le
 sinus de l'arc BD, et sin.BCD le sinus de l'angle BCD.

Nous écrirons aussi log. au lieu de *logarithme*, ∞ au lieu de
l'infini, et compl. pour *complément arithmétique* (194); $a > b$

signifie a plus grand que b , et $a < b$ signifie a moins grand que b .

Nous emploierons aussi le signe ∞ pour indiquer la différence positive entre deux quantités, c'est-à-dire pour indiquer que la plus petite doit être soustraite de la plus grande. Par exemple, $a \infty b$ signifie $a - b$ quand on a $a > b$, et $b - a$ quand on a $a < b$. Ainsi $a \infty b$ se prononcera *la différence positive* de a et de b , et $a \neq b$, *la somme ou la différence positive* de a et de b .

Enfin je désigne souvent un angle par une seule lettre, lors même que son sommet est commun à d'autres angles. Mais alors dans la figure je place entre les deux côtés de cet angle la lettre par laquelle je le désigne. Par exemple, fig. 1, l'angle C est la même chose que l'angle ACB.

9. Nous prévenons les Commencants que nous ferons un usage continuel des transformations suivantes, dont il seroit trop long, et trop ennuyeux pour ceux qui sont plus avancés, de donner à chaque fois le développement. Si quelques lecteurs ne connoissent pas assez l'algebre pour entendre ces transformations et se les être rendues familières, la meilleure voie pour y parvenir promptement, et pour vérifier la justesse de ces transformations, est de substituer aux lettres des nombres à volonté.

On ne change pas la valeur d'un rapport géométrique, lorsqu'on le multiplie ou qu'on le divise par une même quantité. Ainsi en général, $a : b :: 1 : \frac{b}{a} :: \frac{a}{b} : 1 :: am : bm :: \frac{a}{n} : \frac{b}{n}$.

Toute fraction est un rapport géométrique. Ainsi $\frac{a}{b}$ est la même chose que $a : b$. Quelques auteurs préfèrent même cette manière d'écrire à la précédente.

De là il suit que la règle donnée pour les rapports convient à toute fraction.

10. Les proportions géométriques admettent toutes les transformations qui n'altèrent pas l'égalité entre le produit des termes moyens et celui des extrêmes. Ainsi la proportion $a : b :: c : d$ peut éprouver les changements suivants :

$$a + b : a - b :: c + d : c - d$$

$$a \pm b : a :: c \pm d : c$$

$$a \pm b : b :: c \pm d : d$$

$$a : a \pm b :: c : c \pm d$$

$$b : a \pm b :: d : c \pm d$$

11. Le signe double $\pm$ signifie que si l'on adopte le signe $+$ dans le premier rapport d'une proportion, il faut aussi, dans le second rapport, prendre le signe positif. Il en est de même du signe négatif.

En général dans les équations et les proportions, lorsqu'on trouve le signe double $\pm$ ou $\mp$, il indique que si l'on prend le signe supérieur dans l'un des termes, il faut prendre de même le signe supérieur pour chacun des autres termes. On en doit dire autant du signe inférieur.

12. La proportion fondamentale $a : b :: c : d$, pouvant se changer en celle-ci, $a : c :: b : d$, il en résulte que les transformations ci-dessus ont encore lieu en mettant c au lieu de b , et b au lieu de c .

Nous avons supposé le premier terme plus grand que le second, et par conséquent le troisième plus grand que le quatrième. Quand le contraire aura lieu, comme dans cette proportion, $2 : 4 :: 3 : 6$, on renversera la proportion, et on écrira $6 : 3 :: 4 : 2$; alors en la comparant avec la proportion générale $a : b :: c : d$, c'est-à-dire en faisant $a=6$, $b=3$, &c., on la trouvera susceptible de toutes les transformations indiquées ci-dessus.

Enfin si deux proportions ont ou les deux moyens ou les deux extrêmes communs; si on a, par exemple, $a : b :: c : d$, et $a : m :: n : d$, on aura aussi, $b : m :: n : c$.

13. Si l'on multiplie ou qu'on divise deux proportions l'une par l'autre, terme à terme, les produits ou les quotients sont encore en proportion. En combinant de ces deux manières l'analogie $m : n :: p : q$, avec l'analogie $a : b :: c : d$, on aura

$am : bn :: cp : dq$, et $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} :: \frac{c}{p} : \frac{d}{q}$, ou bien $\frac{m}{a} : \frac{n}{b} :: \frac{p}{c} : \frac{q}{d}$.

Par la même raison, on aura $a^2 : b^2 :: c^2 : d^2$; et par conséquent $\sqrt{a} : \sqrt{b} :: \sqrt{c} : \sqrt{d}$.

Multiplier ou diviser une équation par une même quantité, ajouter une même quantité à chacun de ses membres ou l'en soustraire, n'altère point l'équation. Soit $ad = bc$; on aura $amd = bmc$, et $\frac{ad}{n} = \frac{bc}{n}$, et $ad + m = bc + m$, et $ad - n = bc - n$.

14. Pour introduire un facteur sous le signe radical, il faut l'élever à la puissance indiquée par l'exposant du radical, et le multiplier par tous les termes contenus sous le radical. Réciproquement si l'on veut faire sortir une quantité contenue sous le radical, il faut diviser par cette quantité tous les termes sous le radical, et faire précéder le radical par la racine de cette même quantité. Par exemple, $\frac{a}{b} \sqrt{m^2 + n^2} = \frac{1}{b} \sqrt{a^2 m^2 + a^2 n^2}$
 $= a \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{a^2 m^2 + a^2 n^2}{b^2}} = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{m^2}{n^2} + 1} = \frac{a}{b}$
 $\sqrt{1 + \frac{n^2}{m^2}}$.

Si la quantité à faire sortir étoit un diviseur, on multiplieroit l'expression sous le radical, au lieu de la diviser.

Ainsi $\sqrt{m^2 + \frac{n^2}{r^2}} = \frac{1}{r} \sqrt{m^2 r^2 + n^2}$.

15. J'ai vu des Comménçants arrêtés à de certaines transformations, parcequ'ils s'efforcent de les concevoir, au lieu de penser à les vérifier. Je suppose, par exemple, que nous ayons substitué ab à la quantité $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$; en effectuant les quarrés qui ne sont qu'indiqués, et faisant la soustraction, on reconnoîtra qu'en effet cette expression composée se réduit à ab . On reconnoîtra de même que $a^2 + b^2$ est la même chose que $2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. En pareil cas, il faut faire les opérations indiquées dans une expression, quand on veut la vérifier et l'entendre.

16. Toute quantité qui en variant passe par zéro, se change de

positive en négative, ou de négative en positive. Cette vérité est une conséquence de la nature des progressions. Par exemple, dans la série arithmétique décroissante $\div 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1 \cdot -2 \cdot -3$, on voit que la quantité 3, en diminuant successivement, passe par zéro, et devient -3 , comme il seroit arrivé, si ces diminutions successives eussent été faites à la fois, en retranchant 6 de 3. Le changement du signe positif en négatif est donc évident; celui du signe négatif en positif ne l'est pas moins; il suffit pour s'en convaincre de renverser la même progression ainsi qu'il suit; $\div -3 \cdot -2 \cdot -1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$.

Nous verrons dans peu (36) que les quantités éprouvent le même changement en passant par l'infini. La démonstration en seroit plus abstraite, si nous la donnions *à priori*.

CHAPITRE II.

Valeur relative des lignes trigonométriques.

17. LORSQUE $BCD = 45^\circ$, le triangle rectangle CDG est isos- Fig. 17.
cèle, et $DG = CD$. Donc $\text{tang. } 45^\circ = R = \text{cot. } 45^\circ$.

Mais nous verrons (34) que $\text{tang. } 90^\circ$ est infinie, tandis que l'arc de 90° n'est que le double de l'arc de 45° . On peut donc observer déjà l'extrême disproportion entre la marche des angles et celle de leurs tangentes.

18. D'après la définition donnée (4), il est clair que le sinus d'un arc n'est que la moitié de la corde de l'arc double. On sait que la corde de 60° est égale au rayon : donc $\sin. 30^\circ = \frac{R}{2}$.

Mais nous verrons (34) que $\sin. 90^\circ = R$; (d'où le rayon prend aussi le nom de *sinus droit*, *sinus total*). Qu'on observe donc encore que *les sinus ne croissent pas dans la même proportion que les arcs*.

Fig. 1. 19. Toute corde divise le cercle en deux segments, dont chacun est pour l'autre le supplément à 360° . Un arc MTY plus grand que 180° ne peut donc avoir une autre corde que celle de son supplément YDM à 360° . Donc le sinus ML de la moitié DM de ce second arc (18) est nécessairement le même que le sinus de la moitié MT du premier. Donc un angle obtus TCM ne peut avoir d'autre sinus que celui de l'angle aigu DCM qui est son supplément à 180° .

Nous verrons bientôt que les autres lignes trigonométriques sont de même communes pour l'angle aigu et pour son supplément.

20. En supposant toujours $DCF = 90^\circ$, les triangles semblables BCA, GCD, FCH donnent les proportions suivantes :

$$\begin{aligned} AC : AB :: CD : GD, \quad GD : CD :: CF : FH, \\ AC : BC :: CD : CG, \quad AB : BC :: CF : CH. \end{aligned}$$

En substituant les dénominations trigonométriques, on aura, pour un arc quelconque BD, que nous désignerons généralement par A, les proportions qui suivent :

$$21. \cos.A : \sin.A :: R : \text{tang}.A = \frac{R \times \sin.A}{\cos.A}.$$

$$22. \text{Tang}.A : R :: R : \text{cot}.A = \frac{R R}{\text{tang}.A} = \frac{R \times \cos.A}{\sin.A}, (21).$$

$$23. \cos.A : R :: R : \sec.A = \frac{R R}{\cos.A}.$$

$$24. \sin.A : R :: R : \text{coséc}.A = \frac{R R}{\sin.A}.$$

25. L'expression générale R du rayon suffit pour faire voir que les équations trigonométriques sont vraies, quelque soit la grandeur du cercle dans lequel on les considère. La valeur du rayon est donc arbitraire, pourvu qu'une fois fixée, on la conserve constamment la même; autrement toutes les lignes trigonométriques varieroient avec le rayon. Si au lieu de BC on prend pour rayon CG, et qu'on décrive l'arc GQ, le sinus de l'angle C ne sera plus BA; mais GD. Or $BA : BC :: GD : CG$. On trouvera la même chose pour toute autre ligne. Donc le rapport entre une ligne trigonométrique quelconque et le rayon est constant, puisqu'on a toujours (9), $\frac{BA}{BC} = \frac{GD}{GC}$. Donc en général, soit L une ligne trigonométrique pour

pour un rayon donné R ; soit L' la même ligne pour un autre rayon R' ; on aura toujours $R : L :: R' : L' = \frac{LR'}{R} = LR$, si on fait $R = 1$, valeur qu'on assigne communément au rayon, et avec grande raison, parceque cette valeur simplifie beaucoup les calculs et les expressions. Nous verrons par la suite comment, une valeur étant une fois donnée au rayon, on trouve la valeur de toute ligne trigonométrique relativement au rayon.

26. Observons dans les équations (22, 23, 24), qu'étant donnée la valeur du rayon, celle de la cotangente dépend de celle de la tangente, celle de la sécante de celle du cosinus, et celle de la cosécante de celle du sinus, et réciproquement.

27. De là il est facile de comprendre pourquoi dans la Trigonométrie on ne fait presque jamais usage de la sécante et de la cosécante ; c'est qu'il est toujours aisé de leur substituer le cosinus et le sinus par le moyen des équations ci-dessus (23, 24). On pourroit de même supprimer l'usage des cotangentes ; mais on verra que souvent elles se trouvent commodes dans la pratique.

28. Par la propriété si connue de l'hypothénuse, les triangles  Fig. 1. rectangles CAB, CDG, CFH donnent les équations suivantes ; $BC^2 = AB^2 + AC^2 = CD^2 + CG^2 = DG^2 + CF^2 = CH^2 - FH^2$; ou bien $R^2 = \sin.^2 A + \cos.^2 A = \sec.^2 A - \text{tang.}^2 A = \text{cosec.}^2 A - \cot.^2 A$.

29. Donc $\sec. A = \sqrt{R^2 + \text{tang.}^2 A} = \frac{RR}{\cos. A}$, (23).

30. Et $\text{coséc.} A = \sqrt{R^2 + \cot.^2 A} = \frac{RR}{\sin. A}$, (24).

31. Substituons, dans l'analogie (21), la valeur de $\cos. A$ tirée de la seconde équation (29) ; nous aurons $\sin. A = \frac{R \times \text{tang.} A}{\sqrt{RR + \text{tang.}^2 A}}$; et mettant de même dans l'équation $\cot. A = \frac{R \times \cos. A}{\sin. A}$, (22), la valeur de $\sin. A$ prise dans la seconde équation (30), nous aurons $\cos. A = \frac{R \times \cot. A}{\sqrt{RR + \cot.^2 A}}$.

32. De même en mettant alternativement dans l'analogie (21)

les valeurs de $\sin.A$ et de $\cos.A$ tirées de l'équation $R^2 = \sin.^2A + \cos.^2A$, on a les équations suivantes ;

$$\text{tang.}A = \frac{R \times \sin.A}{\sqrt{(RR - \sin.^2A)}} = \frac{R \sqrt{(RR - \cos.^2A)}}{\cos.A}.$$

Fig. 1. 33. Si l'angle C croît, et devient, par exemple, MCD , on voit que le sinus ML , la tangente DK et la sécante CK deviennent aussi plus grandes qu'elles n'étoient pour l'angle C ; et qu'au contraire le cosinus CL , la cotangente FI et la cosécante CI diminuent.

34. Si l'angle augmente de manière qu'il soit de 90° , il est évident, à l'inspection de la figure, que le sinus et la cosécante deviennent égaux au rayon, avec lequel ils se confondent; que le cosinus et la cotangente se réduisent à zéro; enfin que la tangente et la sécante sont alors infinies, puisque, devenues parallèles entre elles, elles ne peuvent plus se rencontrer (7).

35. Si l'angle continue à croître et devient obtus comme DCO , les définitions données (4, 7) ne peuvent plus avoir lieu; ^{v. l'errata.} on a alors nécessairement pour lignes trigonométriques de DCO , celles de son supplément TCO , identité qu'on a déjà démontrée (19) pour le sinus, et par conséquent pour la cosécante (26). De cette nécessité résultent, il est vrai, des cas douteux, dans lesquels il n'est pas possible de discerner par la seule Trigonométrie si un sinus donné ou une cosécante appartiennent à un angle aigu, ou à son supplément. Mais les autres lignes trigonométriques ne sont pas sujettes à cet inconvénient, parceque le signe négatif distingue celles qui appartiennent à l'angle obtus.

36. En effet, en adoptant pour cosinus de l'angle obtus DCO le cosinus CP de son supplément TCO , on peut observer que le cosinus CA , diminuant toujours à mesure que l'arc primitif BD augmente, passe enfin par zéro (34) avant de continuer au-delà du centre dans la direction CP . Donc (16) *le cosinus d'un angle obtus est négatif*, et, par la même raison, *la cotangente*, qui dans le cas supposé est FN . Mais (23), $\cos. = \frac{R}{\sec.}$, et (22),

cot. $= \frac{R}{\text{tang.}}$. Donc, lorsque le cos. et la cot. sont négatifs, la séc. et la tang. sont aussi négatives; puisque le rayon est une quantité réelle, dont le quarré ne peut jamais être négatif. Donc *la tangente et la sécante de l'angle obtus sont négatives*. Mais elles étoient devenues infinies, lorsque l'angle s'étoit accru jusqu'à 90° , (34) : donc *les quantités qui, en variant, passent par l'infini, se changent de positives en négatives, et vice versa* (38), *de même que lorsqu'elles passent par zéro* (16). Donc *la cosécante et le sinus de l'angle obtus, n'ayant passé ni par zéro ni par l'infini, continuent d'être positifs*.

Fig. 1.

Ainsi la cosécante CN de l'angle obtus DCO est positive; sa sécante CU et sa tangente TU sont négatives.

37. Par l'inspection de la figure, et d'après ce que nous avons dit, il est facile de comprendre que si l'arc croît jusqu'à devenir de 180° , le sinus et la tangente deviennent nuls, la cotangente et la cosécante infinies, le cosinus et la sécante égaux au rayon.

38. En Astronomie, les longitudes et les ascensions droites des astres se comptent de 0° jusqu'à 360° . On a donc besoin des lignes trigonométriques, même dans le troisième et dans le dernier quart du cercle. En négligeant, pour abrégé, ce qui concerne la sécante et la cosécante (27); si on procède par la méthode et les règles données (16, 36), on trouvera que de 180° à 270° , le sinus et le cosinus sont négatifs, la tangente et la cotangente positives. Un arc plus grand que de 180° , comme DFTS, a RS pour sinus, CR pour cosinus, TZ pour tangente, VX pour cotangente.

39. Lorsque l'arc est exactement de 270° , le sinus devient égal au rayon, la tangente infinie; le cosinus et la cotangente se réduisent à zéro.

40. Donc dans le dernier quart du cercle, c'est-à-dire lorsqu'un arc quelconque, comme DFTVY, embrassera plus des trois quarts du cercle, le cosinus sera positif (16, 36); le sinus, la tangente et la cotangente seront négatifs.

41. Enfin lorsque l'arc devient de 360° , il arrive au point où il avoit pris naissance, et d'où l'on avoit commencé à en compter les degrés. Le sinus et la tangente deviennent alors nuls, le cosinus égal au rayon, et la cotangente infinie.

42. La table suivante servira de récapitulation pour ce que nous venons de dire, et sera plus commode à consulter dans la pratique. J'ai omis la cotangente, la sécante et la cosécante, parceque leurs signes sont respectivement (26, 36) les mêmes que ceux de la tangente, du cosinus et du sinus. On verra, par cette table, quand ces dernières lignes sont égales à zéro, à l'infini, ou au rayon; le rayon y est exprimé par l'unité (25). Il faut observer que la cotangente, la sécante et la cosécante sont infinies, lorsque les lignes qui leur correspondent en raison inverse (22, 23, 24), c'est-à-dire la tangente, le cosinus et le sinus, sont égales à zéro.

En désignant une ligne égale à zéro ou à l'infini, je lui conserve le signe qu'elle avoit avant d'arriver à ce terme. Il est au surplus inutile de discuter quel signe convient en pareil cas; les équations trigonométriques sont également justes, soit qu'on change ou non les signes, au point où la valeur est ou zéro ou infinie; pourvu que dans tous les cas semblables on adopte constamment la même règle.

Table des Signes des lignes trigonométriques dans les quatre quarts du Cercle.

ARC.	SINUS.	COSINUS.	TANG.
A 0° ou à 360°	— 0	+ 1	— 0
Depuis 0° jusqu'à 90°	+	+	+
à 90°	+ 1	+ 0	+ ∞
Depuis 90° jusqu'à 180°	+	—	—
à 180°	+ 0	— 1	— 0
Depuis 180° jusqu'à 270°	—	—	+
à 270°	— 1	— 0	+ ∞
Depuis 270° jusqu'à 360°	—	+	—

43. En faisant $R = 1$, (25), on a (18), $\sin. 30^\circ = \frac{1}{2}$; mais (28), $\cos.^2 30^\circ = R^2 - \sin.^2 30^\circ = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$: donc $\cos. 30^\circ = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, (13).

44. De même, puisqu'on a (28), $R^2 = \sin.^2 45^\circ + \cos.^2 45^\circ = 2 \sin.^2 45^\circ$ (5) $= 1$, on aura $\sin. 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

45. C'est à peu près en suivant les principes qui nous ont fait trouver la valeur du sinus et du cosinus de 30° et de 45° , que les géomètres ont calculé, par le moyen d'autres formules que nous verrons en leur lieu, la valeur des sinus, tangente et sécante de tout arc depuis 0° jusqu'à 90° , de degré en degré, et même de minute en minute. Les tables qui contiennent ces valeurs donnent donc le rapport *constant* (25) qui regne entre le rayon du cercle et chacune des lignes trigonométriques.

CHAPITRE III.

Idee préliminaire de la résolution des triangles rectilignes.

46. LES Commencants sont ordinairement rebutés dans l'étude des sciences par les difficultés que leur présente d'abord une longue théorie élémentaire, dont ils n'aperçoivent pas encore l'utilité pratique. Ce chapitre sera consacré à leur faire pressentir les usages et les applications de la Trigonométrie.

Puisque AB est le sinus et AC le cosinus de l'arc BD décrit d'un rayon BC, on a évidemment les analogies suivantes :

$$BC : AB :: R : \sin.C, \quad BC : AC :: R : \cos.C.$$

Mais dans tout triangle rectangle, on peut concevoir que l'hypothénuse décrive un arc tel que BD, qui rencontre un des côtés prolongé tel que (CA + AD). Donc dans tout triangle rectangle l'hyp-

Fig. I. *l'hypothénuse est au rayon comme un côté est au sinus de l'angle opposé, ou bien comme un côté est au cosinus de l'angle adjacent.*

47. On croiroit au premier coup-d'œil qu'on ne peut tirer aucun fruit de ces proportions qui semblent contenir un cercle vicieux, comme cette analogie $2 : 1 :: 2 : 1$; puisqu'elles ne sont absolument que la répétition des définitions données (4). Mais qu'on se rappelle que le rapport $R : \sin.C$ (il en faut dire autant du rapport $R : \cos.C$) est un rapport *constant* (25), quelle que soit la grandeur de l'hypothénuse qui représente ici le rayon, pourvu seulement que l'angle C ne change point; on a de même, par exemple, $GC : CD :: R : \sin.C$. L'art de la Trigonométrie consiste donc en ce qu'un angle connu dans un triangle rectangle suffit pour faire connoître le rapport qui existe entre l'hypothénuse et chacun des côtés. De là il résulte que si, outre l'angle, on connoît la valeur absolue de l'un des côtés, la Trigonométrie donne, pour ainsi dire d'un trait de plume, la valeur absolue de l'hypothénuse; et *vice versa*: ce qu'on verra clairement dans les exemples suivants.

48. Supposons que CL soit une distance de trois lieues déjà connue, et qu'on desire de connoître la distance CM qu'on ne peut mesurer avec la toise, parcequ'une rivière ou quelque autre obstacle s'y oppose. Pour y parvenir sans abandonner le point C , et sans fatigue, que l'on mesure de combien de degrés est l'angle MCL ; ce qui est très facile, comme nous le verrons en son lieu: supposons que cet angle se trouve de 60° ; alors $\cos.MCL = \cos.60^\circ = (5) \sin.30^\circ = (18) \frac{1}{2} R$. On aura par conséquent (46), $MC : CL :: R : \cos.MCL :: R : \frac{1}{2} R :: 1 : \frac{1}{2}$, (9). Donc la distance MC est double de CL , ou $MC = 6$ lieues.

De même, en supposant MCL de 60° , si la distance connue étoit CD , que l'on eût, par exemple, $CD = 9$ lieues, on trouveroit 18 lieues pour la valeur de CK .

Si l'angle mesuré est ACB et de $36^\circ 52'$, que la distance connue, désignée par AC , soit de six lieues, et que l'on cherche BC ;

puisqu'on a par les tables, (45), $R : \cos. 36^\circ 52' :: 1 : 0,8$, on aura, (46), $BC : AC :: R : \cos. C :: 1 : 0,8$. Par conséquent $BC = \frac{AC}{0,8} = \frac{6}{0,8} = 7,5$. Donc la distance BC est de 7 lieues et $\frac{1}{2}$.

Si au lieu de AC la distance connue étoit CD, de 9 lieues, et CG la distance cherchée, on auroit $CG : CD :: 1 : 0,8$, ou $CG = \frac{CD}{0,8} = \frac{9}{0,8} = 11,25$. Donc $CG = 11$ lieues $\frac{1}{4}$.

Ces exemples suffiront pour donner une idée de la résolution des triangles rectangles.

49. Si on a un triangle obliquangle comme ABC, il est à présent facile de le résoudre, en le convertissant en deux triangles rectangles BCD, ACD, par le moyen de la perpendiculaire CD, menée de l'un quelconque des angles comme C, sur le côté opposé AB prolongé, s'il est nécessaire, comme dans la figure 3. On a alors (46), $R : \sin. B :: BC : CD = \frac{BC \times \sin. B}{R}$, et $R : \sin. A :: AC : CD = \frac{AC \times \sin. A}{R}$. Donc en mettant en équation les deux valeurs trouvées de CD, on a $BC \times \sin. B = AC \times \sin. A$; d'où l'on tire la proportion

$$BC : AC :: \sin. A : \sin. B.$$

Si on réfléchit que (fig. 3), $\sin. A = \sin. CAD = \sin. CAB$, (19), et que les fig. 2 et 3, dans lesquelles nous n'avons fixé ni la grandeur des angles ni celle des côtés, représentent dès-lors tout triangle obliquangle quel qu'il soit (ce qu'on doit remarquer une fois pour toutes), on conclura de la dernière proportion cette règle générale; *les côtés d'un triangle rectiligne sont proportionnels aux sinus des angles opposés.*

Cette règle s'étend évidemment aux triangles rectangles, puisque, par exemple, dans la proportion $R : \sin. A :: AC : CD$, R est le sinus (18) de l'angle droit D opposé à l'hypothénuse AC.

Il est aisé de reconnoître par cette même règle et par celle qui a été donnée (18), que quoique le plus grand côté soit toujours op-

Fig. 2
& 3.

posé au plus grand angle et *vice versâ*, les côtés ne sont cependant pas en proportion avec les angles opposés.

Fig. 7. 50. Exemple de la résolution du triangle obliquangle. Soit connue la distance AC, de 1000 toises, et par le moyen d'instruments convenables, et dont nous parlerons dans la suite, soient déterminés B de $53^{\circ} 8'$, et A de $31^{\circ} 20'$. On a dans les tables $\sin. 53^{\circ} 8' = 0,8$; et $\sin. 31^{\circ} 20' = 0,52$. Donc (49), $BC = \frac{AC \times \sin. A}{\sin. B} = \frac{1000 \times 0,52}{0,8} = \frac{520}{0,8} = 650$. Ainsi sans mesurer à la toise la distance BC, la Trigonométrie fait connoître avec la dernière précision qu'elle est de 650 toises.

Ce n'est au surplus qu'un essai que nous donnons de la solution d'un seul cas de la Trigonométrie rectiligne obliquangle. Nous verrons par la suite comment on peut résoudre tous les cas, toutes les combinaisons.

CHAPITRE IV.

Valeurs relatives des lignes trigonométriques appartenantes à la somme ou à la différence de deux arcs, et aux arcs multiples.

51. LE peu de principes que nous avons exposés jusqu'à présent, suffira pour conduire à tous les théorèmes de la Trigonométrie, et même pour approfondir cette science, soit en se servant des méthodes et des règles que nous avons suivies et données, soit en faisant de simples substitutions.

Le desir d'amener l'étude de la Trigonométrie à un pareil degré de facilité, nous a engagés à nous étendre dans les chapitres précédents; et nous croyons qu'on ne nous reprochera pas d'y avoir été prolixes,

prolixes, si l'on considère combien il étoit important d'y mettre la plus grande clarté.

PROBLÈME. *Connoissant les sinus et les cosinus de deux arcs, trouver les sinus et les cosinus de la somme et de la différence de ces deux arcs.*

De ce que dans tout triangle rectiligne la somme de deux angles est toujours le supplément du troisième, c'est-à-dire de ce que dans un triangle ACB par exemple, $A+B=180^\circ-ACB$, il suit (19) que $\sin.ACB = \sin.(A+B)$. Cela posé, la solution du Problème est facile par la seule Trigonométrie, et nous n'aurons recours, pour trouver cette solution, ni aux triangles semblables ni à des figures compliquées.

Fig. 2.

En effet (49), $AC : \sin.B :: AB : \sin.ACB = \frac{AB \times \sin.B}{AC} = \sin.(A+B)$. Mais en supposant qu'on mène CD perpendiculaire sur le côté AB, on a (46), $BC : CD :: R : \sin.B = \frac{R \times CD}{BC}$. En substituant cette valeur de $\sin.B$ dans l'équation précédente (nous ferons à l'avenir ces substitutions sans en prévenir, parcequ'elles se présentent d'elles-mêmes), on aura $\sin.(A+B) = \frac{R \times CD \times AB}{AC \times BC}$.

Or $AB=BD+AD$. Donc $\sin.(A+B) = \frac{R \times CD \times BD}{AC \times BC} + \frac{R \times CD \times AD}{AC \times BC}$.

Mais (46), $\frac{CD}{AC} = \frac{\sin.A}{R}$, $\frac{BD}{BC} = \frac{\cos.B}{R}$, $\frac{CD}{BC} = \frac{\sin.B}{R}$ et $\frac{AD}{AC} = \frac{\cos.A}{R}$.

Donc $\sin.(A+B) = \frac{\sin.A \cos.B + \sin.B \cos.A}{R}$.

52. Si on applique cette solution à la fig. 3, on observera que $AB=BD-AD$; que $ACB=180^\circ-CAB-B=CAD-B$, et que dans ce cas-ci l'angle CAD correspond à l'angle A employé dans les équations $\frac{CD}{AC} = \frac{\sin.A}{R}$ et $\frac{AD}{AC} = \frac{\cos.A}{R}$. En faisant les changements qui résultent de ces remarques, la démonstration précédente donnera

Fig. 3.

$$\sin.(A-B) = \frac{\sin.A \cos.B - \sin.B \cos.A}{R}.$$

53. (28), $\cos.^2 (A+B) = R^2 - \sin.^2 (A+B) = (51)$
 $\frac{R^4 - \sin.^2 A \cos.^2 B - 2 \sin. A \cos. A \sin. B \cos. B - \sin.^2 B \cos.^2 A}{R^4}$. Mais $\cos.^2 B = R^2 - \sin.^2 B$; et $\sin.^2 B = R^2 - \cos.^2 B$: si on substitue ces valeurs, et qu'ensuite on observe que $R^4 - R^2 (\sin.^2 A + \cos.^2 A) = (28)$ $R^4 - R^4 = 0$, on trouvera pour reste cette nouvelle équation ;
 $\cos.^2 (A+B) = \frac{\cos.^2 A \cos.^2 B - 2 \sin. A \cos. A \sin. B \cos. B + \sin.^2 A \sin.^2 B}{R^4}$; et en extrayant les racines,

$$\cos. (A+B) = \frac{\cos. A \cos. B - \sin. A \sin. B}{R}.$$

54. En opérant de la même manière sur la formule (52), on trouvera

$$\cos. (A-B) = \frac{\cos. A \cos. B + \sin. A \sin. B}{R}.$$

La solution de ce problème a produit quatre équations qui sont d'un usage infini dans la Trigonométrie. Il seroit hors de propos de les citer continuellement : pour nous en dispenser, nous recommanderons de faire en sorte de les retenir; ce qui est très facile, puisqu'en substance elles se réduisent à deux, et que c'est la seule différence des signes qui de ces deux équations en forme quatre.

Il est facile de voir que les mêmes équations servent à développer les valeurs des sinus et des cosinus de la somme et de la différence d'un nombre d'arcs quelconque. Par exemple, $\sin. (A+B+C) = \sin. (A+B+C) = \sin. A \cos. (B+C) + \cos. A \sin. (B+C) = \sin. A \cos. B \cos. C - \sin. A \sin. B \sin. C + \cos. A \sin. B \cos. C + \cos. A \cos. B \sin. C$. De même $\sin. (A-B+C) = \sin. (A-B-C) = \sin. A \cos. (B-C) - \cos. A \sin. (B-C) = \sin. A \cos. B \cos. C + \sin. A \sin. B \sin. C - \cos. A \sin. B \cos. C + \cos. A \cos. B \sin. C$.

55. A l'avenir nous emploierons constamment 1 au lieu de R. Dans les cas où le rayon diffère de celui des tables, comme il arrive par exemple dans la résolution des équations du 3^e degré; voici la règle pour l'introduire convenablement dans une formule trigonométrique quelconque.

Dans chacune des proportions et équations que nous avons vues jusqu'ici et desquelles se déduisent les plus composées, on a pu remarquer que chaque terme contient un nombre égal de facteurs. Prenons pour exemple une des équations les moins simples, telles que l'équation (53), $R^2 \times \cos.^2(A+B) = \cos.^2A \cos.^2B - 2 \sin.A \cos.A \sin.B \cos.B + \sin.^2A \sin.^2B$; chacun de ses termes est de quatre *dimensions*, c'est-à-dire formé du produit de quatre facteurs; par exemple, le premier membre est $R \times R \times \cos.(A+B) \times \cos.(A+B)$, et il en est de même des autres termes. On appelle *équation homogène* ou de *dimensions égales* celle qui renferme dans chaque terme un nombre égal de facteurs algébriques ou géométriques (sans avoir d'ailleurs égard aux coefficients numériques). Si on conservoit la lettre R dans toutes les opérations trigonométriques, on trouveroit, dans chaque formule, tous les termes d'égale dimension. Il sera donc facile de les rendre tels, au besoin, en joignant à chacun d'eux le facteur R élevé à la puissance convenable pour les rendre homogènes. Par exemple, en nommant x, y , deux lignes trigonométriques, soit une équation de cette forme, $4x^3 = 3x - y + 2$, dans laquelle x^3 est de trois dimensions, x et y d'une seule, et 2 sans aucune dimension; pour introduire régulièrement le rayon dans cette équation, il faut écrire $4x^3 = 3R^2x - R^2y + 2R^3$. Telle eût été l'équation en elle-même, si l'on n'en eût pas d'abord fait disparaître R en y substituant l'unité.

56. On ne connoîtra que peu-à-peu, et dans le cours de la Trigonométrie, l'utilité des formules multipliées que nous allons donner.

Tang. $(A+B) = (21) \frac{\sin.(A+B)}{\cos.(A+B)} = \frac{\sin.A \cos.B + \sin.B \cos.A}{\cos.A \cos.B - \sin.A \sin.B}$. En divisant tous les termes de cette dernière fraction (9) d'abord par $\cos.A \times \cos.B$, et ensuite par $\sin.A \sin.B$, on aura

$$\text{tang.}(A+B) = \frac{\text{tang.}A + \text{tang.}B}{1 - \text{tang.}A \text{ tang.}B} = \frac{\cot B + \cot A}{\cot B \cot A - 1}.$$

57. En procédant de la même manière sur les valeurs de $\frac{\sin.(A-B)}{\cos.(A-B)}$, (52, 54), on trouvera

$$\text{tang.}(A-B) = \frac{\text{tang.}A - \text{tang.}B}{1 + \text{tang.}A \text{ tang.}B} = \frac{\cot B - \cot A}{\cot B \cot A + 1}.$$

C ij

58. Par de semblables opérations, on aura

$$\frac{\sin.(A+B)}{\sin.(A-B)} = \frac{\text{tang.} A + \text{tang.} B}{\text{tang.} A - \text{tang.} B} = \frac{\text{cot.} B + \text{cot.} A}{\text{cot.} B - \text{cot.} A}.$$

59. En divisant de même d'abord par $\sin. B \cos. A$, et ensuite par $\sin. A \cos. B$, les valeurs de $\frac{\cos.(A+B)}{\cos.(A-B)}$, (53, 54), on aura

$$\frac{\cos.(A+B)}{\cos.(A-B)} = \frac{\text{cot.} B - \text{tang.} A}{\text{cot.} B + \text{tang.} A} = \frac{\text{cot.} A - \text{tang.} B}{\text{cot.} A + \text{tang.} B}.$$

60. A et B sont des expressions indéterminées qui désignent deux arcs d'une grandeur quelconque. On peut donc leur assigner toutes les valeurs qui conviennent à un arc de cercle.

Soit d'abord $B = A$. Si on écrit dans les trois formules (51, 53, 56), A au lieu de B, on trouvera celles qui suivent ;

$$\sin. 2A = 2 \sin. A \cos. A.$$

$$61. \cos. 2A = \cos.^2 A - \sin.^2 A.$$

$$62. \text{Tang.} 2A = \frac{2 \text{ tang.} A}{1 - \text{tang.}^2 A} = \frac{2 \text{ cot.} A}{\text{cot.}^2 A - 1}.$$

63. Dans ces trois équations, l'arc employé dans le premier membre est double de l'arc que contient le second membre. Donc elles peuvent encore s'écrire comme il suit :

$$\sin. A = 2 \sin. \frac{1}{2} A \cos. \frac{1}{2} A.$$

$$64. \cos. A = \cos.^2 \frac{1}{2} A - \sin.^2 \frac{1}{2} A.$$

$$65. \text{Tang.} A = \frac{2 \text{ tang.} \frac{1}{2} A}{1 - \text{tang.}^2 \frac{1}{2} A} = \frac{2 \text{ cot.} \frac{1}{2} A}{\text{cot.}^2 \frac{1}{2} A - 1}.$$

66. En substituant alternativement, dans l'équation (64), les valeurs (28) de $\cos.^2 \frac{1}{2} A$ et de $\sin.^2 \frac{1}{2} A$, on a encore

$$\cos. A = 1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} A = 2 \cos.^2 \frac{1}{2} A - 1.$$

67. De là il suit que $2 \sin.^2 \frac{1}{2} A = 1 - \cos. A = \sin. v. A$, (4). Les deux premières de ces expressions sont celles qu'on emploie au lieu du *sinus verse* qui n'est point en usage dans la Trigonométrie.

68. Si on divise par $\text{tang.} \frac{1}{2} A$ le second membre de la première équation (65), et qu'on se souvienne que $\frac{1}{\text{tang.}} = \text{cot.}$ (22) on aura

$$\text{tang.} A = \frac{2}{\text{cot.} \frac{1}{2} A - \text{tang.} \frac{1}{2} A}.$$

$$69. \text{De là se déduit } \text{cot.} \frac{1}{2} A - \text{tang.} \frac{1}{2} A = \frac{2}{\text{tang.} A} = 2 \text{ cot.} A.$$

Donc $\text{tang. } \frac{1}{2} A = \cot. \frac{1}{2} A - 2 \cot. A.$

70. $1 - \cos. A = (67) 2 \sin. \frac{1}{2} A \sin. \frac{1}{2} A = (63) \sin. \frac{1}{2} A \times \frac{\sin. A}{\cos. \frac{1}{2} A} = \sin. A \text{ tang. } \frac{1}{2} A, (21).$ Donc

$$\text{tang. } \frac{1}{2} A = \frac{1 - \cos. A}{\sin. A}.$$

71. $1 + \cos. A = (66) 2 \cos. \frac{1}{2} A \cos. \frac{1}{2} A = \cos. \frac{1}{2} A \times \frac{\sin. A}{\sin. \frac{1}{2} A} = \frac{\sin. A}{\text{tang. } \frac{1}{2} A}.$ Donc on a aussi

$$\text{tang. } \frac{1}{2} A = \frac{\sin. A}{1 + \cos. A}.$$

72. Les deux précédentes formules multipliées l'une par l'autre donnent

$$\text{tang. } \frac{1}{2} A = \frac{1 - \cos. A}{1 + \cos. A}.$$

73. $\sin. A = (63) 2 \sin. \frac{1}{2} A \cos. \frac{1}{2} A = (21) 2 \cos. \frac{1}{2} A \text{ tang. } \frac{1}{2} A.$ Donc (29)

$$\sin. A = \frac{2 \text{ tang. } \frac{1}{2} A}{1 + \text{tang. } \frac{1}{2} A}.$$

74. En divisant cette équation par la première donnée (65), on aura (21)

$$\cos. A = \frac{1 - \text{tang. } \frac{1}{2} A}{1 + \text{tang. } \frac{1}{2} A}.$$

75. En multipliant cette fraction par $\cot. \frac{1}{2} A$, et se souvenant toujours que $\cot. \times \text{tang.} = 1$, (22), on trouvera

$$\cos. A = \frac{\cot. \frac{1}{2} A - \text{tang. } \frac{1}{2} A}{\cot. \frac{1}{2} A + \text{tang. } \frac{1}{2} A}.$$

76. En multipliant cette équation par l'équation (68), il en résulte que

$$\sin. A = \frac{2}{\cot. \frac{1}{2} A + \text{tang. } \frac{1}{2} A}.$$

77. En substituant dans cette dernière équation la valeur (69) de $\text{tang. } \frac{1}{2} A$, et divisant la fraction par 2, on aura

$$\sin. A = \frac{1}{\cot. \frac{1}{2} A - \cot. A}.$$

78. En substituant la valeur de $\cot. \frac{1}{2} A$ prise dans l'équation (69), on aura

$$\sin. A = \frac{1}{\cot. A + \text{tang. } \frac{1}{2} A}.$$

79. $\text{Tang. } \frac{1}{2} A = (70) \frac{1 - \cos. A}{\sin. A} = \frac{1 - \cos. A}{\text{tang. } A \cos. A}.$ Donc $\text{tang. } \frac{1}{2} A \times$

$\text{tang. } A = \frac{1 - \cos. A}{\cos. A} = \frac{1}{\cos. A} - 1$. Donc $\frac{1}{\cos. A} = 1 + \text{tang. } \frac{1}{2} A \times \text{tang. } A$, et par conséquent

$$\cos. A = \frac{1}{1 + \text{tang. } \frac{1}{2} A \text{ tang. } A}.$$

80. $\sin. (A + B) \times \cos. (A - B) = (51, 54) \sin. A \cos. A \times (\sin.^2 B + \cos.^2 B) + \sin. B \cos. B (\sin.^2 A + \cos.^2 A) = (28) \sin. A \cos. A + \sin. B \cos. B = (60) \frac{1}{2} (\sin. 2A + \sin. 2B)$. Donc (63)

$$\sin. A + \sin. B = 2 \sin. \frac{1}{2} (A + B) \cos. \frac{1}{2} (A - B).$$

81. En traitant de même les équations (52, 53), on trouvera

$$\sin. A - \sin. B = 2 \sin. \frac{1}{2} (A - B) \cos. \frac{1}{2} (A + B).$$

82. $\cos. (A + B) \cos. (A - B) = (53, 54) \cos.^2 A \cos.^2 B - \sin.^2 A \sin.^2 B = (28) \cos.^2 A - \sin.^2 B (\sin.^2 A + \cos.^2 A)$. Donc $\cos.^2 A - \sin.^2 B = \cos. (A + B) \cos. (A - B) = \cos.^2 B - \sin.^2 A$.

83. $\cos.^2 A = (66) \frac{1}{2} (1 + \cos. 2A)$, et $\sin.^2 B = \frac{1}{2} (1 - \cos. 2B)$. Avec ces substitutions, la formule précédente devient $\frac{1}{2} \cos. 2B + \frac{1}{2} \cos. 2A = \cos. (A + B) \cos. (A - B)$. D'où l'on tire (63)

$$\cos. B + \cos. A = 2 \cos. \frac{1}{2} (A + B) \cos. \frac{1}{2} (A - B).$$

84. En opérant sur les équations (51, 52), comme on a fait pour les deux formules précédentes, on trouvera les deux suivantes : $\sin.^2 A - \sin.^2 B = \sin. (A + B) \sin. (A - B) = \cos.^2 B - \cos.^2 A$, (28); et

$$85. \cos. B - \cos. A = 2 \sin. \frac{1}{2} (A + B) \sin. \frac{1}{2} (A - B).$$

86. En faisant encore attention que $\frac{\sin.}{\cos.} = \text{tang.}$, et que $\frac{\cos.}{\sin.} = \text{cot.}$, (21, 22), on aura (80, 81)

$$\frac{\sin. A + \sin. B}{\sin. A - \sin. B} = \text{tang. } \frac{1}{2} (A + B) \cot. \frac{1}{2} (A - B) = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2} (A + B)}{\text{tang. } \frac{1}{2} (A - B)}.$$

87. De même (83, 85)

$$\frac{\cos. B + \cos. A}{\cos. B - \cos. A} = \cot. \frac{1}{2} (A + B) \cot. \frac{1}{2} (A - B) = \frac{\cot. \frac{1}{2} (A + B)}{\cot. \frac{1}{2} (A - B)}.$$

88. On trouve de la même manière les formules suivantes, dont nous n'avons vu aucun usage, mais que nous croyons ne devoir pas omettre, tant à cause de leur simplicité, qu'à cause de l'utilité qui résulteroit de la substitution de l'expression intermé-

diaire aux expressions extrêmes, si celles-ci se présentent dans quelque cas.

$$\frac{\sin.A + \sin.B}{\cos.A + \cos.B} = \text{tang. } \frac{1}{2} (A + B) = \frac{\cos.B - \cos.A}{\sin.A - \sin.B}.$$

$$\frac{\sin.A + \sin.B}{\cos.B - \cos.A} = \text{cot. } \frac{1}{2} (A - B) = \frac{\cos.A + \cos.B}{\sin.A - \sin.B}.$$

$$89. \text{Tang. } A + \text{tang. } B = \frac{\sin.A}{\cos.A} + \frac{\sin.B}{\cos.B} = \frac{\sin.A \cos.B + \sin.B \cos.A}{\cos.A \cos.B}.$$

Donc

$$\text{tang. } A + \text{tang. } B = \frac{\sin.(A + B)}{\cos.A \cos.B}.$$

Par une opération semblable on aura les trois formules suivantes.

$$90. \text{Cot. } B + \text{cot. } A = \frac{\sin.(A + B)}{\sin.A \sin.B}.$$

$$91. \text{Tang. } A - \text{tang. } B = \frac{\sin.(A - B)}{\cos.A \cos.B}.$$

$$92. \text{Cot. } B - \text{cot. } A = \frac{\sin.(A - B)}{\sin.A \sin.B}.$$

93. En multipliant l'une par l'autre les deux formules (89, 91), on a

$$\text{tang.}^2 A - \text{tang.}^2 B = \frac{\sin.(A + B) \sin.(A - B)}{\cos.^2 A \cos.^2 B}.$$

94. Le produit des deux autres (90, 92), donne aussi

$$\text{cot.}^2 B - \text{cot.}^2 A = \frac{\sin.(A + B) \sin.(A - B)}{\sin.^2 A \sin.^2 B}.$$

95. Par des additions et des soustractions convenables sur les formules (51, 52, 53, 54); on aura les quatre équations suivantes;

$$\sin.(A + B) + \sin.(A - B) = 2 \sin.A \cos.B.$$

$$96. \sin.(A + B) - \sin.(A - B) = 2 \sin.B \cos.A.$$

$$97. \cos.(A + B) + \cos.(A - B) = 2 \cos.A \cos.B.$$

$$98. \cos.(A - B) - \cos.(A + B) = 2 \sin.A \sin.B.$$

On a pu observer que par les résultats des calculs, c'est toujours le cosinus du plus grand arc (que nous avons constamment désigné par A), qui se trouve devoir être soustrait du cosinus de l'arc moindre B. Il en est de même des cotangentes. C'est une suite de leur nature, (33).

99. Maintenant soit $A = 45^\circ$. Au lieu de A, écrivons cette va-

leur dans les formules (51, 53, 56, 57), et nous aurons les quatre formules qui suivent :

$$\sin.(45^\circ + B) = \frac{\cos.B + \sin.B}{\sqrt{2}} \quad (44) = \cos.(45^\circ - B), \quad (5).$$

$$100. \cos.(45^\circ + B) = \frac{\cos.B - \sin.B}{\sqrt{2}} = \sin.(45^\circ - B).$$

$$101. \text{Tang.}(45^\circ + B) = (17) \frac{1 + \text{tang.}B}{1 - \text{tang.}B}.$$

$$102. \text{Tang.}(45^\circ - B) = \frac{1 - \text{tang.}B}{1 + \text{tang.}B}.$$

Les deux dernières équations peuvent s'exprimer en une seule, qui sera (11),

$$\text{tang.}(45^\circ \pm B) = \frac{1 \pm \text{tang.}B}{1 \mp \text{tang.}B}.$$

$$103. \text{Tang.}(45^\circ + B) - \text{tang.}(45^\circ - B) = \frac{1 + \text{tang.}B}{1 - \text{tang.}B} - \frac{1 - \text{tang.}B}{1 + \text{tang.}B} = \frac{4 \text{ tang.}B}{1 - \text{tang.}^2 B}, \text{ en réduisant au même dénominateur. Donc (62)}$$

$$\text{tang.} 2B = \frac{\text{tang.}(45^\circ + B) - \text{tang.}(45^\circ - B)}{2}.$$

104. En élevant au carré l'équation (99), nous trouverons $2 \sin.^2(45^\circ + B) = \cos.^2 B + \sin.^2 B + 2 \sin.B \cos.B = (28, 60)$
 $1 + \sin.2B$. Donc (63)

$$1 + \sin.B = 2 \sin.^2(45^\circ + \frac{1}{2}B) = 2 \cos.^2(45^\circ - \frac{1}{2}B).$$

105. En opérant de même sur l'équation (100), on aura

$$1 - \sin.B = 2 \cos.^2(45^\circ + \frac{1}{2}B) = 2 \sin.^2(45^\circ - \frac{1}{2}B).$$

Ce sont les expressions qui s'emploient au lieu de *cosinus verse* (5).

$$106. \text{Donc } \frac{1 + \sin.B}{1 - \sin.B} = \text{tang.}^2(45^\circ + \frac{1}{2}B), \text{ et de même } \frac{1 - \sin.B}{1 + \sin.B} = \text{tang.}^2(45^\circ - \frac{1}{2}B).$$

107. En traitant $\sin.B$ comme une quantité inconnue, et résolvant séparément ces deux dernières équations, on trouvera

$$\sin.B = \frac{\text{tang.}^2(45^\circ + \frac{1}{2}B) - 1}{\text{tang.}^2(45^\circ + \frac{1}{2}B) + 1} = \frac{1 - \text{tang.}^2(45^\circ - \frac{1}{2}B)}{1 + \text{tang.}^2(45^\circ - \frac{1}{2}B)}.$$

$$108. \text{En multipliant l'avant-dernière fraction par } \cot.(45^\circ + \frac{1}{2}B), \text{ on a } \sin.B = \frac{\text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}B) - \cot.(45^\circ + \frac{1}{2}B)}{\text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}B) + \cot.(45^\circ + \frac{1}{2}B)} = \frac{\text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}B) - \text{tang.}(45^\circ - \frac{1}{2}B)}{\text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}B) + \text{tang.}(45^\circ - \frac{1}{2}B)}.$$

109. En divisant l'équation formée de la première et de la dernière de ces trois quantités égales, par l'équation (103) exprimée comme

comme il suit, $\text{tang. } B = \frac{\text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}B) - \text{tang.}(45^\circ - \frac{1}{2}B)}{2}$, on aura (21),

$$\cos. B = \frac{2}{\text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}B) + \text{tang.}(45^\circ - \frac{1}{2}B)} = \frac{2}{\cot.(45^\circ - \frac{1}{2}B) + \cot.(45^\circ + \frac{1}{2}B)}.$$

110. Soit $A = 60^\circ$, et qu'on se souvienne que $\cos. 60^\circ = \frac{1}{2}$;
(48). Les formules (96, 97) donneront les deux suivantes;

$$\sin.(60^\circ + B) - \sin.(60^\circ - B) = \sin. B.$$

$$111. \cos.(60^\circ + B) + \cos.(60^\circ - B) = \cos. B.$$

112. Qu'on fasse $A = 60^\circ + B = 90^\circ - (30^\circ - B)$; on aura
 $\cot.(60^\circ + B) = (7) \text{ tang.}(30^\circ - B) = \cot. A$. Mais (69), $\cot. A =$
 $\frac{1}{2}(\cot. \frac{1}{2}A - \text{tang.} \frac{1}{2}A)$: donc

$$\text{tang.}(30^\circ - B) = \frac{\cot.(30^\circ + \frac{1}{2}B) - \text{tang.}(30^\circ + \frac{1}{2}B)}{2}.$$

113. En faisant $A = (60^\circ - B)$, on trouve de la même manière

$$\text{tang.}(30^\circ + B) = \frac{\cot.(30^\circ - \frac{1}{2}B) - \text{tang.}(30^\circ - \frac{1}{2}B)}{2}.$$

114. Faisons maintenant $A = 45^\circ + C$, et $B = 45^\circ - C$;
nous aurons $A + B = 90^\circ$, et $A - B = 2C$. La formule (97)
donnera $\cos.(45^\circ + C) \cos.(45^\circ - C) = \frac{1}{2} \cos. 2C + \frac{1}{2} \cos. 90^\circ =$
(34) $\frac{1}{2} \cos. 2C = (66) \frac{1}{2} (2 \cos.^2 C - 1)$. Donc

$$\cos.^2 C - \frac{1}{2} = \cos.(45^\circ + C) \cos.(45^\circ - C).$$

115. Supposons encore $A = 60^\circ + C$, et $B = 60^\circ - C$;
nous aurons $A + B = 120^\circ$, et $A - B = 2C$. La même équation
(97) donnera $\cos.(60^\circ + C) \cos.(60^\circ - C) = \frac{1}{2} \cos. 2C +$
 $\frac{1}{2} \cos. 120^\circ = \cos.^2 C - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos. 120^\circ$; mais $\cos. 120^\circ = -\cos. 60^\circ$ *prop. 114.*
 $= -\frac{1}{2}$, (36). Donc

$$\cos.^2 C - \frac{3}{4} = \cos.(60^\circ + C) \cos.(60^\circ - C).$$

116. En faisant les mêmes substitutions et les mêmes raisonnements, l'équation (98) donnera

$$\cos.^2 C - \frac{1}{4} = \sin.(60^\circ + C) \sin.(60^\circ - C).$$

Pour faire usage, dans la suite, de ces trois dernières formules;
nous écrirons A au lieu de C , ces deux lettres n'étant l'une et
l'autre que des expressions indéterminées, susceptibles de toutes
les valeurs possibles.

117. Soit à présent $B = 2A$. On aura (51), $\sin. 3A = \sin. A \times$

$\cos. 2A + \sin. 2A \cos. A$. Mais $\sin. A = \frac{\sin. 2A}{2 \cos. A}$, (60), et $\cos. 2A = 2 \cos.^2 A - 1$, (66). Donc $\sin. A \cos. 2A = \frac{\sin. 2A}{2 \cos. A} (2 \cos.^2 A - 1) = \sin. 2A \cos. A - \frac{\sin. 2A}{2 \cos. A}$. En substituant dans la première équation cette dernière valeur de $\sin. A \cos. 2A$, on aura

$$\sin. 3A = 2 \cos. A \sin. 2A - \sin. A.$$

118. Semblablement (53), $\cos. 3A = \cos. A \cos. 2A - \sin. A \sin. 2A$. Mais $\sin. A \sin. 2A = (60) 2 \sin.^2 A \cos. A = (66) \cos. A \times (1 - \cos. 2A) = \cos. A - \cos. A \cos. 2A$. Donc

$$\cos. 3A = 2 \cos. A \cos. 2A - \cos. A.$$

119. Pareillement (56), $\text{tang. } 3A = \frac{\text{tang. } A + \text{tang. } 2A}{1 - \text{tang. } A \text{ tang. } 2A}$. En substituant la première valeur (62) de $\text{tang. } 2A$, et réduisant au même dénominateur, on aura

$$\text{tang. } 3A = \frac{3 \text{ tang. } A - \text{tang. }^3 A}{1 - 3 \text{ tang. }^2 A}.$$

120. En faisant $B = 3A$, les Commencants auront une occasion de s'exercer, pour trouver, en suivant les exemples (117, 118), les équations suivantes :

$$\sin. 4A = 2 \cos. A \sin. 3A - \sin. 2A.$$

$$\cos. 4A = 2 \cos. A \cos. 3A - \cos. 2A.$$

121. (117), $\sin. 3A = 2 \cos. A \sin. 2A - \sin. A = (60) 4 \sin. A \cos.^2 A - \sin. A = 4 \sin. A (\cos.^2 A - \frac{1}{4})$. Donc (116)

$$\sin. 3A = 4 \sin. A \sin. (60^\circ + A) \sin. (60^\circ - A).$$

122. (66) $\cos. 2A = 2 \cos.^2 A - 1 = 2(\cos.^2 A - \frac{1}{2})$. Donc (114)

$$\cos. 2A = 2 \cos. (45^\circ + A) \cos. (45^\circ - A).$$

123. (118), $\cos. 3A = 2 \cos. A \cos. 2A - \cos. A = (66) 4 \cos. A \cos.^2 A - 3 \cos. A = 4 \cos. A (\cos.^2 A - \frac{3}{4})$. Donc (115)

$$\cos. 3A = 4 \cos. A \cos. (60^\circ + A) \cos. (60^\circ - A).$$

Ceux qui voudront des expressions de cette forme pour $\sin. 4A$, $\cos. 4A$, &c., les trouveront dans l'ouvrage d'Euler, intitulé :

Introductio in analysin infinitorum. Nous donnons seulement celles qui sont les plus utiles dans la pratique.

124. Nous avons réuni par ordre, dans les deux petites tables qui suivent, *les formules des sinus et des cosinus des arcs multiples*, (60, 66, 117, 118, 120).

$$\text{Sin. } 0 = 0.$$

$$\text{Sin. } A = \sin. A.$$

$$\text{Sin. } 2A = 2 \cos. A \sin. A.$$

$$\text{Sin. } 3A = 2 \cos. A \sin. 2A - \sin. A.$$

$$\text{Sin. } 4A = 2 \cos. A \sin. 3A - \sin. 2A.$$

&c.

$$\text{Cos. } 0 = 1.$$

$$\text{Cos. } A = \cos. A.$$

$$\text{Cos. } 2A = 2 \cos. A \cos. A - 1.$$

$$\text{Cos. } 3A = 2 \cos. A \cos. 2A - \cos. A.$$

$$\text{Cos. } 4A = 2 \cos. A \cos. 3A - \cos. 2A.$$

&c.

Ces deux séries peuvent se continuer à volonté, sans aucun nouveau calcul, puisque la loi qui y regne est manifeste. Tandis que les arcs croissent en progression arithmétique, leurs sinus et cosinus forment une série qu'on appelle *récurrente*, parceque chaque terme se compose de quelques uns des précédents, modifiés par une loi constante. *L'échelle de relation*, ainsi que s'exprime Euler d'après Moivre, est $2 \cos. A$, et -1 . Pour avoir, par exemple, la valeur de $\sin. 3A$, il faut multiplier le terme précédent, $\sin. 2A$, par $2 \cos. A$, et multiplier par -1 celui qui précède $\sin. 2A$, c'est-à-dire $\sin. A$.

125. En observant la même loi, mais en opérant les multiplications sur le second membre des équations, au lieu de les faire sur le premier, et remarquant que $2 \cos. A = 2 \sqrt{1 - \sin.^2 A}$, (28),

D ij

les mêmes séries peuvent se varier comme il suit, avec autant de promptitude que de facilité.

Sinus des arcs multiples, exprimés en puissances du sinus de l'arc simple.

$$\text{Sin. } 0 = 0.$$

$$\text{Sin. } A = \sin. A.$$

$$\text{Sin. } 2A = 2 \sin. A \sqrt{1 - \sin.^2 A}.$$

$$\text{Sin. } 3A = 3 \sin. A - 4 \sin.^3 A.$$

$$\text{Sin. } 4A = (4 \sin. A - 8 \sin.^3 A) \sqrt{1 - \sin.^2 A}.$$

$$\text{Sin. } 5A = 5 \sin. A - 20 \sin.^3 A + 16 \sin.^5 A.$$

&c.

Sinus des arcs multiples, exprimés en puissances du cosinus de l'arc simple.

$$\text{Sin. } 0 = 0.$$

$$\text{Sin. } A = \sqrt{1 - \cos.^2 A}.$$

$$\text{Sin. } 2A = 2 \cos. A \sqrt{1 - \cos.^2 A}.$$

$$\text{Sin. } 3A = (4 \cos.^2 A - 1) \sqrt{1 - \cos.^2 A}.$$

$$\text{Sin. } 4A = (8 \cos.^3 A - 4 \cos. A) \sqrt{1 - \cos.^2 A}.$$

$$\text{Sin. } 5A = (16 \cos.^4 A - 12 \cos.^2 A + 1) \sqrt{1 - \cos.^2 A}.$$

&c.

Cosinus des arcs multiples, exprimés en puissances du cosinus de l'arc simple.

$$\text{Cos. } 0 = 1.$$

$$\text{Cos. } A = \cos. A.$$

$$\text{Cos. } 2A = 2 \cos.^2 A - 1.$$

$$\text{Cos. } 3A = 4 \cos.^3 A - 3 \cos. A.$$

$$\text{Cos. } 4A = 8 \cos.^4 A - 8 \cos.^2 A + 1.$$

$$\text{Cos. } 5A = 16 \cos.^5 A - 20 \cos.^3 A + 5 \cos. A.$$

&c.

Cosinus des arcs multiples, exprimés en puissances du sinus de l'arc simple.

$$\text{Cos. } 0 = 1.$$

$$\text{Cos. } A = \sqrt{1 - \sin.^2 A}.$$

$$\text{Cos. } 2A = 1 - 2 \sin.^2 A.$$

$$\text{Cos. } 3A = (1 - 4 \sin.^2 A) \sqrt{1 - \sin.^2 A}.$$

$$\text{Cos. } 4A = 1 - 8 \sin.^2 A + 8 \sin.^4 A.$$

&c.

126. La table suivante pour les tangentes des arcs multiples est facile à continuer par le moyen de la formule (56), en procédant comme nous avons fait (119), et substituant toujours la valeur trouvée de la tangente qui précède.

Tangentes des arcs multiples, exprimées en puissances de la tangente de l'arc simple.

$$\text{Tang. } A = \text{tang. } A.$$

$$\text{Tang. } 2A = \frac{2 \text{ tang. } A}{1 - \text{tang.}^2 A}.$$

$$\text{Tang. } 3A = \frac{3 \text{ tang. } A - \text{tang.}^3 A}{1 - 3 \text{ tang.}^2 A}.$$

$$\text{Tang. } 4A = \frac{4 \text{ tang. } A - 4 \text{ tang.}^3 A}{1 - 6 \text{ tang.}^2 A + \text{tang.}^4 A}.$$

&c.

127. Par les tables (125), il sera facile à présent d'avoir les puissances du sinus et du cosinus de l'arc simple exprimées en sinus et en cosinus de l'arc multiple. Par exemple, par la table quatrième, on a $2 \sin.^2 A = 1 - \cos. 2A$. Par la première, $4 \sin.^3 A = 3 \sin. A - \sin. 3A$; par la quatrième, $8 \sin.^4 A = \cos. 4A + 8 \sin.^2 A - 1$. Ici il faut substituer la valeur précédente de $\sin.^2 A$, puisque le second membre de ces équations ne doit contenir que des puissances premières, et on aura $8 \sin.^4 A = \cos. 4A - 4 \cos. 2A + 3$. En opérant ainsi, ou plus promptement par le moyen de la

loi qu'on verra tout à l'heure , on obtient les tables suivantes , que nous donnons jusqu'à la septieme puissance , à cause de leur grand usage dans le calcul intégral.

Puissances du sinus de l'arc simple, exprimées en sinus et cosinus de l'arc multiple.

$$\text{Sin.}^1 A = \sin. A.$$

$$2 \text{ Sin.}^2 A = 1 - \cos. 2A.$$

$$4 \text{ Sin.}^3 A = 3 \sin. A - \sin. 3A.$$

$$8 \text{ Sin.}^4 A = 3 - 4 \cos. 2A + \cos. 4A.$$

$$16 \text{ Sin.}^5 A = 10 \sin. A - 5 \sin. 3A + \sin. 5A.$$

$$32 \text{ Sin.}^6 A = 10 - 15 \cos. 2A + 6 \cos. 4A - \cos. 6A.$$

$$64 \text{ Sin.}^7 A = 35 \sin. A - 21 \sin. 3A + 7 \sin. 5A - \sin. 7A.$$

&c.

Puissances du cosinus de l'arc simple, exprimées en cosinus de l'arc multiple.

$$\text{Cos.}^1 A = \cos. A.$$

$$2 \text{ Cos.}^2 A = 1 + \cos. 2A.$$

$$4 \text{ Cos.}^3 A = 3 \cos. A + \cos. 3A.$$

$$8 \text{ Cos.}^4 A = 3 + 4 \cos. 2A + \cos. 4A.$$

$$16 \text{ Cos.}^5 A = 10 \cos. A + 5 \cos. 3A + \cos. 5A.$$

$$32 \text{ Cos.}^6 A = 10 + 15 \cos. 2A + 6 \cos. 4A + \cos. 6A.$$

$$64 \text{ Cos.}^7 A = 35 \cos. A + 21 \cos. 3A + 7 \cos. 5A + \cos. 7A.$$

&c.

La loi de ces séries est évidente. Les coefficients dans le second membre , en commençant du dernier terme , sont les mêmes que ceux des puissances du binôme ; avec cette seule différence que les nombres isolés ne sont que la moitié de ceux que donne le binôme. Par exemple , les coefficients de la sixieme puissance du binôme sont 1, 6, 15, 20 ; et dans l'équation de $32 \cos.^6 A$, on a $\cos. 6A \times 1$, $\cos. 4A \times 6$, $\cos. 2A \times 15$, et $10 = \frac{20}{2}$.

Nous ne construirons pas la table des puissances des tangentes, qui est plus compliquée, et dont nous n'avons vu jusqu'à présent aucun usage.

128. Nous avons rassemblé en deux tables I et II, rejetées à la fin de cet ouvrage, les formules que nous jugeons les plus utiles; ensorte que les Lecteurs pourront les avoir sous les yeux, et qu'elles formeront une espece de répertoire pour les Savants. Nous avons substitué dans la table I la lettre A à la lettre B pour celles des formules qui, dans le texte même de l'ouvrage, ne contiennent que cette lettre B. Nous avertissons au surplus les Comménçants, que rien n'est plus facile que de multiplier à l'infini les formules trigonométriques, et que nous en avons supprimé un grand nombre comme inutiles, en comparaison de celles que nous avons données dans les deux tables qui contiennent, à ce qu'il nous semble, la collection des formules de ce genre la plus complète qui ait encore paru.

Si $B > A$, il est clair qu'il n'en résulte aucun changement dans les signes du second membre de la formule (II. 4°); (II. 4°) signifie Table II, formule 4°. J'ai donc mis $\cos.(A \curvearrowright B)$ au lieu de $\cos.(A - B)$ dans cette formule: on trouvera le même signe $\curvearrowright$, et par une raison semblable, dans les formules (II. 7°, 11°, &c.), et dans les formules (I. 29°, 30°). Je démontrerai d'une autre manière (154), que le cosinus d'un arc négatif moindre que de 90° est toujours positif.

Ayant donné les valeurs de $\sin.A$, $\cos.A$, et de $\sin.(A + B)$, $\cos.(A + B)$, &c. nous avons cru inutile de dresser d'autres tables pour les valeurs de $\sin.\frac{1}{2}A$, $\sin.2A$, $\cos.\frac{1}{2}A$, $\sin.\frac{1}{2}(A + B)$, &c. Il sera facile de les avoir au besoin, en opérant comme nous l'avons déjà fait plus d'une fois: il ne s'agit que de mettre, au lieu de A ou de B, tel multiple ou sous-multiple que l'on voudra de A ou de B.

Pour avoir la valeur d'une cotangente, on renversera les formules de la tangente, en substituant le numérateur au dénominateur,

et *vice versa*. Par exemple, (I. 38°), $\cot. \Lambda = \frac{\cot. \frac{1}{2} A - \tan. \frac{1}{2} A}{2}$.

On en fera de même des formules du cosinus pour avoir la sécante, et de celles du sinus pour avoir la cosécante. Tout cela est une conséquence évidente des analogies (22, 23, 24).

Il est à propos d'apprendre et de retenir les formules (I. 1°, 3°, 16°, 18°, 22°, 31°, 32°) dont on fait un usage continuel. À l'avenir nous épargnerons d'avantage les renvois, parceque le lecteur pourra recourir aux tables, quand il voudra vérifier les formules que nous emploierons et qu'il ne se sera pas rappellées.

CHAPITRE V.

Expressions des arcs en parties du rayon, et des lignes trigonométriques par les puissances des arcs.

129. LA ligne droite et l'arc de cercle semblent hétérogènes. Jusqu'à présent, et probablement il en sera long-temps de même, on a inutilement cherché une mesure rigoureuse qui leur fût commune. Si l'on suppose que la circonférence d'un cercle se redresse et s'étende en forme de ligne droite, et qu'on demande combien de fois cette ligne contient le diamètre, on ne peut répondre à cette question que par approximation. Mais comme cette approximation peut se pousser à l'infini, il en résulte que ce qu'il y a de défectueux dans la solution du problème rend bien les opérations plus compliquées et plus longues, mais non pas trompeuses ni erronées. On parvient à cette solution approchée, par des moyens ingénieux, tirés des rapports des lignes trigonométriques, au calcul desquelles cette recherche est réciproquement très utile. En y procédant, nous nous servirons à dessein du calcul différentiel et intégral, pour donner à ceux de nos lecteurs qui ne connoissent

pas ce calcul, une idée de la plus belle invention qui ait été faite en Mathématiques. Les premiers éléments de ce calcul ne contiennent aucune difficulté, et sont d'un merveilleux secours dans bien des cas, comme nous le verrons dans le cours de cet ouvrage.

130. *Les grandeurs constantes* sont celles qui restent toujours les mêmes, tandis que les *variables* changent. Dans le cercle, par exemple, tandis que les lignes trigonométriques changent de grandeur à mesure que l'arc varie, le rayon demeure constant. Nous indiquerons, selon l'usage, les grandeurs *variables* par les dernières lettres de l'alphabet z, y, x , &c.; et les *constantes* ou invariables, par les premières a, b, c , &c. Cela posé, si dans cette équation, $x = ay$, on suppose que x augmente d'une quantité δx , (j'entends par δx la variation, la différence, ou la *différentielle* de la grandeur x), il faudra aussi que y augmente d'une quantité δy , telle qu'il est nécessaire qu'elle soit pour que l'équation subsiste. On aura donc $x + \delta x = a(y + \delta y) = ay + a\delta y$. En supprimant les quantités égales x et ay , il reste $\delta x = a\delta y$.

Soit $x = 6$, $a = 2$, $y = 3$, et soit $\delta x = 4$. On aura $\delta y = \frac{\delta x}{a} = \frac{4}{2} = 2$. En effet, quand $x = 6 + 4 = 10$, il faut que $y = 3 + 2 = 5$, puisque la constante $a = 2$ ne doit pas changer.

131. L'opération que nous venons de faire s'appelle *différentier*, prendre les *différences* ou les *différentielles*. En effet, l'équation primitive $x = ay$ est disparue, et la nouvelle $\delta x = a\delta y$ contient seulement les variations des termes de la première.

Si l'on avoit plus de deux variables, comme dans l'équation $bx + mz = u - any + c$, en faisant varier les variables, et procédant absolument comme on a fait (130), on aura $b(x + \delta x) + m(z + \delta z) = u + \delta u - an(y + \delta y) + c$. En effectuant les multiplications, et supprimant l'équation primitive, il restera $b\delta x + m\delta z = \delta u - an\delta y$. La constante isolée c disparaît entièrement, parceque la *différentielle* ou *variation* d'une quantité constante est évidemment 0.

On abrège ces opérations par la règle suivante, déduite de leurs résultats. *Pour différencier une équation, il faut, au lieu de chaque variable, (ou du produit (134, 135) de plusieurs variables), écrire sa différentielle multipliée par tous les facteurs constants de la variable, et supprimer les constantes isolées.*

Par exemple, dans l'équation ci-dessus, $bx + mz = u - any + c$, écrivez $\delta x \times b$, au lieu de bx ; $\delta z \times m$ au lieu de mz ; $\delta u \times 1$ au lieu de u ; $-\delta y \times an$ au lieu de $-any$; et supprimez c : vous aurez immédiatement, et sans passer par les opérations intermédiaires, l'équation différentielle cherchée $b\delta x + m\delta z = \delta u - an\delta y$.

132. *L'objet de la différentiation est de découvrir les rapports entre les changements des grandeurs variables.* Par exemple, l'équation $\delta x = a\delta y$ donne $\frac{\delta x}{\delta y} = a$; mais la primitive $x = ay$ donne aussi $\frac{x}{y} = a$; donc lorsque le rapport (9) entre deux variables est constant, leurs variations, quelque grandes qu'elles soient, conservent le même rapport.

133. Soit à présent $xy = b$. Dans ce cas, puisque le produit des deux variables doit toujours être égal à la constante b , quelle que soit la grandeur de leurs variations, il est clair que si l'une croît, l'autre doit diminuer. Cependant on donne toujours aux différentielles les signes de leurs variables; ce sont les résultats du calcul qui indiquent si les variations se font en sens contraire. On aura donc $(x + \delta x)(y + \delta y) = b$; ou $xy + y\delta x + \delta y(x + \delta x) = b$; et, en supprimant les quantités égales, $y\delta x + \delta y(x + \delta x) = 0$. On voit que ce résultat démontre que l'une des deux variations est négative, puisque les termes du premier membre de l'équation se détruisent réciproquement.

Supposons maintenant que δx , δy , δz , &c., sont des quantités infiniment petites, des fractions aussi voisines de zéro qu'il est possible de l'imaginer. *La grandeur infinie, soit infiniment grande, soit infiniment petite, est celle dont on ne peut assigner*

la valeur en nombres , parcequ'aucun nombre n'est assez grand ou assez petit. Toute quantité qui se peut exprimer par des nombres est donc une *quantité finie* , puisqu'elle a une valeur finie , laquelle peut s'exprimer par des chiffres qui ont un terme , et dont le nombre est déterminé , et ne s'étend pas à l'infini.

Cela posé , nous pouvons , dans la dernière équation ; écrire x au lieu de $(x + \delta x)$; car la différence entre ces deux expressions étant infiniment petite , l'erreur qui résultera de cette substitution dans le produit par δy , sera infiniment petite , en comparaison de δy ; c'est-à-dire que δy sera un infiniment grand en comparaison de l'erreur commise , qui ne sera qu'une partie infiniment petite d'un infiniment petit , comme on pourra s'en faire une idée par les exemples numériques que nous en donnerons tout-à-l'heure. Nous ferons voir dans la suite (138 , 151) , que cette erreur apparente ne nuit en aucune manière à l'exactitude mathématique du calcul.

La dernière équation devient donc $y\delta x + x\delta y = 0$. La quantité négligée est $\delta x \delta y$; c'est ce qu'on appelle un infiniment petit *du second ordre* , tels que seroient les quarrés $(\delta x)^2$, $(\delta y)^2$, $(\delta z)^2$, &c.

Pour faire concevoir que l'infiniment petit du second ordre peut se négliger sans erreur , quand on cherche le rapport entre des infiniment petits du premier ordre , tels que δx , δy , &c. ; soit $\delta x = \frac{5}{1000000}$ et $\delta y = \frac{2}{1000000}$; on aura $\delta x \delta y = \frac{10}{1000000000000}$. On voit quelle est l'extrême petitesse de la dernière fraction , en comparaison de l'une ou de l'autre des précédentes. Qu'on imagine donc , s'il est possible , quelle seroit cette disproportion , si dans les valeurs que nous venons de donner à δx et à δy , le nombre des zéros étoit infini pour chacun des dénominateurs ; ce qui est nécessaire pour que δx et δy aient une valeur infiniment petite , comme on l'a supposé. On reconnoîtra de même qu'un infiniment petit du second ordre est infiniment grand respectivement à un infiniment petit du troisième ordre , et ainsi de suite.

134. En reprenant l'équation $y \partial x + x \partial y = 0$, j'observe que le premier membre contient la variation de xy , (133), et le second celle de b , (131). Donc *pour différencier le produit de plusieurs variables, on doit prendre la différentielle de chacune d'elles séparément, en considérant les autres variables comme des facteurs constants* (131), et écrire, au lieu du produit, la somme de ces différentielles.

En effet, pour différencier xy , si on prend la différentielle de x , en regardant y comme constante, on aura $y \partial x$, (131); et si on prend la différentielle de y , en regardant x comme constante, on a $x \partial y$. La somme de ces deux différentielles, $y \partial x + x \partial y$, est précisément celle que nous avons déjà trouvée.

Si on avoit $xyz = c + mu$, les différentielles du premier membre seroient $xy \partial z + xz \partial y + yz \partial x$, et celle du second membre, $m \partial u$; ce qui se trouvera également, si l'on fait l'opération en détail, par les méthodes que l'on a vues, en écrivant $(x + \partial x)(y + \partial y)(z + \partial z) = c + m(u + \partial u)$. Car cette équation est la même que celle-ci; $xyz + xy \partial z + y \partial x \times (z + \partial z) + \partial y (x + \partial x)(z + \partial z) = c + mu + m \partial u$. En retranchant l'équation primitive $xyz = c + mu$, et mettant x au lieu de $x + \partial x$, et z au lieu de $z + \partial z$, comme nous avons fait (133), il restera $xy \partial z + yz \partial x + xz \partial y = m \partial u$.

135. La règle donnée (134) sert aussi à différencier les puissances des variables. Si l'on veut, par exemple, différencier x^2 ; en considérant cette quantité sous cette forme, xx , et traitant ce produit comme s'il étoit composé de deux variables différentes, les différentielles seront $x \partial x + x \partial x$, ou $2 x \partial x$. On trouvera de même que les différentielles de x^3 se réduisent à $3x^2 \partial x$, et qu'en général la différentielle de x^m est $m x^{m-1} \partial x$, ou que $\partial(x^m) = m x^{m-1} \partial x$.

136. D'après cela il est facile de différencier les expressions affectées du signe radical, en les écrivant comme des quantités élevées

aux puissances fractionnaires correspondantes. Étant donné, par exemple, $\sqrt{a+bx}$, qu'on écrive $(a+bx)^{\frac{1}{2}}$; et comparant cette expression à l'expression générale x^m , on aura $m = \frac{1}{2}$, et $a+bx$ au lieu de x ; donc mx^{m-1} deviendra $\frac{1}{2}(a+bx)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}(a+bx)^{-\frac{1}{2}}$. Il reste à multiplier cette expression par δx , (135), c'est-à-dire, dans le cas dont il s'agit, par $\delta(a+bx) = b\delta x$, (131); donc $\delta\sqrt{a+bx} = \frac{1}{2}b\delta x(a+bx)^{-\frac{1}{2}} = \frac{b\delta x}{2\sqrt{a+bx}}$.

137. La même expression générale (135) donne le moyen de différentier les variables qui se présentent sous la forme de fraction. Si on avoit $\frac{x}{y} = a$, il seroit plus court et plus simple de ne différentier l'équation qu'après l'avoir convertie en celle-ci, $x = ay$, (130). Mais dans les équations composées de plusieurs termes, cette opération n'est pas toujours commode à pratiquer. En pareil cas, au lieu de $\frac{x}{y}$, on écrit l'équivalent, xy^{-1} . Les différentielles de ce produit sont (134), $x\delta(y^{-1}) + y^{-1}\delta x = x\delta(y^{-1}) + \frac{\delta x}{y}$. Or, si l'on compare l'expression $\delta(y^{-1})$ avec l'expression générale de la différentielle de x^m , on a $m = -1$, $m-1 = -2$, y au lieu de x , et δy au lieu de δx . Donc $\delta(y^{-1}) = -1 \times y^{-2}\delta y = -\frac{\delta y}{y^2}$; donc $x\delta(y^{-1}) = -\frac{x\delta y}{y^2}$; donc enfin $\delta\frac{x}{y} = \frac{\delta x}{y} - \frac{x\delta y}{y^2} = \frac{y\delta x - x\delta y}{y^2}$. D'où il suit que pour différentier une fraction composée de variables, il faut multiplier le dénominateur par les différentielles du numérateur, soustraire de ce produit les différentielles du dénominateur multipliées par le numérateur, et diviser le reste par le carré du dénominateur.

Démontrons l'exactitude de cette opération, en la comparant avec celle que l'on a vue (130). Dans cette dernière, l'équation $x = ay$ a donné, pour les différentielles, $\delta x = a\delta y$; mais tout-à-l'heure la même équation exprimée sous cette forme, $\frac{x}{y} = a$,

nous a donné $\frac{y \delta x - x \delta y}{y^2} = 0$, (0 étant (131) la différentielle de a); il faut prouver que les deux équations différentielles sont les mêmes sous des formes différentes. Or, si l'on multiplie la dernière par y^2 , on aura $y \delta x - x \delta y = 0 \times y^2 = 0$; et par conséquent $y \delta x = x \delta y$, et $\delta x = \frac{x}{y} \times \delta y$; mais par l'équation primitive, $\frac{x}{y} = a$; donc $\frac{x}{y} \times \delta y = a \delta y$; donc la seconde équation différentielle se réduit à la première $\delta x = a \delta y$.

La règle que nous venons de donner mène donc à un résultat rigoureux dans le cas cité, quelle que soit d'ailleurs la grandeur des variations. Mais on doit observer qu'il n'en sera pas de même pour les variations finies toutes les fois que l'équation à différentier contiendra explicitement ou implicitement quelque produit de plusieurs variables prises avec des exposants positifs. Par exemple $\frac{z}{y} = x$ contient implicitement le produit yx , et dès-lors sous quelque forme que l'on mette l'équation pour la différentier, la quantité $\delta y \delta x$ sera toujours négligée, (133).

Tels sont les éléments du calcul différentiel; nous les avons exposés avec plus d'étendue qu'on n'a coutume de le faire, pour en faciliter l'intelligence aux Commencants. Avec ces règles on peut différentier toute expression algébrique. Mais l'intégration ne s'étend pas de même à toutes sortes d'expressions. Quoique pour intégrer, les règles se réduisent, pour ainsi dire, à une seule, l'exécution en est ordinairement difficile et souvent impossible.

138. L'intégration est l'opération inverse de la différentiation. Étant donné des quantités variables, on trouve, en différentiant, les rapports entre leurs changements; au contraire, en intégrant, on a pour but de remonter de ces changements à la connoissance des grandeurs variables auxquelles ils appartiennent. Si donc la différentielle de x est δx , l'intégrale de δx est x ; et si la différentielle de x^m est $m x^{m-1} \delta x$, (135), l'intégrale de $m x^{m-1} \delta x$ est x^m . D'où se tire la règle suivante pour intégrer cette espèce de

différentielles. Augmentez d'une unité l'exposant de la variable, et divisez par le produit de l'exposant ainsi augmenté et de la différentielle. Dans l'expression $mx^{m-1} \delta x$, l'exposant $m - 1$, accru d'une unité, devient m . On a donc $mx^m \delta x$; et en divisant par $m \delta x$, conformément à la seconde partie de la règle, l'intégration est complète, et donne x^m .

De plus, si la différentielle est multipliée ou divisée par quelques constantes, on conservera, en intégrant, les constantes dans leur place. Car il est clair que si la différentielle de ay est $a \delta y$, (131), l'intégrale de $a \delta y$ doit être ay .

En différentiant un produit quelconque de variables, par exemple, xy , nous avons négligé, (133), l'infiniment petit du second ordre $\delta x \delta y$. Or si en intégrant, nous omettons aussi les infiniments petits de même ordre, l'erreur commise dans la différentiation sera compensée dans l'intégration. Donc si nous assignons xy pour l'intégrale de $y \delta x + x \delta y$, quoique cette expression différentielle ne soit pas complète, et qu'il y manque le terme $\delta x \delta y$, il est évident que l'intégration sera très exacte.

Ce que nous avons dit du calcul intégral suffit pour l'intelligence de ce traité. Nous ajouterons seulement, pour donner au lecteur quelque idée de la nature de ce calcul, qu'il seroit en général facile d'intégrer, si les opérations du calcul ne présentent presque toujours des différentielles incomplètes ou enveloppées dans des expressions embarrassantes. Il est impossible, par exemple, d'intégrer $y \delta x$, parce qu'il n'existe aucune quantité algébrique dont la différentiation puisse donner pour seul résultat $y \delta x$. En un mot, quelle que soit l'expression différentielle qu'on veut intégrer, il faut en trouver une qui ne soit point affectée de différentielles, et qui soit telle qu'en la différentiant elle produise exactement la différentielle proposée; ce sera l'intégrale cherchée. Telle est la principale règle, et c'est en cela que consiste tout l'art du calcul intégral; mais *hoc opus, hic labor est.*

139. Les expressions employées jusqu'ici étant de la plus grande généralité, il s'ensuit que toutes les règles du calcul différentiel et intégral doivent pouvoir s'appliquer aux lignes trigonométriques. Voyons d'abord comment la valeur de leurs différentielles finies, de quelque grandeur qu'elles soient, se déduit très rigoureusement, de quelques formules de la table II, qui, je crois, n'ont pas encore été employées de cette manière, et qui, par ces transformations, deviennent de la plus grande utilité.

Puisque l'équation (II. 22°), $\sin.A - \sin.B = 2 \sin.\frac{1}{2}(A - B) \times \cos.\frac{1}{2}(A + B)$ suppose $A > B$, on pourra désigner par δB , à la manière du calcul différentiel, l'accroissement qu'il seroit nécessaire de donner à l'angle B pour qu'il devînt égal à l'angle A ; et de même par $\delta \sin.B$, la différence à ajouter à $\sin.B$, pour qu'il fût égal à $\sin.A$. On aura donc $A = B + \delta B$, et $\sin.A = \sin.B + \delta \sin.B$. En substituant ces valeurs, l'équation devient

$$\delta \sin.B = 2 \sin.\frac{1}{2} \delta B \cos.(B + \frac{1}{2} \delta B).$$

En opérant d'une manière analogue sur les équations (II. 23°, 24°, 25°), et se rappelant que lorsqu'un arc B augmente, son cosinus et sa cotangente diminuent (33), on aura les trois équations suivantes:

$$- \delta \cos.B = 2 \sin.\frac{1}{2} \delta B \sin.(B + \frac{1}{2} \delta B).$$

$$\delta \text{ tang}.B = \frac{\sin.\delta B}{\cos.B \cos.(B + \delta B)}.$$

$$- \delta \cot.B = \frac{\sin.\delta B}{\sin.B \sin.(B + \delta B)}.$$

Observons que les quatre équations que nous venons de donner sont de la plus rigoureuse vérité, quelle que soit la grandeur de δB , puisque nous n'avons négligé aucune quantité en les composant, et qu'elles ne sont autre chose que les quatre formules (II. 22° à 25°), présentées sous une autre forme. On pourra comparer ces équations avec celles données par Euler, (*Calculi differ. Pars prior*, 21), dans lesquelles il exprime les différences finies des sinus et des cosinus, par des séries infinies des puissances de la variation de l'arc.

Quant

Quant aux différentielles des sécantes et des cosécantes, on les trouvera (703, 712); jusques-là elles nous sont inutiles.

140. En reprenant la première de ces quatre équations, si on développe (53) l'expression $\cos.(B + \frac{1}{2}\delta B)$, on aura $\delta \sin.B = 2 \sin.\frac{1}{2}\delta B (\cos.B \cos.\frac{1}{2}\delta B - \sin.B \sin.\frac{1}{2}\delta B) = 2 \sin.\frac{1}{2}\delta B \cos.B \cos.\frac{1}{2}\delta B - 2 \sin.\frac{1}{2}\delta B \sin.B \sin.\frac{1}{2}\delta B = (I. 6^\circ, 22^\circ) \sin.\delta B \cos.B - \sin.B (1 - \cos.\delta B)$.

Supposons à présent que δB soit un arc infiniment petit, c'est-à-dire l'arc le plus voisin de zéro qu'il soit possible (133); il est facile alors de comprendre, en imaginant, si l'on veut, un arc infiniment petit, sur la figure 1, que le sinus de cet arc infiniment petit sera aussi près qu'il est possible, de se confondre avec l'arc même; et que le cosinus de cet arc sera de même infiniment près de se confondre avec le rayon. Employons donc δB au lieu de $\sin.\delta B$, et R ou 1 au lieu de $\cos.\delta B$; (nous verrons bientôt (152, 154) que les quantités négligées par cette supposition, ne sont que des infiniments petits du second ordre ou du troisième, &c.); l'équation $\delta \sin.B = \sin.\delta B \cos.B - \sin.B (1 - \cos.\delta B)$ deviendra

$$\delta \sin.B = \delta B \cos.B.$$

Avec les mêmes substitutions, la seconde des quatre équations ci-dessus — $\delta \cos.B = 2 \sin.\frac{1}{2}\delta B \sin.(B + \frac{1}{2}\delta B)$ devient

$$- \delta \cos.B = \delta B \sin.B.$$

Enfin si l'on écrit les deux suivantes au lieu de la troisième et de la quatrième,

$$\delta \text{tang}.B = \frac{\delta B}{\cos^2 B},$$

$$- \delta \text{cot}.B = \frac{\delta B}{\sin^2 B},$$

on aura les différentielles infinitésimales des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes, telles que les auteurs les ont données jusqu'à présent.

Pour démontrer immédiatement que dans ces deux dernières formules nous n'avons négligé que les infiniments petits (133) du

second ordre, du troisieme ordre, &c., développons les formules primitives de la maniere suivante : $\delta \text{tang. } B = \frac{\sin. \delta B}{\cos. B \cos. (B + \delta B)} =$
 $\frac{\sin. \delta B}{\cos. B (\cos. B \cos. \delta B - \sin. B \sin. \delta B)} = \frac{\delta B}{\cos.^2 B - \delta B \sin. B \cos. B}$, en faisant ,
 comme tout-à-l'heure, $\sin. \delta B = \delta B$, et $\cos. \delta B = 1$. Actuellement qu'on exécute, selon les regles de l'algebre, la division indiquée par la derniere fraction ; on trouvera qu'à l'exception du premier terme $\frac{\delta B}{\cos.^2 B}$, tous les termes du quotient renferment les puissances $(\delta B)^2$, ou $(\delta B)^3$, &c. Il en est de même de la formule de la cotangente.

141. Les différentielles infinitésimales trouvées jusqu'à présent pour les lignes trigonométriques, concourent à prouver une regle qui est de la plus grande utilité en Mathématiques. Lorsque $B = 0$, $\cos. B$ est le plus grand possible (41) ; alors $\sin. B = 0$, (42), et la seconde formule (140) donne $-\delta \cos. B = \delta B \times 0 = 0$. De même $\sin. B$ est le plus grand possible, quand $B = 90^\circ$; et alors $\cos. B = 0$, (42), et la premiere formule (140) donne $\delta \sin. B = \delta B \times 0 = 0$. D'où il suit qu'une variation infiniment petite de l'arc ne produit aucun changement dans le sinus ou dans le cosinus, lorsque ce sinus ou ce cosinus sont à leur *maximum*.

Ces résultats sont conformes à la regle suivante : *Quand la valeur finie d'une quantité est la plus grande possible, la différentielle de cette quantité est zéro.*

Soit proposé, par exemple, de partager une quantité donnée a en deux parties, telles que leur produit soit le plus grand possible. Appellant x l'une des deux parties, l'autre sera $a - x$, et le produit $ax - xx$. Dans le cas du *maximum*, c'est-à-dire de la plus grande valeur de ce produit, on a, par la regle précédente, $\delta(ax - xx) = 0$, ou $a\delta x = 2x\delta x$, et par conséquent $x = \frac{1}{2}a$. Les deux parties doivent donc être égales, pour que leur rectangle soit le plus grand possible. On voit combien la regle donnée est prompte et avantageuse.

142. Passons aux différentielles des puissances secondes.

$$\sin.^2 A - \sin.^2 B = \cos.^2 B - \cos.^2 A = \sin.(A - B) \sin.(A + B).$$

Donc, d'après les remarques et par les substitutions indiquées (139), on aura

$$\partial(\sin.^2 B) = -\partial(\cos.^2 B) = \sin. \partial B \sin.(2B + \partial B).$$

En procédant de même, les équations (II. 28°, 29°) fournissent les deux suivantes :

$$\partial(\text{tang.}^2 B) = \frac{\sin. \partial B \sin.(2B + \partial B)}{\cos.^2 B \cos.^2(B + \partial B)}.$$

$$-\partial(\cot.^2 B) = \frac{\sin. \partial B \sin.(2B + \partial B)}{\sin.^2 B \sin.^2(B + \partial B)}.$$

Ces formules sont aussi rigoureuses que les formules des premières puissances, pour quelque différence finie que ce soit. Réduisons-les à celles qu'on donne ordinairement pour les différences infiniment petites.

143. $\partial(\sin.^2 B) = \sin. \partial B \sin. 2(B + \frac{1}{2} \partial B) = (\text{I. } 6^\circ) 2 \sin. \partial B \sin.(B + \frac{1}{2} \partial B) \cos.(B + \frac{1}{2} \partial B)$. En faisant ∂B infiniment petit, et le substituant à $\sin. \partial B$, et substituant de même B à $(B + \frac{1}{2} \partial B)$ (133), l'équation devient

$$\partial(\sin.^2 B) = 2 \partial B \sin. B \cos. B.$$

C'est aussi ce qu'on auroit trouvé en faisant $\sin.^2 B = x^m$, et différentiant par la formule générale $m x^{m-1} \partial x$, (135). En effet $m = 2$, $x = \sin. B$, $\partial x = \partial \sin. B = \partial B \cos. B$, (140). Donc $m x^{m-1} \partial x = 2 (\sin. B)^{2-1} \partial B \cos. B = 2 \sin. B \partial B \cos. B$. En faisant donc usage, pour abrégé, de la formule générale, on a

$$\partial(\text{tang.}^2 B) = 2 \text{tang.} B \partial \text{tang.} B = 2 \text{tang.} B \times \frac{\partial B}{\cos.^2 B}, (140), \text{ et}$$

$$-\partial(\cot.^2 B) = 2 \cot. B \times \frac{\partial B}{\sin.^2 B}.$$

Nous avons porté dans la table II toutes les différentielles trouvées dans les articles 139, 140, 142, 143; ensorte qu'on les aura à volonté sous les yeux. C'est donc à cette table qu'on aura recours, quand on voudra vérifier quelque-une de ces diffé-

rentielles que nous emploierons dans la suite sans indiquer d'où nous les aurons prises.

Comme la différentielle d'un sinus négatif doit être négative (133), ce qui indique un décroissement dans le sinus, et par conséquent dans l'arc correspondant, la formule (II. 30°) devient en pareil cas $-\delta \sin. B = -2 \sin. \frac{1}{2} \delta B \cos. (B - \frac{1}{2} \delta B)$. De cette Observation appliquée convenablement aux formules suivantes, il résulte pour règle générale, que quand on aura à employer le second membre des formules différentielles finies de la table II, avec le signe négatif, il faudra substituer $(B - \delta B)$ au lieu de $(B + \delta B)$, $(B - \frac{1}{2} \delta B)$ au lieu de $(B + \frac{1}{2} \delta B)$, et $(2B - \delta B)$ au lieu de $(2B + \delta B)$. *22. 166.*

$$144. \delta B = \frac{\delta \sin. B}{\cos. B} = \frac{\delta \sin. B}{\sqrt{(1 - \sin.^2 B)}} = \delta \sin. B (1 - \sin.^2 B)^{-\frac{1}{2}}.$$

En élevant le binôme $1 - \sin.^2 B$ à la puissance $-\frac{1}{2}$ par le moyen de la formule du binôme de Newton, on aura $\delta B = \delta \sin. B \times (1 + \frac{1}{2} \sin.^2 B + \frac{1.3}{2.4} \sin.^4 B + \frac{1.3.5}{2.4.6} \sin.^6 B + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \sin.^8 B + \&c.)$. Cette série iroit jusqu'à l'infini; et comme la loi en est manifeste, il est aisé de la continuer plus loin, si l'on veut. Cherchons maintenant l'intégration de cette équation.

L'intégrale de δB est B , (138), et par la même raison $\sin. B$ est l'intégrale de $\delta \sin. B \times 1$. Pour trouver l'intégrale de $\frac{1}{2} \sin.^2 B \delta \sin. B$, qu'on augmente (138) d'une unité l'exposant, et on aura $\frac{1}{3} \sin.^3 B \delta \sin. B$; puis divisant par $3 \delta \sin. B$, le quotient ou l'intégrale cherchée sera $\frac{\sin.^3 B}{2.3}$. En intégrant ainsi chaque terme de la série, et mettant A au lieu de B , l'équation intégrée, que nous nommerons (S); sera

$$(S) \dots A = \sin. A + \frac{\sin.^3 A}{2.3} + \frac{3 \sin.^5 A}{2.4.5} + \frac{3.5 \sin.^7 A}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7 \sin.^9 A}{2.4.6.8.9} + \&c.$$

Nous voilà parvenus par des moyens un peu longs, mais d'une utilité fréquente, au but que nous nous étions proposé. La série infinie que nous avons trouvée (nous verrons (161) une méthode pour la calculer avec facilité) nous donnera, par le moyen du

sinus, la valeur d'un arc quelconque A exprimé en parties du rayon.

145. En effet, soit $A = 30^\circ$; nous savons (18) que $\sin.30^\circ = \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}$. En substituant ces valeurs, l'équation devient

$$\text{ARC de } 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2^3} + \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2^7} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 2^9} + \&c.$$

En faisant les divisions indiquées pour chaque terme, et nous bornant à huit décimales pour en avoir six exactes, nous aurons

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2} & = & 0,5 \\ \frac{1}{48} & = & 0,02083333 \\ \frac{3}{1280} & = & 0,00234375 \\ \frac{15}{43008} & = & 0,00034877 \\ \frac{105}{1769472} & = & 0,00005934 \\ \frac{945}{86507520} & = & 0,00001092 \\ \frac{10395}{4907335680} & = & 0,00000212 \\ \&c. & & \\ \text{TOTAL.} & & 0,523598 \end{array}$$

Ainsi l'arc de $30^\circ : R :: 0,523598 : 1$.

Nous omettons les deux derniers chiffres de la somme, parcequ'ils ne sont pas exacts. On pourroit avoir cette valeur totale aussi exactement et avec autant de décimales qu'on le voudroit, en continuant les divisions interrompues, et prenant de nouveaux termes de la série, dont la progression est claire. Ce travail a été fait; et en multipliant par 6 la valeur de l'arc de 30° , celle de la demi-circonférence a été calculée jusqu'à 127 décimales; c'est-à-dire qu'on a trouvé l'arc de $180^\circ = R \times 3,141592\ 653589\ 793238\ 462643\ 383279\ 502884\ 197169\ 399375\ 105820\ 974944\ 592307\ 816406\ 286208\ 998628\ 034825\ 342117\ 067982\ 148086\ 513272\ 306647\ 093844\ 6 +$. Donc la demi-circonférence du cercle, étendue en

ligne droite, égale trois fois le rayon, plus une partie de ce rayon exprimée par la fraction que nous venons de donner. Le dernier chiffre de ces décimales n'est pas le terme précis de cette valeur, puisqu'on en trouveroit de nouveaux, et à l'infini, en continuant l'opération; c'est une suite de la nature de l'équation (S), dont le second membre est indéfini. Ce qui prouve ce que nous avons déjà dit (129), qu'on ne peut avoir jusqu'à présent, que par une approximation portée, à la vérité, aussi loin qu'on le veut, le rapport entre le diamètre et la circonférence.

146. La valeur d'un arc étant trouvée, il est facile d'avoir celle de tous les autres par le seul secours des premières opérations de l'Arithmétique. En partant du nombre donné ci-dessus pour la valeur de l'arc de 180° , on en prendra la moitié pour l'arc de 90° , le tiers pour celui de 60° , et ainsi de suite. C'est ainsi qu'on a composé la table très utile (AA) qu'on trouvera à la fin de ce Traité, par laquelle on prend aisément en parties du rayon la valeur d'un arc quelconque donné en degrés, minutes, secondes et dixièmes, centièmes, &c.

Qu'on veuille, par exemple, avec sept décimales, l'arc de $6^\circ 22' 17''$, 3; on prendra successivement dans la table les quantités suivantes, avec une ou deux décimales de plus, pour avoir la somme exacte:

L'arc de 6°	=	0,104719755
20'		5817764
2'		581776
10"		48481
7"		33937
$\frac{3''}{10}$ ou $0''$, 3		1454

Valeur de l'arc de $6^\circ 22' 17''$, 3... 0,1112032

Nous avons tiré la table (AA) du Recueil précieux de Lambert, intitulé; (*Supplementa Tabul. Logarith. et Trigonometr.*

Berlin, 1770); non cependant sans l'avoir vérifiée en entier, et avoir corrigé quelques petites erreurs, presque toutes portant sur les derniers chiffres. Quand on voudra la valeur d'un arc avec plus de décimales que n'en donne la table, il faudra tirer cette valeur de celle de l'arc de 180° , (145).

147. L'expression de l'arc que nous avons eue par le moyen du sinus, se trouve aussi par le moyen de la tangente et par la même méthode. $\Delta B = (II. 39^\circ) \Delta \text{tang.} B \cos.^2 B = (I. 19^\circ) \frac{\Delta \text{tang.} B}{1 + \text{tang.}^2 B} =$

$\Delta \text{tang.} B (1 + \text{tang.}^2 B)^{-1}$. En élevant à la puissance -1 le binôme $1 + \text{tang.}^2 B$, multipliant chaque terme par $\Delta \text{tang.} B$, et intégrant l'équation (opérations sur lesquelles il sera bon de s'exercer), enfin en substituant A au lieu de B, on aura l'équation suivante que je nomme (T) :

(T)... $A = \text{tang.} A - \frac{1}{3} \text{tang.}^3 A + \frac{1}{5} \text{tang.}^5 A - \frac{1}{7} \text{tang.}^7 A + \&c.$
 Mais $\text{tang.} 45^\circ = 1$, (17); donc

l'arc de $45^\circ = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \&c.$

Euler a transformé cette série en deux autres beaucoup plus *convergentes*, sans quoi elle seroit infiniment plus laborieuse que la série donnée (145). Mais comme ces calculs sont déjà faits, nous ne nous en occuperons pas.

On appelle *convergente* toute série décroissante, et *divergente* toute série croissante. Plus, dans la première espèce de série, la diminution d'un terme à l'autre est rapide, moins on a de termes à calculer pour obtenir une valeur très approchée.

Par exemple, pour avoir l'arc de 30° avec six décimales exactes, il a suffi de calculer sept termes de la série (145); tandis que pour évaluer avec six décimales exactes l'arc de 45° par la série trouvée tout-à-l'heure, il faudroit la moitié de la vie d'un homme, puisqu'il seroit nécessaire, comme il est aisé de le reconnoître, de calculer 500000 termes pour arriver à un terme dont les six premières décimales seroient 0.

Observons que l'expression de l'arc en une série qui contienne

les puissances du cosinus , se réduit à la série (S) déjà trouvée et renfermant les puissances du sinus. En effet — $\delta \cos. B = \delta B \sin. B$. Donc — $\delta B = \frac{\delta \cos. B}{\sin. B} = \delta \cos. B (1 - \cos.^2 B)^{-\frac{1}{2}}$. En développant le binôme , et faisant l'intégration , on aura — $B = \cos. B + \frac{\cos.^3 B}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cos.^5 B}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \&c.$, en continuant les coefficients et les exposants comme dans la série (S) , (144). Pour savoir ce que c'est que l'arc *B négatif* , j'observe qu'en mettant , dans l'équation (S) , $90^\circ - B$ au lieu de A , on a $90^\circ - B = \sin. (90^\circ - B) + \frac{\sin.^3 (90^\circ - B)}{2 \cdot 3} + \&c.$, série qui est la même que la précédente en puissances du cosinus , puisque $\sin. (90^\circ - B) = \cos. B$, (5). Donc l'arc négatif , dans ce cas , n'est qu'un arc qui , au lieu de croître de 0° à 90° , iroit de 90° à 0° , en prenant son origine à 90° , point correspondant à l'origine du cosinus , et en suivant l'accroissement du cosinus positif qui se fait de 90° à 0° .

Soit par exemple $B = 60^\circ$; on aura $90^\circ - B = 30^\circ$; par conséquent l'arc négatif de 60° n'est autre chose , dans ce cas , que l'arc positif de 30° .

On trouvera de même que l'expression de l'arc par le moyen d'une série contenant les puissances de la cotangente , se réduit à la série (T).

M. Jaurat (*Tom. IV. Mém. présentés à l'Ac. des Sc. de Paris* , pag. 527) donne sans démonstration les deux séries suivantes :

$$A = 1 - \cos. A - \frac{1}{3} \cos.^3 A - \frac{3}{40} \cos.^5 A - \&c. , \text{ et} \\ A = 1 - \cot. A + \frac{1}{3} \cot.^3 A - \frac{1}{5} \cot.^5 A + \&c.$$

En faisant $A = 90^\circ$, ces deux séries donnent $A = 1$, (34). Mais l'arc de $90^\circ = 1,57$; comme on peut le voir dans la table (AA) : ces deux séries ne sont donc pas justes.

148. Les lignes trigonométriques nous ont donné les moyens d'exprimer en parties du rayon la valeur des arcs ; employons maintenant ces mêmes arcs ainsi exprimés , à trouver réciproquement , en parties du rayon , la valeur des lignes trigonométriques qui

qu'ils appartiennent respectivement. On y parvient par un moyen aussi ingénieux que simple, et qu'on appelle *le retour des séries*. Étant donnée, par exemple, la série (S), dans laquelle l'arc A est exprimé en puissances du sinus, on demande la valeur de $\sin A$ exprimée en puissances de l'arc. Nous traiterons cette transformation, d'une utilité infinie dans les Mathématiques, avec autant de clarté qu'il nous sera possible, et d'une manière très générale, en faveur des lecteurs qui n'en seroient pas instruits.

Soit donc proposée l'équation générale suivante, que nous appellerons (P) :

(P)... $m = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + \&c.$ Dans cette équation je suppose connue la valeur de m , ainsi que celle des coefficients $a, b, c, d, \&c.$; y est l'inconnue dont on demande la valeur.

Convertissons la série en la suivante, que nous appellerons (Q) :

$$(Q)...y = Am + Bm^2 + Cm^3 + Dm^4 + \&c.$$

Il est évident qu'on peut toujours représenter ainsi la valeur de y , puisque $A, B, C, D, \&c.$ sont des expressions indéterminées, et par conséquent susceptibles chacune d'une valeur quelconque, telle qu'il est convenable pour que l'équation soit exacte. Il s'agit donc de fixer quelle doit être la valeur de chacune de ces indéterminées, pour que l'équation ait lieu. Rien de plus facile et de plus ingénieux à la fois.

Puisque $y = Am + Bm^2 + Cm^3 + \&c.$, qu'on élève successivement cette équation à la 1^{re}, puis à la 2^e, à la 3^e, à la 4^e, &c. puissance; qu'on ordonne les produits comme à l'ordinaire, et par rapport aux diverses puissances de m , on aura

$$\begin{aligned} y &= Am + Bm^2 + Cm^3 + Dm^4 + Em^5 + \&c. \\ y^2 &= \dots\dots A^2m^2 + 2ABm^3 + 2ACm^4 + 2ADm^5 + \&c. \\ &\quad + B^2m^4 + 2BCm^5 + \&c. \\ y^3 &= \dots\dots\dots A^3m^3 + 3A^2Bm^4 + 3A^2Cm^5 + \&c. \\ &\quad + 3AB^2m^5 + \&c. \\ y^4 &= \dots\dots\dots A^4m^4 + 4A^3Bm^5 + \&c. \\ y^5 &= \dots\dots\dots A^5m^5 + \&c. \\ &\quad \&c. \qquad \qquad \qquad G \end{aligned}$$

neuvième puissance de m . Ces opérations une fois faites leur serviront de formule générale pour retourner une série, de quelque forme qu'elle soit. Faisons-en l'application au cas qui nous occupe. En comparant l'équation (S), (144), à l'équation générale (P), j'observe que la première ne contient pas de puissances paires; or il faut que l'équation (P) et celle à résoudre soient semblables, et c'est ce que nous obtiendrons en égalant à zéro dans l'équation (P) les coefficients des puissances qui manquent dans l'équation proposée. Donc dans ce cas-ci $b = 0$, $d = 0$, $f = 0$, &c. Cela posé, voyons ce que deviennent les valeurs que nous avons trouvées pour les indéterminées, dans l'équation (Q).

Nous avons eu 1°. $A = \frac{1}{a}$, valeur qui subsiste. 2°. $B = -\frac{b}{a^2}$; mais $b = 0$; donc $B = 0$. 3°. $C = \frac{2b^2 - ac}{a^3}$; mais $b = 0$; donc $C = -\frac{ac}{a^3} = -\frac{c}{a^2}$.

En poursuivant ainsi, on aura $D = 0$, $E = \frac{3a^2c^2 - a^3e}{a^5} = \frac{3c^2 - ae}{a^3}$, $F = 0$, $G = \frac{8a^2ce - 12c^3 - a^3g}{a^{10}}$, &c. Mais en comparant à l'équation (P) la proposée (S), on a $a = 1$, $c = \frac{1}{2.3}$, $e = \frac{3}{2.4.5}$, $g = \frac{3.5}{2.4.6.7}$. En substituant ces valeurs, on aura pour celles des indéterminées, $A = 1$, $C = -\frac{1}{2.3}$, $E = \frac{1}{2.3.4.5}$, $G = -\frac{1}{2.3.4.5.6.7}$; d'où l'on peut évidemment conclure la valeur et le signe de celles qui suivent, et comme, dans le cas dont il s'agit, $m =$ l'arc A , et $y =$ le sinus de A , l'équation (Q) devient (W) . . . $\sin. A = A - \frac{A^3}{2.3} + \frac{A^5}{2.3.4.5} - \frac{A^7}{2.3.4.5.6.7} + \&c.$

Par le moyen de cette série, on pourra donc calculer, avec autant de décimales qu'on le voudra, le sinus d'un arc quelconque, en prenant la valeur de cet arc dans la table (AA).

Si au lieu de A on écrit $2A$, la série devient $\sin. 2A = 2A - \frac{8A^3}{2.3} + \frac{32A^5}{2.3.4.5} - \&c.$; et c'est un exemple de la manière d'exprimer

mer par ces sortes de séries les lignes trigonométriques de tout arc multiple.

Il est facile de voir que si on vouloit le sinus d'un arc, exprimé par une série des puissances du cosinus, ou de la cotangente, ou de la tangente de cet arc, il suffiroit de réduire en séries, par le moyen du binôme, les expressions (I. 3°, 4°, 5°). On comprendra aisément, par le peu que nous en disons, comment on auroit de même une ligne trigonométrique quelconque exprimée en puissances de chacune des autres. Au surplus on trouvera ces séries toutes faites dans le Mémoire de M. Jaurat, que nous avons cité (147).

150. On aura promptement la preuve de la justesse de la série (W) en cherchant le sinus de 30°, sur lequel nous ne pouvons être trompés, puisque nous en savons exactement la valeur (18). Pour abrégér singulièrement le travail, nous indiquerons la méthode suivante, qui en général est sans comparaison plus commode et plus courte que la formule donnée par Euler (*Introd. in Analys. infinit. Tom. I, 134*). Qu'on exprime l'équation (W) de la manière suivante ;

$$(R) \dots \sin. A = A - B + C - D + E, \&c ;$$

on aura, en comparant les deux équations (R) et (W),

$$B = A^2 \frac{1}{8} A \qquad C = A^2 \frac{1}{20} B$$

$$D = A^2 \frac{1}{42} C \qquad E = A^2 \frac{1}{72} D.$$

On voit qu'il suffit de calculer une seule fois A^2 , seule puissance de A , qui soit actuellement dans chaque terme, et que les diviseurs sont devenus commodes et très petits. Mais ce n'est pas tout. Je dispose ces quatre premiers diviseurs verticalement, comme il suit, j'en prends les différences premières et secondes, et trouvant ces dernières constantes, je continue les trois colonnes, d'après la loi découverte, et en allant de droite à gauche.

<u>Diviseurs.</u>	<u>Diff. 1^{re}</u>	<u>Diff. 2^e</u>
6	14	8
20	22	8
42	30	8
72	38	8
110	46	8
156	54	8
210		
	&c.	

On peut actuellement continuer la série (R) sans qu'il soit besoin de multiplication pour former les diviseurs dans les valeurs successives de F , de G , de H , &c. Les colonnes que nous venons de commencer les donneront à l'infini, par le moyen de simples additions. Cet exemple prouve combien il est nécessaire d'observer, quand il y a lieu, les différences constantes, qui sont d'un grand secours en bien des cas.

151. Supposons à présent qu'on veuille calculer le sinus de 30° avec neuf décimales. On prendra dans la table (AA) l'arc de 30° avec dix décimales pour plus de sûreté, et on en formera le carré comme à l'ordinaire, ou, pour plus de promptitude, comme il suit, en employant la méthode abrégée déjà connue pour la multiplication des fractions décimales; ce qui consiste à prendre les facteurs dans le multiplicateur de gauche à droite, et à négliger, de droite à gauche, dans le multiplicande un chiffre pour le premier facteur, deux pour le second, trois pour le troisième, &c., en tenant compte cependant des dixaines que donnera le produit par chaque facteur du dernier chiffre négligé. Pour ne se pas tromper, on peut ponctuer successivement le facteur et le chiffre par lequel on commence la multiplication, comme on voit que nous l'avons

fait pour les deux premiers correspondants dans le multiplicateur et dans le multiplicande. (Voyez cette méthode dans les *Éléments de Mathém.* de M. l'Abbé Marie, édit. 1778, art. 79.)

Formation du quarré de l'arc A.

$$A = 0, 5235987756$$

$$0, 5235987756$$

$$0, 2617993878$$

$$104719755$$

$$15707963$$

$$2617994$$

$$471239$$

$$41888$$

$$3665$$

$$367$$

$$26$$

$$3$$

$$A^2 = 0, 2741556778$$

$$2A^2 = 0, 5483113556$$

$$3A^2 = 0, 8224670334$$

$$4A^2 = 1, 0966227112$$

$$5A^2 = 1, 3707783890$$

$$6A^2 = 1, 6449340668$$

$$7A^2 = 1, 9190897446$$

$$8A^2 = 2, 1932454224$$

$$9A^2 = 2, 4674011002$$

D'où l'on tire, en additionnant successivement la valeur de A^2 avec elle-même,

Ces multiples de A^2 ainsi préparés rendent très prompt le calcul de la série (R). Et en général, dans tous les cas où on aura à employer plusieurs fois un même facteur constant, on appliquera très utilement cette préparation, qui est d'une grande simplicité, et que je n'avois vu indiquée dans aucun ouvrage, lorsque je m'en suis servi, mais qui cependant se trouve dans Euler, *Calc.*

diff. Pars II. 96. Pour en faire usage dans la question présente; $\frac{1}{6} A = 0,0872664626$, valeur par laquelle il faut multiplier celle de A^2 pour avoir celle de B . Mais puisque nous venons de multiplier la valeur de A^2 par chacun des caracteres de l'arithmétique, nous avons déjà chacun de ses produits par chacun des chiffres de la valeur de $\frac{1}{6} A$; il ne s'agit donc plus que de placer ces produits particuliers, comme il suit, dans l'ordre qui leur convient, en pointant, pour éviter toute erreur, chacun des chiffres de la valeur de $\frac{1}{6} A$, à mesure qu'on écrit les produits correspondants ci-dessous.

$$\begin{array}{r}
 0,08A^2 = 0,02193245422 \\
 0,007A^2 = 0,00191908974 \\
 0,0002A^2 = 0,00005483114 \\
 0,00006A^2 = 0,00001644934 \\
 \text{\&c.} \quad 1644934 \\
 \quad 10966 \\
 \quad 1645 \\
 \quad 55 \\
 \quad 16 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$B = 0,0239245962$$

Divisant ensuite B par 20, on aura de la même manière, et par une simple addition, le produit du quotient par A^2 , et ce produit sera $C = 0,0003279532$. On trouvera de même, mais toujours plus promptement, la valeur de D et celle de E . Voici les termes; nous avons séparé les positifs et les négatifs.

$$\begin{array}{rcl}
 A = 0,5235987756 & - & B = 0,0239245962 \\
 C = 0,0003279532 & - & D = 0,0000021407 \\
 E = 0,0000000082 & - & 0,023926737 \\
 \hline
 + 0,523926737, & \text{somme des termes positifs.} & \\
 - 0,023926737, & \text{somme des termes négatifs.} & \\
 \hline
 \end{array}$$

Donc $\sin.30^\circ = 0,500000000$, valeur exacte (18).

On voit combien sont précises les séries que nous avons formées par le moyen du calcul différentiel et intégral et de la méthode du retour des séries. Si on prend l'arc de 30° avec les 127 décimales qu'on peut avoir en divisant par 6 la valeur donnée (145), et qu'on calcule assez de termes de la série (R) continuée selon les règles indiquées (150), pour avoir $\sin. 30^\circ$ avec 127 décimales, on trouvera toujours que la somme de ces termes se réduit à 0,5; en négligeant seulement le 127^e chiffre ou le suivant, qui ne peut jamais être juste, puisque la série est infinie, et que dès lors il doit toujours lui manquer une quantité que les termes suivants ne pourroient que diminuer de plus en plus, quelque loin qu'on poussât le calcul, sans que cette quantité, en approchant sans cesse de l'infiniment petit, pût y arriver, nos nombres n'étant pas de nature à donner une expression infiniment petite (133).

152. Des séries (144, 149) on tire les deux expressions qui suivent, de la différence entre l'arc et son sinus.

$$A - \sin. A = \frac{\sin.^3 A}{2 \cdot 3} + \frac{3 \sin.^5 A}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \&c.$$

$$A - \sin. A = \frac{A^3}{2 \cdot 3} - \frac{A^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \&c.$$

D'où il suit que, lorsque l'arc est infiniment petit, la différence entre l'arc et le sinus consiste en infiniment petits du troisième ordre, du cinquième, &c.

Si dans chacune de ces équations on écrit $\frac{1}{2}A$ au lieu de A , (128), et qu'on les multiplie l'une et l'autre par 2, on aura les deux équations suivantes, qui donnent une double expression de la différence entre l'arc et sa corde (19).

$$A - 2 \sin. \frac{1}{2} A = \frac{\sin.^3 \frac{1}{2} A}{3} + \frac{3 \sin.^5 \frac{1}{2} A}{4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5 \sin.^7 \frac{1}{2} A}{4 \cdot 6 \cdot 7} + \&c.$$

$$A - 2 \sin. \frac{1}{2} A = \frac{A^3}{2 \cdot 3 \cdot 2^3} - \frac{A^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^4} + \frac{A^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2^5} - \&c.$$

En prenant les arcs dans la table (AA), on pourra donc calculer facilement les cordes, avec autant de décimales qu'on voudra, par le moyen de la dernière série.

La loi de cette série est manifeste. Pour s'en servir à calculer promptement un cosinus, on suivra la méthode employée (150, 151).

Par le moyen de cette série et de la précédente, on pourra donc calculer le cosinus et la tangente d'un angle quelconque avec autant de décimales qu'on voudra, en prenant l'arc dans la table (AA).

Il faut observer que ces sortes de séries étant d'autant plus convergentes que l'arc est plus petit, si l'on cherche le sinus d'un arc plus grand que 45° , il vaut mieux calculer le cosinus de son complément par le moyen de la série (Y). De même pour avoir le cosinus d'un arc plus grand que 45° , on emploiera de préférence la série (W).

De la série (Y) on tire l'expression suivante du sinus verse:

$$1 - \cos. A = \frac{A^2}{2} - \frac{A^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{A^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \&c.,$$

par laquelle on voit que lorsque A est infiniment petit, l'erreur que l'on commet en faisant le cosinus égal au rayon, consiste en infiniment petits du second ordre, du quatrième, &c.

Si l'arc A est négatif, aucun des signes de la série (Y) ne change pour cela, puisqu'elle n'est composée que de puissances paires de A. Au contraire si on fait A négatif dans les équations (S), (144), et (U), (153), tous les signes seront changés. D'où je déduis la règle suivante, qui est très utile; *le sinus, la tangente, et par conséquent la cotangente d'un arc négatif sont négatifs, et son cosinus est positif*; c'est-à-dire que, dans tous les cas, son sinus, sa tangente et sa cotangente ont un signe contraire à celui que leur donne la table (42), et que son cosinus conserve le même signe que dans cette table.

155. La recherche des termes consécutifs de la série (U), par le moyen des indéterminées, est très laborieuse, et le devient de plus en plus à mesure que les puissances croissent. On peut obtenir la même série avec bien moins de peine, en divisant l'équation (W) par l'équation (Y), parcequ'on apperçoit sur le champ la loi de

chacune des séries de ces équations, et qu'on peut dès-lors les continuer à volonté : mais cette division même est pénible. Nous avons donc pensé devoir profiter de la méthode qu'Euler a donnée pour réduire à une série infinie toutes sortes de fonctions fractionnaires, finies ou infinies. (On nomme *fonction* d'une quantité variable, par exemple de l'arc A, dans le cas dont il s'agit, toute expression analytique composée, en quelque manière que ce soit, de cette variable et de quantités constantes). En exprimant par des lettres les coefficients de l'arc A dans les trois séries, on a

$$\frac{(W) \dots A - bA^3 + cA^5 - dA^7 + \&c.}{(Y) \dots 1 - \beta A^3 + \gamma A^5 - \delta A^7 + \&c.} = (U) \dots A + BA^3 + CA^5 + DA^7 \&c.$$

$$(Y) \dots \frac{1 - \beta A^2 + \gamma A^4 - \delta A^6 + \dots}{1 - \beta A^2 + \gamma A^4 - \delta A^6 + \dots} = (U) \dots A + BA' + CA'' + DA''' + \dots$$

ou, en multipliant l'équation par la série (Y), en ordonnant les termes par rapport à A, et en n'écrivant, selon l'usage et comme nous l'avons fait (148, 153), chaque puissance de A qu'une seule fois pour chaque colonne verticale,

$$\Lambda - b\Lambda^3 + c\Lambda^5 - d\Lambda^7 + \&c. = \Lambda + B\Lambda^3 + C\Lambda^5 + D\Lambda^7 + \&c.$$

— β — βB — βC —&c.

$$+ \gamma + \gamma B + \&c.$$

— ♪ — &c.

Et en transposant le premier membre,

$$0 = A + BA^{3'} + CA^5 + DA^7 + EA^9 + \&c.$$

$$- \beta \quad - \beta B \quad - \beta C \quad - \beta D \quad - \&c.$$

$$+ \gamma + \gamma B + \gamma C + \&c.$$

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \dots$$

... + &c.

$$-A + b - c + d - e + \&c.$$

Donc en faisant, comme à l'ordinaire, que chaque colonne verticale se réduise à zéro, on aura

$$B = a - b$$

$$G = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) \frac{1}{\rho + \rho'}$$

$$D = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$$

$$\frac{D}{E} = \frac{\delta - a + \beta C - \gamma B}{\delta - a + \beta C - \gamma B}$$

En observant la suite des termes de chaque colonne verticale,

il devient facile à présent de continuer sans calcul ces équations qui renferment les valeurs cherchées des coefficients successifs de la série (U). On aura, par exemple,

$$F = 2 - f + 2E - 7D + 8C - 6B$$

$$G = -1 + g + 2F - 7E + 8D - 6C + 5B$$

et ainsi de suite.

En substituant les nombres, réduisant toutes les fractions au plus grand dénominateur, et la somme des fractions à l'expression la plus simple, on trouvera

$$F = \frac{1382}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}, G = \frac{21844}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}, H = \frac{929569}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}, \&c.$$

Soit maintenant, en imitant ce que nous avons fait (150),
 $\text{tang. } A = A + B' + 2C' + 17D' + 62E' + 1382F' + 21844G' + 929569H' + \&c;$ et on aura

$$B' = A^2 \frac{1}{3} A$$

$$F' = A^2 \frac{1}{55} E'$$

$$C' = A^2 \frac{1}{5} B'$$

$$G' = A^2 \frac{1}{39} F'$$

$$D' = A^2 \frac{1}{21} C'$$

$$H' = A^2 \frac{1}{105} G'$$

$$E' = A^2 \frac{1}{9} D'$$

&c.

On calculera ces coefficients $B', C', D', \&c.$ de la manière enseignée (151), et on aura la tangente par un calcul abrégé autant qu'il est possible. Passons à celui de la cotangente.

156. $\text{Cot. } A = \frac{\cos. A}{\sin. A}$. En substituant à $\frac{\cos. A}{\sin. A}$ les séries $\frac{(Y)}{(W)}$, telles qu'elles sont exprimées (155), on aura

$$\text{cot. } A = \frac{1 - \beta A^2 + \gamma A^4 - \delta A^6 + \epsilon A^8 - \&c.}{A - b A^3 + c A^5 - d A^7 + e A^9 - \&c.}$$

Appliquons actuellement à cette équation, de même que nous l'avons fait tout-à-l'heure pour la tangente, la méthode que nous avons empruntée d'Euler, et égalons cette expression fractionnaire de la cotangente à une série, dans chaque terme de laquelle le coefficient de l'arc A sera représenté par une indéterminée; et nous aurons

$$\frac{1 - \beta A^2 + \gamma A^4 - \delta A^6 + \&c.}{A - b A^3 + c A^5 - d A^7 + \&c.} = \frac{1}{A} + B A + C A^3 + D A^5 + \&c.$$

En multipliant l'équation par le dénominateur du premier membre, transposant le premier membre et ordonnant, on aura

$$0 = \begin{cases} 1 + BA^2 + CA^4 + DA^6 + EA^8 + FA^{10} + \&c. \\ -b - bB - bC - bD - bE - \&c. \\ +c + cB + cC + cD + \&c. \\ -d - dB - dC - \&c. \\ +e + eB + \&c. \\ -f - \&c. \\ -1 + \beta - \gamma + \delta - \epsilon + \zeta - \&c. \end{cases}$$

En faisant chaque colonne égale à zéro, on aura

$$\begin{aligned} B &= b - \beta \\ C &= -c + \gamma + bB \\ D &= d - \delta + bC - cB \\ E &= -e + \epsilon + bD - cC + dB \\ &\&c. \end{aligned}$$

Ces équations sont faciles à continuer sans calcul, de même que celles données (155).

En prenant dans les séries (W), (Y), les coefficients numériques correspondants aux lettres $b, c, \&c.$, $\beta, \gamma, \&c.$, on trouvera les valeurs de $B, C, D, \&c.$, qui, substituées dans la série $\frac{1}{A} + BA + CA^3 + \&c. = \cot.A$ suivant la supposition, donneront l'équation suivante :

$$(Z) \dots \cot.A = \frac{1}{A} - \frac{A^3}{3} - \frac{A^5}{3^2 \cdot 5} - \frac{2A^7}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{A^9}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} - \frac{2A^{11}}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} \\ - \frac{1382A^{13}}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} - \frac{4A^{15}}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} - \&c.$$

Supposant ensuite $\cot.A = \frac{1}{A} - B' - C' - 2D' - E' - F' - 691G' - H' - \&c.$, on aura

$$\begin{aligned} B' &= A^2 \times \frac{1}{3} & F' &= A^2 \frac{10}{99} E' \\ C' &= A^2 \frac{1}{15} B' & G' &= A^2 \frac{1}{691} F' \\ D' &= A^2 \frac{1}{21} C' & H' &= A^2 \frac{2}{195} F' \times A^2 \\ E' &= A^2 \frac{1}{3} D' & & \&c. \end{aligned}$$

J'ai tiré de F' plutôt que de G' la valeur de H' , pour l'avoir sous une expression plus simple. La quantité $F' \times A^2$ est trouvée précédemment par le calcul qui a donné la valeur de G' .

Il est facile de voir que la série (Z) est bien plus convergente et plus commode à calculer que la série (U), (153, 155). On verra (366) qu'en général si on cherche la tangente d'un arc de plus de 32° , il est mieux de calculer la cotangente de son complément (7) par le moyen de la série (Z).

CHAPITRE VI.

Des tables trigonométriques en nombres naturels.

157. ON ne peut avoir que d'une manière très approchée la valeur des lignes trigonométriques, si ce n'est cependant de quelques unes qui sont égales au rayon, à sa moitié, &c. Ce défaut n'est pas une suite particulière de la méthode des séries infinies données dans le chapitre précédent. Les méthodes géométriques qu'employoient les Anciens ne donnoient pour la valeur des lignes trigonométriques que des expressions qui contenoient des racines sourdes ou incommensurables, telles que, (43, 44), $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ et autres semblables; et l'on sait qu'il n'est pas possible d'avoir ces racines exactement, quelque loin qu'on pousse l'extraction. L'erreur diminuera seulement d'autant plus, qu'on emploiera plus de décimales pour exprimer la racine cherchée.

Les lignes trigonométriques ont été calculées par les uns avec dix, par d'autres avec quinze chiffres. Il faut douze décimales, en supposant $R = 1$, pour avoir avec précision les secondes et les dixièmes de seconde, lorsqu'il s'agit ou des sinus des angles qui diffèrent très peu de 90° , ou des cosinus des angles de quelques secondes seulement. Cependant les tables les plus communes sont réduites à

sept décimales , parcequ'elles sont d'un usage plus commode et d'une exactitude suffisante dans la plupart des cas. Elles contiennent les sinus , tangentes et sécantes , de minute en minute , depuis 0° jusqu'à 90° , et par conséquent les cosinus, les cotangentes et les cosécantes (5, 7). Ces tables servent aussi pour les arcs de plus de 90° , (35). On ne peut qu'admirer la patience de ceux qui les ont construites par des moyens extrêmement pénibles, sans le secours du calcul différentiel et de tant de formules qu'on a trouvées depuis. Il est inutile aujourd'hui d'exposer ces méthodes laborieuses. Mais au lieu de cette explication, nous supposerons, pour rendre ce Traité plus complet, les deux cas suivants : 1°. que, dans certains calculs délicats, on desire, comme il arrive quelquefois, l'expression de quelque ligne trigonométrique avec plus de chiffres que n'en donnent les tables ; en pareil cas les moyens les plus abrégés sont ceux que nous avons proposés dans le chapitre précédent : 2°. que l'on veuille calculer de nouvelles tables avec plus de décimales qu'on ne l'a fait jusqu'à présent ; et nous proposons pour ce cas la méthode suivante comme très expéditive.

Si dans les formules (II. 22^e, 23^e) on met nA au lieu de A , et $(n - 2) A$ au lieu de B , on aura les deux suivantes :

$$\sin. nA = \sin.(n - 2) A + 2 \sin.A \cos.(n - 1) A.$$

$$\cos. nA = \cos.(n - 2) A - 2 \sin.A \sin.(n - 1) A.$$

Soit maintenant $A = 1^{\circ}$; il faut, par les séries (W), (Y), très convergentes en pareil cas, calculer en usant des moyens donnés dans le chapitre précédent, le sinus et le cosinus de 1° , mais avec trois ou quatre décimales de plus que ce qu'on veut en avoir dans la table à former, pour que la dernière décimale de cette table soit aussi exacte qu'il est possible. On doublera cette valeur du sinus de 1° ; et sous cette valeur ainsi doublée on en écrira successivement le double, le triple, &c., et jusqu'à son produit par 9, précisément comme nous avons fait pour la valeur de A^2 , (151). Ces opérations faites, le calcul d'une table de sinus de degré en degré se réduit à de simples additions et soustractions ; et quand on la

porteroit à 28 décimales, de même que par les formules disposées par Euler (*Introd. in Analys. infinit.* Tom. I, 134), qui seroient certainement bien plus laborieuses (169) que la méthode que nous allons développer, la construction de cette table ne demanderoit que quelques heures, tandis qu'avec les méthodes des Anciens, peut-être ne suffiroit-il pas d'un mois employé aux opérations les plus ennuyeuses et les plus rebutantes de l'Arithmétique.

En effet, connoissant le sinus et le cosinus de 1° , on trouvera le sinus et le cosinus de 2° , en faisant $n = 2$ dans les formules que nous venons de donner, qui se changent alors en celles qui suivent :

$$\sin.2^\circ = \sin.0^\circ + 2 \sin.1^\circ \cos.1^\circ = 2 \sin.1^\circ \cos.1^\circ$$

$$\cos.2^\circ = \cos.0^\circ - 2 \sin.1^\circ \sin.1^\circ = 1 - 2 \sin.1^\circ \sin.1^\circ$$

Si nous considérons la première ; pour avoir le sinus de 2° , il faut donc multiplier $2 \sin.1^\circ$ par $\cos.1^\circ$. Mais nous avons déjà la valeur de $2 \sin.1^\circ$ multipliée par chacun des neuf caractères de notre Arithmétique ; il ne s'agit donc plus que de disposer ces produits selon que le demandent l'un après l'autre les chiffres qui composent la valeur du cosinus de 1° . (Voyez l'exemple donné (151) du produit de la valeur de A^2 par celle de $\frac{1}{6}A$). En prenant la somme de ces produits ainsi disposés, on aura le sinus de 2° . De même, pour la seconde formule, si on dispose ces mêmes produits selon que le demandent les chiffres qui composent la valeur de $\sin.1^\circ$, multiplicateur de $2 \sin.1^\circ$, qu'on en prenne la somme et qu'on la retranche de l'unité, on aura le cosinus de 2° . Si donc, dans nos formules générales, on met successivement au lieu de n , les nombres 3, 4, 5, &c. jusqu'à 30, on aura par la même méthode tous les sinus et cosinus, de degré en degré, jusqu'à 30° , avec la plus grande facilité.

On observera 1° . que le sinus ou cosinus cherché, c'est-à-dire le sinus ou cosinus de nA , se trouve toujours par le moyen des sinus et cosinus déjà calculés, puisque nA est l'arc le plus grand dans chacune de nos formules ; 2° . que quelle que soit la valeur de n ,

de n , le facteur $2 \sin. A$ est constant ; de sorte qu'ayant une fois séparément les produits de ce facteur par chacun des caracteres de l'Arithmétique, comme nous l'avons dit, il ne reste plus que des additions et des soustractions à faire pour construire la table. Les formules que nous donnons ici ont plusieurs avantages sur les formules analogues (124) que nous avons formées d'après Euler, comme il sera facile de le reconnoître à quiconque sera dans le cas d'en faire usage.

Nous avons prescrit de ne pousser le calcul que jusqu'à 30° , parce que les sinus et cosinus restants se déduisent très promptement de ceux déjà calculés, par le moyen de simples soustractions, en employant la formule (I. 15°), $\sin.(60^\circ - A) = \sin.(60^\circ + A) - \sin. A = \cos.(30^\circ - A) - \sin. A$, (5). En donnant successivement à A les valeurs de tous les termes de la progression arithmétique $1^\circ, 2^\circ, \dots, 29^\circ$, on aura, par cette formule, tous les sinus de 30° à 60° . Ceux de 60° à 90° sont la même chose que les cosinus déjà connus de 0° à 30° . Donc la table des sinus et cosinus, de degré en degré, sera complete pour le quart de cercle entier.

158. Qu'on veuille actuellement former les sinus et les cosinus de minute en minute : en faisant $A = 1'$, les mêmes formules, les mêmes méthodes les donneront. Ce calcul fait pour les minutes des deux ou trois premiers degrés, on pourra abrégér le travail, en prenant les différences premières, les secondes, les troisiemes, &c., jusqu'à ce qu'on trouve les différences constantes ; et alors en faisant le calcul pour quelques unes seulement des premières minutes à chaque degré, ou de deux en deux degrés, &c., selon qu'il paroîtra suffisant, on remplira très promptement les vuides avec le secours des différences constantes (150). En arrivant aux sinus et aux cosinus qu'on avoit d'abord calculés pour chaque degré, on aura la preuve de la justesse des valeurs interpolées pour les minutes. Il sera à propos, pour plus de sûreté, de prendre avec une décimale de plus que l'on n'en veut mettre dans la table,

les différences entre les sinus contigus, ainsi que les différences entre les cosinus contigus.

159. Le calcul des tangentes ne présente pas autant de facilités que celui que nous avons proposé pour les sinus. En examinant les formules qui ont été données jusqu'à présent, il nous semble qu'il n'y en a aucune qui soit aussi propre à abréger le travail, que la formule nouvelle que nous avons donnée (I. 43°). Lorsque les tangentes sont une fois calculées jusqu'à 45°, on aura alors les autres par de simples additions, au moyen de cette formule transformée comme il suit, $\text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2} A) = 2 \text{ tang.} A + \text{tang.}(45^\circ - \frac{1}{2} A)$. Au contraire, si on considère les formules (69, 113) qui ont été proposées jusqu'ici, on verra qu'elles obligent de calculer jusqu'à 30° non-seulement les tangentes, mais encore les cotangentes, pour trouver toutes les autres par leur moyen.

Mais pour le calcul des tangentes jusqu'à 45°, je ne crois pas qu'on soit encore parvenu à éviter les divisions; la formule disposée par Euler en exige plusieurs, et nous paroît dans bien des cas plus longue à calculer que la formule (I. 31°). Nous croyons donc ne pouvoir conseiller rien de mieux que cette formule, en prévenant de plus, que pour avoir la dernière décimale avec autant d'exactitude qu'il est possible, il faut se servir des sinus et des cosinus comme on les aura déjà calculés, c'est-à-dire avec deux ou trois chiffres de plus que ce qu'on en veut mettre dans la table. La division s'abrégera d'une manière analogue à celle que nous avons employée pour la multiplication, en formant le carré de Λ , (151). On en trouvera un exemple (163).

160. Les tangentes calculées, on aura les sécantes par de simples additions, au moyen de l'une ou l'autre des formules (I. 9°, 10°), en se rappelant que $\text{coséc.} = \frac{1}{\sin.}$, (24). On aura par conséquent $\text{coséc.} A = \frac{\text{cot. } \frac{1}{2} A + \text{tang. } \frac{1}{2} A}{2} = \text{cot.} A + \text{tang. } \frac{1}{2} A$.

161. Après avoir vu comment on peut ou construire des tables ou calculer immédiatement une ligne trigonométrique, il est à

propos de dire quelques mots de l'opération inverse. Je suppose que par le résultat d'un calcul on ait une ligne trigonométrique exprimée avec plus de décimales que les tables n'en donnent, et qu'il importe de savoir la mesure exacte de l'arc auquel cette ligne correspond. À l'exception des cas énoncés pag. 62, les tables ordinaires à 7 décimales suffisent pour faire connoître un arc avec toute la justesse dont on peut avoir besoin dans la pratique. Si donc on a une expression avec un plus grand nombre de décimales, on négligera celles qui suivent la septième, et on aura par les tables l'angle cherché. Mais s'il s'agit de l'expression du sinus d'un arc de près de 90° , ou du cosinus d'un angle très petit, il faut avoir recours à la série (S), (144). On substituera dans cette série l'expression donnée, au lieu de $\sin.A$, et on calculera autant de termes qu'il sera nécessaire pour avoir avec précision la valeur de l'arc A , ou de $(90^\circ - A)$ dans le cas où l'expression seroit celle d'un cosinus. Pour abrégér le calcul, soit $\sin.A = a$; en supposant, de la même manière qu'on a déjà vue plus d'une fois,

$$A = a + \frac{B}{3} + \frac{C}{5} + \frac{D}{7}, \text{ \&c. , on aura}$$

$$B = a^2 \frac{1}{2} a$$

$$D = a^2 \frac{5}{6} C$$

$$C = a^2 \frac{3}{4} B$$

$$\text{\&c.}$$

La loi de la série ci-dessus, et celle des coefficients numériques dans les valeurs de B , C , D , &c., sont manifestes. On traitera a^2 comme nous avons fait A^2 , (151); et quand on aura trouvé la valeur de A , on cherchera dans la table (AA) à combien de degrés, de minutes, de secondes, &c. elle correspond.

162. Nous supposons le lecteur muni des tables de trigonométrie; elles sont absolument nécessaires pour l'étude et pour la pratique de cette science. Cela présupposé, nous conseillons de s'exercer à vérifier les séries, avec peu de termes pour y employer peu de temps, ainsi que les formules contenues dans ce chapitre et dans le précédent. En tête des tables on trouve ordinairement

des instructions sur leur usage. Nous y ajouterons deux observations indispensables.

En premier lieu, les lignes trigonométriques des tables ordinaires semblent rapportées à un rayon de 100000 parties. Dans le fait on peut en bien des cas omettre les deux derniers chiffres séparés, sous la forme de décimales, par le point ou par la virgule. (Nous préférons la virgule, parce que le point est souvent le signe de la multiplication). Mais quelle qu'ait été la raison de construire ainsi les tables, il n'en résultera aucun embarras, si on se rappelle les règles (25). La série (149) dérivée de formules dans lesquelles on a supposé $R = 1$, donne, par exemple, $\sin. 8^\circ = 0,1391731$. Soit $R' = 100000$; on aura (25), $\sin. ' 8^\circ = R' \sin. 8^\circ = 13917,31$; c'est ce qu'on trouve dans les tables pour cette valeur. Dans la pratique il est plus utile de prendre les nombres des tables tels qu'ils doivent être dans la supposition où $R = 1$; ce qui est facile en avançant la virgule de cinq chiffres à gauche; et c'est ce que nous ferons toujours, parcequ'on se dispense ainsi de tenir compte du rayon dans les calculs; ce qui ne se pourroit sans des erreurs très graves, si on employoit les lignes trigonométriques sous la forme donnée par les tables.

163. Nous observons en second lieu, que lorsque les différences des lignes trigonométriques, de minute en minute, marchent également ou à-peu-près, on peut se servir de la règle de trois pour trouver les parties proportionnelles correspondantes aux secondes, aux dixièmes de seconde, &c. Mais si les différences sont notablement inégales, comme il arrive pour les tangentes de 73° à 90° , cette règle ne s'applique plus avec justesse. Un exemple fera comprendre ce que nous avançons. Qu'on demande la tangente de $85^\circ 7' 25''$;

$$\text{les tables donnent tang. } \begin{cases} 85^\circ 8' = 11,7447786 \\ 85^\circ 7' = 11,7045003 \end{cases}$$

$$\text{Différence. } \underline{0,0402783}$$

Si telle est la différence de la tangente pour $1'$ ou $60''$ de diffé-

rence dans l'arc, quelle sera la différence de la tangente pour 25" de différence dans l'arc? Voilà la règle ordinaire, par laquelle on a 60" :

$$25'' : 0,0402783 : x = \frac{25 \times 0,0402783}{60} = 0,0167826; \text{ et en ajoutant } \dots \dots \dots \frac{11,7045003}{11,7212829}, \text{ valeur de tang. } 85^\circ 7', \text{ on aura } \dots \dots \dots \text{ pour la valeur de tang. } 85^\circ 7' 25''.$$

Cette opération suppose visiblement que les variations des arcs, lorsqu'elles ne sont que d'une minute, sont proportionnelles à celles des lignes trigonométriques; ce qui en effet a toujours lieu pour les sinus, dans les tables qui n'ont que sept décimales seulement; mais il n'en est pas ainsi des tangentes. Dans le cas présent,

$$\text{tang. } 85^\circ 7' - \text{tang. } 85^\circ 6' = 0,0400050$$

$$\text{tang. } 85^\circ 9' - \text{tang. } 85^\circ 8' = 0,0405545$$

En comparant ces différences avec la différence intermédiaire trouvée ci-dessus, 0,0402783, on voit qu'elles procèdent avec une inégalité assez considérable; et puisqu'on la néglige dans la proportion, le résultat ne peut être exact. Il faut dans ce cas avoir recours à la formule rigoureuse (II. 32°), qui, pour 25" de variation dans l'arc, donne $\Delta \text{tang. } 85^\circ 7' = \frac{\sin. 25''}{\cos. 85^\circ 7' \cos. 85^\circ 7' 25''}$.

Or les tables donnent $\cos. 85^\circ 7' = \dots 0,0851271$; et par le moyen de la règle de trois, on a

$$\cos. 85^\circ 7' 25'' = \dots \dots \dots 0,0850063$$

$$\text{Produits } \left\{ \begin{array}{l} 0,00681017 \\ 42563 \\ 51 \\ 3 \end{array} \right.$$

$$\text{Donc } \cos. 85^\circ 7' \times \cos. 85^\circ 7' 25'' = \left| \frac{0,00723634, \text{ diviseur.}}{0,01674927, \text{ quotient.}} \right.$$

$$\text{Sin. } 25'' = 0,00012120342, \text{ dividende.}$$

$$4884002$$

$$542198$$

$$35654$$

$$6709$$

$$196$$

$$51$$

$$0$$

Dans cette division faite conformément à la formule, il faut observer que pour avoir avec exactitude le dernier chiffre du quotient, nous avons commencé du troisieme chiffre effectif du quotient après la virgule, et non du second, à négliger dans la multiplication les unités du produit de ce chiffre par le dernier du diviseur. De même pour le quatrieme chiffre effectif du quotient, nous avons omis son produit par le dernier du diviseur, et les unités de son produit par l'avant-dernier; pour le cinquieme du quotient, le produit par les deux derniers du diviseur, et les unités du produit par l'antépénultieme, et ainsi de suite, en ponctuant successivement les chiffres du diviseur, à mesure que la multiplication commence par chacun d'eux. C'est la méthode connue pour abrégér la division des décimales; elle est analogue à celle qu'on a déjà vue (151), et qui abrège leur multiplication. Pour avoir le quotient exact avec sept décimales, nous avons pris le dividende avec deux décimales de plus que n'en a le diviseur, sans compter les zéros qui commencent ces deux nombres. Nous avons tiré de la table (AA) la valeur de ce dividende ou de $\sin. 25''$; car on peut prendre l'arc au lieu du sinus, et, s'il n'excede pas une minute, avoir encore au moins dix décimales exactes, comme il est aisé de le reconnoître en calculant $\sin. 1'$ par le moyen de la série (W), (149). Après ces remarques nécessaires à l'intelligence de l'opération, examinons-en le résultat.

On a donc $\Delta \text{tang}. 85^\circ 7' = 0,0167493$

En ajoutant $\text{tang}. 85^\circ 7' = 11,7045003$, la formule rigoureuse donne $\text{tang}. 85^\circ 7' 25'' = 11,7212496$. On a trouvé par la regle de trois 11,7212829. Donc l'erreur de la regle de trois est 0,0000333.

Il faut en conclure que lorsqu'on veut avec exactitude les tangentes de 73° à 90° , on doit chercher les parties proportionnelles pour les secondes par le moyen de la formule différentielle (II. 32°). On emploiera l'autre (II. 33°) pour les cotangentes de 0° à 17° .

Il est clair que si la tangente est donnée, et que l'on cherche l'arc auquel elle correspond ; alors la formule (II. 32°) à calculer pour avoir les secondes, les dixièmes, &c., doit s'exprimer ainsi : $\sin. \delta B$ ou $\delta B = \delta \text{tang.} B \cos. B \cos. (B + \delta B)$. Faisons-en l'application au même exemple. Je suppose qu'on demande l'arc auquel correspond la tangente 11,7212496. Je cherche dans les tables la tangente la plus approchée, que je trouve être $\text{tang.} 85^\circ 7' = 11,7045003 = \text{tang.} B$. Je prends la différence entre ces deux tangentes, et je la désigne ainsi : $\delta \text{tang.} B = 0,0167493$. Je la multiplie par $\cos. B = \cos. 85^\circ 7'$. Ce produit, que j'appelle P , doit être multiplié par $\cos. (B + \delta B)$. Mais comme δB m'est inconnue, je l'ometts pour le moment, ce qui revient au même que d'employer la formule (II. 39°) au lieu de la formule (II. 32°), et je n'emploie que $\cos. B$. En faisant le calcul, je trouve $\delta B = P \times \cos. B = 0,000121375$. Je cherche dans la table (AA) l'arc dont la valeur est le plus immédiatement au dessous de cette valeur de δB ; je trouve que c'est l'arc de $20''$, et qu'il reste $0,000024412$; je trouve de même que ce reste répond à un arc de $5''$, et qu'il reste encore $0,000000171$. Pour avoir la valeur de ce second reste en décimales de secondes, je prends dans la même table l'arc d'une seconde $= 0,000004848$, et je dis

$$0,000004848 : 1'' :: 0,000000171 : x'' = 0'',028$$

Donc $\delta B = 25'',028$. Donc l'erreur qui résulte de ce qu'on a employé $\cos. B$ au lieu de $\cos. (B + \delta B)$ ne va pas à $\frac{2}{100}$ de seconde. Au surplus si on vouloit une exactitude rigoureuse ; après avoir trouvé $\delta B = 25''$ à très-peu près, on recommenceroit la dernière multiplication, en y employant $\cos. (B + 25'')$, au lieu de $\cos. B$, et on auroit $\delta B = P \times \cos. 85^\circ 7' 25'' = 0,000121202 = 25''$ exactement. En général on peut, sans erreur sensible, employer la formule (II. 39°), au lieu de la formule (II. 32°), dans cette opération ; mais non dans la précédente, du moins si l'on veut la tangente avec précision (sans quoi il vaudroit autant faire usage de la règle de trois) ; car en employant pour cette opération la formule

(II. 39°), on trouveroit $\text{tang. } 85^\circ 7' 25'' = 11,7212258$, valeur plus petite de 0,0000238, que la valeur exacte.

Les tables dont nous avons parlé dans ce Chapitre se nomment *Tables trigonométriques en nombres naturels*; ce qui les distingue de celles auxquelles nous allons passer.

CHAPITRE VII.

Des Tables trigonométriques en logarithmes.

164. ON ne peut assez dire combien nous devons au Baron de Neper, Ecossois, inventeur des logarithmes dont l'utilité dans les Mathématiques est au dessus de toute expression. C'est à l'Algebre à développer la théorie sur laquelle ils sont fondés, et les services importants et multipliés qu'on en retire. Cependant nous insérerons ici une partie des regles qui les concernent, pour nous mettre en état de traiter complètement de la construction des tables trigonométriques en logarithmes.

Si l'on nomme c la caractéristique d'un logarithme, on sait que $c + 1$ exprime la quantité des chiffres du nombre entier correspondant à ce logarithme. Par exemple 0,301030 est le logarithme de 2, et 2,301030 est le logarithme de 200; or dans le premier cas, $c = 0$; donc le nombre entier doit avoir un seul chiffre, et en effet ce nombre est 2. Dans le second cas, $c = 2$; donc le nombre correspondant, 200, doit avoir et a en effet trois chiffres. D'après cette regle, il faut que la caractéristique des logarithmes des fractions soit moindre que zero, c'est-à-dire négative (16). Nous traiterons seulement des logarithmes des fractions décimales, parce que toutes les autres fractions peuvent se réduire à celles-là.

Les logarithmes des fractions décimales peuvent s'exprimer de trois manieres différentes. Soit par exemple la fraction $0,75 = \frac{75}{100}$.

Selon

Selon la théorie des logarithmes, on aura $\log. \frac{75}{100} = \log. 75 - \log. 100 = 1,87506 - 2,00000$, en n'employant, pour abrégér, que cinq décimales; et en effectuant la soustraction, $\log. \frac{75}{100} = -0,12494$. Mais cette méthode, quoiqu'exacte, est absolument proscrite, à cause des inconvénients des logarithmes négatifs. Le principal est qu'on ne peut avoir par les tables le nombre correspondant à un pareil logarithme, qu'en regardant ce nombre comme le dénominateur d'une fraction ayant l'unité pour numérateur. D'où il suit que le nombre correspondant à chaque différent logarithme négatif a un dénominateur différent, et qu'on a ainsi des fractions qui ne jouissent pas de l'avantage qu'ont les fractions décimales, d'être immédiatement comparables entre elles.

La seconde manière, adoptée par quelques Auteurs, consiste à effectuer la soustraction sur les seules caractéristiques. Par exemple, $\log. \frac{75}{100} = 1,87506 - 2,00000 = -1 + 0,87506$; ce qu'ils écrivent encore comme il suit; $\bar{1},87506$. Cette manière est expéditive; mais elle n'est pas la plus usitée, parcequ'elle nécessite aussi l'emploi du signe négatif, et qu'il faut de l'attention pour ne pas se tromper dans les deux opérations contraires, l'addition des décimales et la soustraction des caractéristiques. Voici un exemple de cette manière; ayant trouvé le log. de $\frac{75}{100}$, je suppose qu'on cherche par les logarithmes le produit de 12 par $\frac{75}{100}$:

$$\log. 12 = 1,07918$$

$$\log. \frac{75}{100} = \bar{1},87506$$

$$\text{som. ou } \log. (12 \times \frac{75}{100}) = \log. 9 = 0,95424$$

Et tel est en effet le log. de 9 dans les tables.

Nous croyons devoir avertir que quelques Auteurs omettent dans les tables la virgule entre la caractéristique et les décimales.

165. Venons à la troisième manière, qui semble plus généralement suivie. Comme il ne peut arriver dans aucun calcul qu'on se trompe de dix mille millions, on ne court aucun risque de supposer la caracté-

ristique plus forte d'une dizaine d'unités, toutes les fois que cela sera nécessaire, pour l'avoir toujours positive. Ainsi dans l'exemple proposé, si on fait $\log. \frac{75}{100} = 11,87506 - 2,00000$, on aura $\log. 0,75 = 9,87506$; mais suivant les principes donnés (164), $9,87506 = \log. 7500000000$; donc pour que ces caractéristiques ainsi confondues induisissent en erreur, il faudroit se tromper au point d'employer 7500 millions au lieu de $\frac{75}{100}$ ou des $\frac{3}{4}$ d'une unité; ce qui est impossible.

Si l'on observe que $9,87506 = 10 - 0,12494$, on en conclura 1°. qu'il est facile de convertir en logarithme positif tout logarithme négatif, (164); 2°. que la caractéristique du log. d'une fraction décimale est toujours moindre que 10.

En ajoutant 10 à la caractéristique, on a donc $\log. 0,75 = 9,87506$. Par la même raison, $\log. 0,075 = \log. \frac{75}{1000} = 8,87506$; $\log. 0,0075 = \log. \frac{75}{10000} = 7,87506$; et ainsi de suite. D'où résulte cette règle; *le logarithme d'une fraction décimale a pour caractéristique le complément à 9 du nombre des zéros qui se trouvent de suite après la virgule dans la fraction donnée.*

De cette règle il suit que quand on aura le logarithme d'une fraction décimale, pour connoître cette fraction, on cherchera dans les tables à quel nombre répond le logarithme donné, sans tenir compte de la caractéristique; puis on mettra, avant le nombre trouvé, un zéro suivi de la virgule et d'autant de zéros qu'il manquoit d'unités à la caractéristique pour qu'elle fût égale à 9. Tout cela sera facile à entendre, pour peu qu'on réfléchisse aux exemples qui précèdent et à ceux qui suivent.

166. Nous avons dit que le log. d'une fraction décimale a toujours une caractéristique moindre que 10; de là il suit que *dans l'addition des logarithmes des fractions décimales, on ne doit pas tenir compte des dizaines de la caractéristique de la somme.* On les supprimera donc; et il en résultera que si le log. d'une somme doit être celui d'un nombre entier, la caractéristique se trouvera exacte et sans augmentation; et que si ce logarithme doit être celui

d'une fraction, la caractéristique sera conforme à la règle (165). Par exemple, si on cherche par les logarithmes le produit de $24 \times 0,75$, on aura $\log. 24 = 1,38021$

$$\log. 0,75 = 9,87506$$

$$\text{somme } 11,25527$$

En négligeant les dixaines de la somme, nous aurons seulement 1,25527, et l'erreur qui résulte de la règle (165) sera détruite, puisque ce nombre est le logarithme exact de $18 = 24 \times 0,75$.

Mais si l'on cherche le produit de $0,75 \times 0,4$;

$$\log. 0,75 = 9,87506$$

$$\log. 0,4 = 9,60206$$

$$\text{somme } 19,47712$$

Par la suppression des dixaines, la somme se réduit à 9,47712; et il est alors aisé de voir, d'après la règle donnée (165), que la caractéristique indique une fraction décimale, et que le logarithme trouvé est celui de $0,3 = 0,75 \times 0,4$.

167. Qu'on observe donc, comme une règle générale, de supprimer toujours les dixaines de la caractéristique. Ainsi, par exemple, s'il s'agit d'élever une fraction décimale à une puissance donnée; puisque le carré de 0,4 est 0,16, on aura $2 \log. 0,4 = 19,20412$, et on écrira seulement 9,20412, conformément à la règle (165). De même si l'on veut par les logarithmes le cube de 0,4 qui est 0,064, on aura $3 \log. 0,4 = 28,80618$, et on écrira 8,80618. On voit que nous avons négligé dans la caractéristique une dixaine pour la seconde puissance, et deux pour la troisième; on en supprimeroit trois pour la quatrième, et ainsi de suite. Concluons de là que pour l'extraction des racines, qui est l'opération inverse, il faut suppléer ces dixaines négligées; sans quoi le calcul ne pourroit être exact. On écrira donc ou on sous-entendra $m - 1$ de dixaines avant la caractéristique, en appelant m l'exposant du radical. Ainsi on suppléera une dixaine pour la racine carrée, deux pour la racine cubique, et ainsi de suite.

Pour avoir par le moyen des logarithmes la racine cubique de 0,064, dont le logarithme est 8,80618; avant de diviser ce logarithme par 3, suppléez deux dizaines à la caractéristique, en écrivant 28,80618; le quotient de la division, 9,60206, sera le logarithme de $0,4 = \sqrt[3]{0,064}$.

Je me suis un peu étendu sur les logarithmes des fractions décimales, à cause de l'usage continuel qu'on en fait dans la Trigonométrie. Les tangentes, jusqu'à 45° , et tous les sinus, ne sont que des fractions décimales, lorsqu'on suppose $R = 1$. Les caractéristiques de leurs logarithmes sont aussi, dans les tables, conformes à la règle que nous avons donnée (165). Quant aux tangentes des arcs plus grands que de 45° , quelques tables emploient pour caractéristiques 10, 11, &c. Dans ces tables les lignes trigonométriques sont considérées non comme parties de $R = 1$, mais comme parties de $R = 1000000000$. Lorsque je prends les logarithmes dans ces tables, je néglige constamment la dizaine, m'en tenant à la seule supposition que $R = 1$, comme à la plus commode.

168. Les tables trigonométriques en logarithmes ont été calculées par Briggs avec quinze chiffres pour chaque centième de degré, (*Trigonometria Britannica*, Goudæ, 1633); et par Adrien Ulacq, avec onze chiffres, de dix en dix secondes, (*Trigonometria artificialis..... ab Adriano Ulacco...* Goudæ, 1633). Ces tables, devenues aujourd'hui très rares, ont été réduites à huit chiffres par Gardiner, dont l'édition donnée à Londres en 1742 a été réimprimée en plusieurs endroits. Elles contiennent aussi les logarithmes des nombres jusqu'à 100000; et par le moyen des parties proportionnelles, elles les donnent aisément jusqu'à un million. Ce sont les tables les plus généralement adoptées. Jombert jeune vient d'en donner à Paris une édition portative, faite avec le plus grand soin, et dans laquelle, entre autres avantages, les logarithmes et leurs différences ont été disposés par M. Callet d'une manière très commode.

Persuadé de l'importance d'avoir des tables sans erreur, j'ai

vérifié chiffre par chiffre celles qui ont été imprimées à Paris (chez Desaint, 1768), et qui sont portatives et d'un usage facile. Cette édition est épuisée; mais j'ai cru faire une chose utile et agréable aux possesseurs de ces tables, et à ceux qui pourront se les procurer par la suite dans les ventes des bibliothèques particulières à Paris, que de publier à la fin de cet Ouvrage la liste de toutes les erreurs que contiennent ces mêmes tables.

Je suppose actuellement, comme nous l'avons fait pour les lignes trigonométriques en nombres naturels, qu'on ait besoin, dans certains cas, de leurs logarithmes avec plus de chiffres que n'en ont ceux des tables que l'on possède; ou bien que l'on veuille construire de nouvelles tables avec plus de chiffres que n'en contiennent celles qu'on a faites jusqu'à présent: voyons quels sont alors les moyens les plus expéditifs pour résoudre ces questions.

169. Par des voies très laborieuses, mais toujours savantes; Euler (*Introd. in Analys. infinit.* Tom. I, 194) a disposé, avec vingt décimales dans chaque terme, deux séries qui donnent le logarithme hyperbolique (171) du sinus et du cosinus d'un angle quelconque, désigné généralement par $\frac{m}{n} 90^\circ$, sans qu'il soit besoin de connoître la valeur de ces lignes en nombres naturels. Ces séries sont très convergentes, et pourroient être utiles pour la construction d'une table; cependant il me semble qu'elles ont quelques inconvénients. 1°. Qui voudroit les avoir avec plus de vingt décimales, auroit peut-être autant de peine à les préparer, en suivant les principes d'Euler, qu'à construire la table même des logarithmes de degré en degré, par les moyens que nous donnerons. 2°. Ces séries supposent que l'on connoisse avec autant de chiffres qu'on en veut par chaque terme, les logarithmes des nombres m , n , $n - m$, $n + m$, $2n - m$, et $2n + m$: il faut donc former pour chaque sinus et cosinus chacun de ces logarithmes, si on ne les a pas dans les tables avec autant de décimales qu'il est nécessaire. 3°. Chacun des termes des séries d'Euler est exprimé en

Pour avoir par le moyen des logarithmes la racine cubique de 0,064, dont le logarithme est 8,80618; avant de diviser ce logarithme par 3, suppléez deux dixaines à la caractéristique, en écrivant 28,80618; le quotient de la division, 9,60206, sera le logarithme de $0,4 = \sqrt[3]{0,064}$.

Je me suis un peu étendu sur les logarithmes des fractions décimales, à cause de l'usage continuel qu'on en fait dans la Trigonométrie. Les tangentes, jusqu'à 45° , et tous les sinus, ne sont que des fractions décimales, lorsqu'on suppose $R = 1$. Les caractéristiques de leurs logarithmes sont aussi, dans les tables, conformes à la règle que nous avons donnée (165). Quant aux tangentes des arcs plus grands que de 45° , quelques tables emploient pour caractéristiques 10, 11, &c. Dans ces tables les lignes trigonométriques sont considérées non comme parties de $R = 1$, mais comme parties de $R = 10000000000$. Lorsque je prends les logarithmes dans ces tables, je néglige constamment la dixaine, m'en tenant à la seule supposition que $R = 1$, comme à la plus commode.

168. Les tables trigonométriques en logarithmes ont été calculées par Briggs avec quinze chiffres pour chaque centième de degré, (*Trigonometria Britannica*, Goudæ, 1633); et par Adrien Ulacq, avec onze chiffres, de dix en dix secondes, (*Trigonometria artificialis..... ab Adriano Ulacco... Goudæ*, 1633). Ces tables, devenues aujourd'hui très rares, ont été réduites à huit chiffres par Gardiner, dont l'édition donnée à Londres en 1742 a été réimprimée en plusieurs endroits. Elles contiennent aussi les logarithmes des nombres jusqu'à 100000; et par le moyen des parties proportionnelles, elles les donnent aisément jusqu'à un million. Ce sont les tables les plus généralement adoptées. Jombert jeune vient d'en donner à Paris une édition portative, faite avec le plus grand soin, et dans laquelle, entre autres avantages, les logarithmes et leurs différences ont été disposés par M. Callet d'une manière très commode.

Persuadé de l'importance d'avoir des tables sans erreur, j'ai

vérifié chiffre par chiffre celles qui ont été imprimées à Paris (chez Desaint, 1768), et qui sont portatives et d'un usage facile. Cette édition est épuisée; mais j'ai cru faire une chose utile et agréable aux possesseurs de ces tables, et à ceux qui pourront se les procurer par la suite dans les ventes des bibliothèques particulières à Paris, que de publier à la fin de cet Ouvrage la liste de toutes les erreurs que contiennent ces mêmes tables.

Je suppose actuellement, comme nous l'avons fait pour les lignes trigonométriques en nombres naturels, qu'on ait besoin, dans certains cas, de leurs logarithmes avec plus de chiffres que n'en ont ceux des tables que l'on possède; ou bien que l'on veuille construire de nouvelles tables avec plus de chiffres que n'en contiennent celles qu'on a faites jusqu'à présent: voyons quels sont alors les moyens les plus expéditifs pour résoudre ces questions.

169. Par des voies très laborieuses, mais toujours savantes; Euler (*Introd. in Analys. infinit.* Tom. I, 194) a disposé, avec vingt décimales dans chaque terme, deux séries qui donnent le logarithme hyperbolique (171) du sinus et du cosinus d'un angle quelconque, désigné généralement par $\frac{m}{n} 90^\circ$, sans qu'il soit besoin de connoître la valeur de ces lignes en nombres naturels. Ces séries sont très convergentes, et pourroient être utiles pour la construction d'une table; cependant il me semble qu'elles ont quelques inconvénients. 1°. Qui voudroit les avoir avec plus de vingt décimales, auroit peut-être autant de peine à les préparer, en suivant les principes d'Euler, qu'à construire la table même des logarithmes de degré en degré, par les moyens que nous donnerons. 2°. Ces séries supposent que l'on connoisse avec autant de chiffres qu'on en veut par chaque terme, les logarithmes des nombres m , n , $n - m$, $n + m$, $2n - m$, et $2n + m$: il faut donc former pour chaque sinus et cosinus chacun de ces logarithmes, si on ne les a pas dans les tables avec autant de décimales qu'il est nécessaire. 3°. Chacun des termes des séries d'Euler est exprimé en

décimales qui doivent être multipliées ; savoir , le premier terme par $\frac{m^2}{n^2}$, le second par $\frac{m^4}{n^4}$, le troisième par $\frac{m^6}{n^6}$, et ainsi de suite. Qu'on cherche, par exemple, le logarithme du sinus de 43° , on aura $\frac{m}{n} 90^\circ = 43^\circ$, et par conséquent $\frac{m}{n} = \frac{43}{90}$; or, quelle fatigue n'éprouvera-t-on pas pour élever d'abord cette fraction aux puissances seconde, quatrième, sixième, &c., et multiplier ensuite chacune de ces puissances par les termes correspondants exprimés en décimales. Ces séries seroient à la vérité commodes pour les arcs qui sont parties aliquotes de 90° ; par exemple pour l'arc de 45° , on a $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$; pour l'arc de 18° , $\frac{m}{n} = \frac{1}{5}$, &c. : mais ces arcs sont en petit nombre. Au contraire si on demande le logarithme du sinus d'un arc exprimé en degrés, minutes, secondes et dixièmes, que l'on ait, par exemple, $\frac{m}{n} 90^\circ = 43^\circ 17' 17''$, 7 ; il faudra réduire les deux arcs en dixièmes, et on aura $\frac{m}{n} = \frac{43^\circ 17' 17'' \cdot 7}{90^\circ} = \frac{155837'' \cdot 7}{324000'' \cdot 0}$. Il est inutile de faire observer quelle seroit la longueur des opérations auxquelles conduiroit une pareille fraction. Le même inconvénient affecte les séries données par Euler pour le calcul des lignes trigonométriques en nombres naturels.

170. Ces difficultés, et le desir de donner des formules générales qui fussent applicables à tout arc exprimé en nombres entiers ou fractionnaires, et telles que le nombre de décimales de chaque terme ne fût point limité et que ces formules ne supposassent d'ailleurs rien de connu que l'arc, étoient des motifs suffisants pour m'engager à faire des tentatives réitérées ; mais n'ayant trouvé jusqu'à présent que des séries moins convergentes que celles données Chap. V, je regarde en général comme la voie la plus courte celle de déduire les logarithmes des lignes trigonométriques, de leur valeur trouvée d'abord en nombres naturels, sur-tout en employant les formules expéditives que nous donnerons tout-à-l'heure.

Comme les Ouvrages qui traitent des Éléments d'Algebre ne donnent pas tous les formules élégantes qu'on a imaginées pour la

construction rapide des logarithmes, et que la plupart de ces Ouvrages ne font qu'expliquer l'usage des logarithmes ordinaires, et sur quels principes ils sont fondés, je crois devoir faire connoître ces formules à ceux de mes Lecteurs qui n'en seroient pas instruits.

PROBLÈME. *Étant donné un nombre, trouver son logarithme.*

La solution qui suit est en partie tirée des *Éléments de Mathématiques* de M. l'Abbé Marie.

Soit $(1 + x)$ le nombre donné, $(1 + z)$ un autre nombre quelconque, et soit $a^m = (1 + x)$, et $a^n = (1 + z)$. Selon les notions élémentaires de la théorie des logarithmes, m est le logarithme de $(1 + x)$, n celui de $(1 + z)$; a se nomme la *base* des logarithmes, parce que chaque valeur différente de a change les valeurs de m et de n , et constitue un *système* différent de logarithmes. De plus, comme les équations ci-dessus

donnent $a^{mn} = (1 + x)^n = (1 + z)^m$, on a $1 + z = (1 + x)^{\frac{n}{m}}$: ce qui prouve une dépendance réciproque entre les logarithmes de deux nombres, dans quelque système que ce soit, puisque le logarithme m d'un nombre $(1 + x)$ suffit pour fixer la valeur du logarithme n d'un autre nombre quelconque $(1 + z)$.

Supposons maintenant $\log.(1 + x) = Mx + Nx^2 + Px^3 + Qx^4 + \&c.$, et $\log.(1 + z) = Mz + Nz^2 + Pz^3 + Qz^4 + \&c.$ Si, en combinant ces équations avec celle ci-dessus $1 + z = (1 + x)^{\frac{n}{m}}$, nous en tirons une valeur des indéterminées $M, N, P, \&c.$; cette valeur, substituée dans la première de ces trois équations, nous mène à la solution du problème.

Or, l'équation $1 + z = (1 + x)^{\frac{n}{m}}$ donne (en faisant, pour plus de simplicité, $\frac{n}{m} = r$), $\log.(1 + z) = r \log.(1 + x)$. Donc $Mz + Nz^2 + Pz^3 + \&c. = r(Mx + Nx^2 + Px^3 + \&c.)$. Prenons la valeur de z dans l'équation $1 + z = (1 + x)^r$, en développant le dernier binôme par la formule de Newton; ce qui

donne $z = rx + \frac{r(r-1)}{2} x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{2 \cdot 3} x^3 + \&c.$ Substituant cette valeur de z dans l'équation $Mz + Nz^2 + \&c. = r(Mx + Nx^2 + \&c.)$, divisant par r , transportant d'un seul côté tous les termes, et les ordonnant par rapport à x , on aura

$$0 = \left\{ \begin{array}{llll} Mx + M \frac{r-1}{2} x^2 + M \frac{(r-1)(r-2)}{2 \cdot 3} x^3 + M \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \&c. & & & \\ + Nr & + Nr(r-1) & + N \frac{r(r-1)(r-2)}{3} & + \&c. & \\ & & + N \frac{r(r-1)^2}{4} & + \&c. & \\ & + Pr^2 & + 3P \frac{r^2(r-1)}{2} & + \&c. & \\ & & + Qr^3 & + \&c. & \\ -M - N & -P & -Q & -\&c. & \end{array} \right.$$

Égalant ensuite à zéro chaque colonne verticale, selon les principes exposés (148), on a 1°. $M - M = 0$; ce qui ne donne aucune valeur pour M ; 2°. $M \frac{r-1}{2} + Nr - N = 0$; d'où l'on tire $N = -\frac{1}{2} M$. En substituant cette valeur de N , la troisième colonne donne $P = \frac{1}{3} M$; de même la quatrième donne $Q = -\frac{1}{4} M$; en continuant l'opération, on auroit $R = \frac{1}{5} M$, et ainsi de suite. Donc en substituant ces valeurs de $N, P, Q, \&c.$ dans l'équation $\log.(1+x) = Mx + Nx^2 + \&c.$, on aura la suivante :

$$(A) \dots \log.(1+x) = M \left(x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \&c. \right)$$

171. Observons d'abord qu'un même nombre tel que $(1+x)$ peut avoir une infinité de logarithmes différents, selon la valeur différente qu'on voudra donner à l'indéterminée M qui, par cette raison, se nomme *le module*. Le système le plus simple est celui dans lequel on suppose $M = 1$: les logarithmes calculés dans cette supposition, se nomment logarithmes *naturels*, ou logarithmes *hyperboliques*, à cause de leur usage dans la quadrature de l'hyperbole.

172. Observons encore que pour avoir le logarithme de 1, il faut faire $x = 0$. Mais, dans ce cas, le second membre de l'équation

l'équation (A) se réduit à zéro; donc, dans tous les systèmes imaginables, $\log. 1 = 0$.

173. Si on appelle I le logarithme hyperbolique d'un nombre quelconque, T le logarithme du même nombre dans un autre système, et S la somme de la série $(x - \frac{1}{2}x^2 + \&c.)$; on aura $I = S$, et $T = MS = MI$. Donc en multipliant le logarithme hyperbolique d'un nombre par le module d'un autre système, on aura le logarithme du même nombre pour ce système.

On a aussi $I = \frac{T}{M}$; donc, en divisant un logarithme d'un système quelconque par le module de ce système, on aura le logarithme hyperbolique correspondant.

174. On ne voit pas d'abord comment l'équation (A) peut donner le log. d'un nombre quelconque; car la série est, à la vérité, convergente si on fait $x < 1$ ou $x = 1$; mais si l'on augmente cette valeur, il n'est pas même besoin de la doubler pour que la série devienne divergente. Pour remédier à cet inconvénient, appliquons à la recherche du log. de $(1 - x)$ toutes les opérations que nous avons faites pour avoir celui de $(1 + x)$, et nous trouverons

$$(B) \dots \log.(1 - x) = M (-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \&c.)$$

Or si l'on soustrait de l'équation (A) l'équation (B), et qu'on réfléchisse que, selon les règles ordinaires du calcul des logarithmes, $\log.(1 + x) - \log.(1 - x) = \log. \frac{1+x}{1-x}$, on aura

$$(C) \dots \log. \frac{1+x}{1-x} = 2M (x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \&c.)$$

Qu'on veuille donc, par exemple, le log. hyperbolique de 2; en résolvant l'équation $\frac{1+x}{1-x} = 2$, on trouvera $x = \frac{1}{3}$, et par conséquent, en se rappelant que $M = 1$, (171),

$$\log. 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \&c. \right)$$

Il est aisé de reconnoître que cette série est, sans comparaison, plus convergente que si on faisoit $x = 1$ dans l'équation (A). Mais

avant de nous occuper des applications, achevons la préparation des formules.

175. La différentiation des logarithmes pour toutes sortes de différences finies, se trouve facilement par le moyen des formules précédentes. Si un nombre quelconque n reçoit un accroissement δn , on demande quelle est l'augmentation correspondante du log. de n : cette valeur sera donnée par l'équation $\log. n + \delta \log. n = \log. (n + \delta n)$, de laquelle on tire $\delta \log. n = \log. (n + \delta n) - \log. n = \log. \frac{n + \delta n}{n} = \log. \left(1 + \frac{\delta n}{n}\right)$. Si on réduit cette dernière expression en série par le moyen de la formule (A), en faisant $x = \frac{\delta n}{n}$, on aura

$$(D) \dots \delta \log. n = M \left(\frac{\delta n}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta n}{n} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\delta n}{n} \right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{\delta n}{n} \right)^4 + \&c. \right)$$

Et c'est la formule différentielle que l'on donne ordinairement, et dont on prend seulement le premier terme $\frac{\delta n}{n}$ pour les différences infiniment petites.

Si n diminue au lieu de croître, son logarithme doit aussi diminuer. Alors on a $\log. (n - \delta n) - \log. n = -\delta \log. n$. Le premier membre se réduit à $\log. \left(1 - \frac{\delta n}{n}\right)$; et au moyen de la formule (B), on a

$$(E) \dots -\delta \log. n = M \left(-\frac{\delta n}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta n}{n} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\delta n}{n} \right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{\delta n}{n} \right)^4 - \&c. \right)$$

Mais nous allons donner des formules nouvelles, beaucoup plus convergentes, et qui pourront avec avantage remplacer toutes les précédentes.

Faisons $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+\delta n}{n}$; d'où l'on tire $x = \frac{\delta n}{2n+\delta n}$. En substituant ces valeurs dans l'équation (C), et mettant, comme ci-dessus, $\delta \log. n$ au lieu de $\log. \frac{n+\delta n}{n}$, on aura

$$(F) \dots \delta \log. n = 2M \left(\frac{\delta n}{2n+\delta n} + \frac{1}{3} \left(\frac{\delta n}{2n+\delta n} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{\delta n}{2n+\delta n} \right)^5 + \&c. \right)$$

Cette série est, sans comparaison, plus convergente que la série (D) pour calculer la différence d'un logarithme connu à un autre plus grand. Et si on part de la supposition que $\log. n = \log. 1 = 0$, (172), cette même série (F) sera aussi convergente que la série (C), pour calculer *immédiatement* le logarithme entier d'un nombre quelconque.

Quand δn est négatif, comme il en est de même de $\delta \log. n$, l'équation (F) se change en celle-ci :

$$(G) \dots - \delta \log. n = 2M \left(-\frac{\delta n}{2n - \delta n} - \frac{1}{3} \left(\frac{\delta n}{2n - \delta n} \right)^3 - \frac{1}{5} \left(\frac{\delta n}{2n - \delta n} \right)^5 - \&c. \right)$$

C'est aussi ce qu'on auroit trouvé en retranchant l'équation (A) de l'équation (B), et faisant $\frac{1-x}{1+x} = \frac{n-\delta n}{n}$.

Cette série est de même bien plus convergente que la série (E) pour calculer la différence en moins d'un logarithme connu à un autre plus petit. Si on part de la supposition que $\log. n = \log. 1$, on pourra calculer immédiatement par la série (G) le logarithme entier négatif (164, 165) d'une fraction décimale quelconque.

Faisons actuellement un premier usage de ces deux formules (F), (G) qui sont d'une utilité aussi grande que générale.

176. Puisque la formule (F) donne la différence de $\log. n$ à $\log. (n + \delta n)$, cette formule serviroit à construire avec beaucoup de promptitude une table des logarithmes des nombres. Par exemple, ayant trouvé (174) une série expéditive pour calculer le log. hyperbolique de 2, (la formule (F) donneroit la même série en faisant $n = 1$ et $\delta n = 1$), on a aussi le log. de 4, puisque $\log. 4 = \log. 2^2 = 2 \log. 2$. Ayant le log. de 4, on calculera en peu de minutes le log. de 5, qui a coûté plusieurs jours du travail le plus fastidieux aux premiers constructeurs des logarithmes, parcequ'ils ne connoissoient aucune des formules précédentes. Dans ce cas-ci $n = 4$, $\delta n = 1$, et par conséquent l'équation (F) devient

$$\delta \log. 4 = 2 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \&c. \right)$$

Quatre termes de cette série suffisent pour obtenir la quantité qu'il faut ajouter au log. de 4 pour avoir le log. hyperbolique de 5 avec sept décimales exactes. Ce log. de 5 ajouté à celui de 2 donne $\log. 10 = 2,302585 +$.

177. Il est facile actuellement de connoître le module des logarithmes *vulgaires*, c'est-à-dire des logarithmes des tables ordinaires. On sait que dans ce système $\log. 10 = 1$; donc si dans l'équation $T = MI$, (173), on fait $T = 1$, I étant le log. hyperbolique de 10, dont nous venons de trouver la valeur qui, approchée jusqu'à 25 décimales, est $2,3025850929940456840179914 = \frac{1}{M}$; on aura $M = 0,4342944819032518276511289$. En multipliant par ce nombre un log. hyperbolique quelconque, on a le log. vulgaire correspondant (173) ; en multipliant par le nombre précédent, c'est-à-dire par la valeur de I ou de $\frac{1}{M}$, un logarithme vulgaire quelconque, on aura le log. hyperbolique correspondant.

178. On nomme *base* d'un système de logarithmes le nombre dont le log. est 1. En effet, dans l'équation fondamentale $a^m = 1 + x$, nous avons fait $m = \log.(1 + x)$; mais on a aussi $m \log. a = \log.(1 + x)$; donc $\log. a = 1$. Ainsi 10 est la base du système ordinaire ou du système de Briggs, qui le premier calcula les tables ordinaires. Nous trouverons (179) la base des log. hyperboliques ou du système de Neper. Celui de Briggs paroît être le plus commode qu'on puisse adopter, parcequ'au moyen d'un changement facile dans la seule caractéristique, le log. d'un nombre sert constamment au même nombre quoique multiplié ou divisé par une puissance quelconque de 10. Par exemple nous savons (164) que le log. de 2 est aussi celui de 20, de 2000, de 0,02, &c., pourvu seulement qu'on augmente ou qu'on diminue convenablement la caractéristique. Les logarithmes hyperboliques n'ont pas un pareil avantage.

179. *Étant donné un logarithme, trouver le nombre auquel il correspond.* Ce problème se résout facilement en divisant par M

l'équation (A), (170), et la convertissant ensuite par la méthode du retour des séries, (148). Soit donc $(1+x)$ le nombre cherché, et faisons, pour abrégér, $\frac{\log.(1+x)}{M} = y$; l'équation (A) convertie donnera $x = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{2.3} + \frac{y^4}{2.3.4} + \&c.$, et par conséquent le nombre cherché $(1+x) = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \&c.$ Donc en général pour un nombre quelconque n , on aura

$$(H) \dots n = 1 + \left(\frac{\log.n}{M}\right)^1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\log.n}{M}\right)^2 + \frac{1}{2.3} \left(\frac{\log.n}{M}\right)^3 + \frac{1}{2.3.4} \left(\frac{\log.n}{M}\right)^4 + \&c.$$

Si dans cette série on suppose $\log.n = 1$ et $M = 1$, la valeur de n sera (178) la base des log. hyperboliques. On a donc $n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \&c.$, ou, en réduisant, $n = 2,71828182845904523536028$. Ce nombre est d'un grand usage dans le calcul intégral.

180. En comparant la formule (D) avec la formule générale (P), (148), on a $\frac{\delta \log.n}{M} = m$, $\delta n = y$, $\frac{1}{n} = a$, $-\frac{1}{2n^2} = b$, et ainsi de suite. Avec ces valeurs de $a, b, c, \&c.$, on trouvera celles de $A, B, C, \&c.$ dans la formule (Q), (148), et la série (D) convertie deviendra

$$(K) \dots \delta n = n \left(\frac{\delta \log.n}{M} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta \log.n}{M} \right)^2 + \frac{1}{2.3} \left(\frac{\delta \log.n}{M} \right)^3 + \&c. \right)$$

En convertissant de la même manière l'équation (E), mais faisant bien attention aux signes, puisque dans ce cas $m = -\frac{\delta \log.n}{M}$, $y = -\delta n$, les coefficients $a, b, c, \&c.$ conservant les mêmes signes que dans l'opération précédente, on trouvera

$$(L) \dots -\delta n = n \left(-\frac{\delta \log.n}{M} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta \log.n}{M} \right)^2 - \frac{1}{2.3} \left(\frac{\delta \log.n}{M} \right)^3 + \&c. \right)$$

Cette formule peut aussi se déduire sur-le-champ de la précédente (K), en considérant que quand δn est négatif, c'est-à-dire quand on passe d'un nombre plus grand à un plus petit, $\delta \log.n$ doit être aussi négatif; mais alors il faut que $\delta \log.n$ change de signe dans les puissances paires, selon les premières règles de l'Algebre.

181. La construction des formules terminée, il sera utile de préparer, comme je l'ai enseigné (151), les facteurs M et $\frac{1}{M}$, dont on a un besoin continuel pour passer des log. hyperboliques aux log. vulgaires, et *vice versa*.

En prenant les valeurs (177), on a donc

$M =$	0,43429	44819	03251	82765	11289
$2M =$	0,86858	89638	06503	65530	22578
$3M =$	1,30288	34457	09755	48295	33867
$4M =$	1,73717	79276	13007	31060	45156
$5M =$	2,17147	24095	16259	13825	56445
$6M =$	2,60576	68914	19510	96590	67734
$7M =$	3,04006	13733	22762	79355	79023
$8M =$	3,47435	58552	26014	62120	90312
$9M =$	3,90865	03371	29266	44886	01601

182. De même

$\frac{1}{M} =$	2,30258	50929	94045	68401	79914
$\frac{2}{M} =$	4,60517	01859	88091	36803	59828
$\frac{3}{M} =$	6,90775	52789	82137	05205	39742
$\frac{4}{M} =$	9,21034	03719	76182	73607	19656
$\frac{5}{M} =$	11,51292	54649	70228	42008	99570
$\frac{6}{M} =$	13,81551	05579	64274	10410	79484
$\frac{7}{M} =$	16,11809	56509	58319	78812	59398
$\frac{8}{M} =$	18,42068	07439	52365	47214	39312
$\frac{9}{M} =$	20,72326	58369	46411	15616	19226

183. Au moyen de ces préparations, la conversion des log. tabulaires en log. hyperboliques, et réciproquement, se réduit à de simples additions. Si on cherche par exemple le log. hyperbolique de 10,09; qu'on prenne le log. vulgaire correspondant (avec huit décimales, s'il se peut, pour avoir la septième plus

exacte) ; ce log. est 1,00389117 : en disposant en leur lieu les produits de $\frac{1}{M}$ par chacun des chiffres qui composent ce logarithme, on aura

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{M} = 2,30258509 \\
 \frac{0,003}{M} = 690776 \\
 \frac{0,0008}{M} = 184207 \\
 \text{\&c.} \quad 20723 \\
 \quad 230 \\
 \quad 23 \\
 \quad 16
 \end{array}$$

$$\text{Somme } 2,3115448 = \log. 10,09.$$

Cette opération est si abrégée, que quelquefois même on pourroit la préférer pour la formation des logarith. des nombres composés. Au surplus M. Lambert a donné dans l'Ouvrage cité (146), une table des nombres premiers, et une autre table non moins utile, qui contient le plus petit facteur de chacun des nombres composés jusqu'à 100000. Or connoissant les facteurs d'un nombre, on sait qu'en sommant leurs logarithmes, on a celui de ce nombre.

184. Observons ici, en nous servant du même exemple, combien est convergente la formule (F), (175). Il suffit de calculer seulement le premier terme de la série pour avoir exactement, avec 7 et même 8 décimales, la quantité qu'il faut ajouter à 2,3105532, logarithme de 10,08, pour former le log. de 10,09. Dans ce cas $n = 10,08$, et $\delta n = 0,01$; donc en prenant seulement le premier terme de la série, (car le second auroit neuf zéros après la virgule, et ne pourroit par conséquent influer sur les sept premières décimales), on aura

$$\delta \log. n = 2 \times \frac{0,01}{20,17} = 0,0009916$$

$$\log. 10,08 = 2,3105532$$

$$\text{Total ou } \log. 10,09 = 2,3115448$$

Nous répéterons encore une fois que dans tous les calculs d'approximation, quand on veut se servir d'une quantité trouvée pour en calculer une autre, de celle-ci passer à une troisième, et ainsi de suite, il faut faire les calculs avec une, deux, trois, &c. décimales, suivant les cas, de plus que l'on ne desire d'en avoir qui soient exactes; autrement l'erreur des décimales négligées pourroit s'accumuler et s'étendre sur les dernières décimales conservées.

185. Le log. de 10 étant connu (177), plus de difficulté sur la divergence (174) de la série (A), puisqu'il devient facile de la rendre convergente, même pour les nombres les plus grands. Qu'on demande, par exemple, le log. hyperbolique de 12389. Il est clair que $12389 = 1,2389 \times 10000 = 1,2389 \times 10^4$. Donc $\log. 12389 = 4 \log. 10 + \log. 1,2389$. En faisant $x = 0,2389$, la série (A) sera convergente, et donnera un logarithme qui, ajouté à $4 \log. 10$, produira celui qu'on cherchoit.

Si au lieu de 12389, le nombre donné étoit 0,12389, on auroit $\log. 0,12389 = \log. \frac{1,2389}{10} = \log. 1,2389 - \log. 10$. De même à 0,0012389 on substituerait $\frac{1,2389}{1000}$; il en seroit ainsi de tous les cas semblables. Nous prévenons seulement qu'ici le log. le plus grand étant négatif, il faut soustraire le plus petit du plus grand, et écrire le reste avec le signe négatif, selon la règle ordinaire. Car par les raisons indiquées (178), on ne peut appliquer aux log. hyperboliques des fractions l'expédient adopté (165) pour les log. vulgaires.

186. Mais la série (F), en traitant de même le nombre donné, est dans tous les cas bien préférable à la série (A), pour calculer immédiatement le logarithme d'un nombre quelconque. En effet, en réduisant le nombre 12389 à la forme 1,2389, et faisant $n = 1$, on aura $\delta n = 0,2389$. Avec ces valeurs, on n'aura à calculer que trois termes de la série (F) pour former avec sept décimales exactes le log. cherché, tandis qu'il faudroit calculer au moins huit termes de la série (A) pour arriver au même but.

187. Plus le premier chiffre du nombre donné surpasse l'unité, moins la formule (F) est convergente pour calculer immédiatement le logarithme de ce nombre. Si on demande, par exemple, le log. de $3,412$; en écrivant $3,412 \times 1000$, comme $n = 1$, on aura $\delta n = 2,412$ et $\frac{\delta n}{2n + \delta n} = \frac{2,412}{4,412}$, fraction beaucoup plus grande que la fraction $\frac{0,2389}{2,2389}$ qu'on auroit eue par la même série dans le cas de l'article précédent.

Faisons donc $3,412 = 0,3412 \times 10000$, et essayons la formule (G) dans le cas dont il s'agit. Puisque (175), $-\delta \log. n = \log. (n - \delta n) - \log. n = \log. (n - \delta n)$, lorsque $n = 1$, (172); en faisant $(n - \delta n)$ ou $1 - \delta n = 0,3412$, on aura $\delta n = 0,6588$, et $\frac{\delta n}{2n - \delta n} = \frac{0,6588}{1,3412}$, fraction un peu plus petite que $\frac{2,412}{4,412}$. Donc il vaudra mieux, dans ce cas, employer la formule (G) que la formule (F):

188. Nous avons vu (185, 187), qu'en multipliant ou divisant par les puissances de 10, on peut réduire un nombre quelconque à n'avoir qu'un chiffre, ou à n'en avoir aucun avant la virgule. Si on le réduit à la première forme, on trouve immédiatement son log. entier par le moyen de la formule (F); et si c'est à la seconde, par le moyen de la formule (G). Il reste seulement à établir une règle précise qui apprenne à laquelle des deux il sera plus avantageux de recourir, selon les différents cas; problème que nous allons résoudre.

Il est clair que la plus convergente de ces deux séries sera celle qui, dans le calcul du log. d'un nombre donné, aura pour premier terme une moindre fraction. Soit donc en général z le nombre dont on cherche le logarithme; l'égalité de convergence des deux séries aura lieu lorsque z sera tel que, par les substitutions convenables, le premier terme soit de même valeur dans l'une et dans l'autre; bien entendu que si l'on se sert de la formule (F), z est un nombre réduit de manière à n'avoir qu'un chiffre avant la virgule; et que

ce nombre sera $\frac{z}{10}$, c'est-à-dire qu'il n'aura point de chiffres avant la virgule, si l'on cherche son log. par la formule (G). Cela posé, si, pour plus de clarté, l'on suit de l'œil l'exemple (187), en y mettant z au lieu de 3,412, on verra que pour la formule (F), $\frac{\delta n}{2n + \delta n} = \frac{z-1}{2+z-1} = \frac{z-1}{z+1}$; et qu'en écrivant de même $\frac{z}{10}$ au lieu de 0,3412, on a pour la formule (G), $\frac{\delta n}{2n - \delta n} = \frac{1 - \frac{1}{10}z}{2 - (1 - \frac{1}{10}z)} = \frac{10-z}{10+z}$. Donc dans le cas de valeur égale, on a $\frac{z-1}{z+1} = \frac{10-z}{10+z}$. En résolvant cette équation, on trouve $z = \sqrt{10} = 3,1622776 +$; et selon qu'on donnera à z une valeur ou plus grande ou moindre, on aura $\frac{z-1}{z+1}$ ou plus grand ou moindre que $\frac{10-z}{10+z}$. Donc toutes les fois qu'un nombre donné, réduit à n'avoir qu'un chiffre avant la virgule, sera moindre que 3,16 +, il sera mieux de chercher son log. par la formule (F), et au contraire par la formule (G), si ce nombre excède 3,16 +.

Un log. étant connu, si on veut de celui-là passer à un autre, ces formules employées comme on l'a fait (176, 184), et comme on verra (189), seront d'autant plus convergentes, que le nombre n , dont on connoît le log., sera plus grand, et que δn sera plus petit.

189. Puisqu'avec les formules (F) et (G) on peut calculer immédiatement le logarithme d'un nombre quelconque, elles serviront donc aussi à calculer le log. de toute ligne trigonométrique, connue d'abord en nombres naturels. (Par *logarithme* nous entendrons toujours à l'avenir le logarithme vulgaire, les log. hyperboliques n'étant d'aucun usage dans la trigonométrie).

Si l'on veut donc construire des tables avec plus de décimales que n'en contiennent celles que l'on a, voici la méthode qui me semble la plus prompte. Calculons d'abord le log. du cosinus de 26° , l'un des plus avantageux pour avoir la formule (G) convergente, et en même temps pour avoir dans le diviseur un nombre de chiffres qui surpasse peu celui des chiffres du dividende; ce qui

ajoute à l'exactitude du quotient. Nous ferons l'opération avec peu de décimales; mais elle guidera pour faire le calcul avec autant de chiffres qu'on le voudra. J'ai par les tables $\cos. 26^\circ = 0,898794 = 1 - 0,101206$. Soit $n = 1$ et $\delta n = 0,101206$; on aura (187), $-\delta \log. n = \log. (1 - \delta n)$, log. cherché. En déterminant sa valeur par la série (G), on a

$$\begin{aligned} - \frac{\delta n}{2n - \delta n} &= - \frac{0,101206}{1,898794} = - 0,05330015 \\ - \frac{1}{3} \left(\frac{\delta n}{2n - \delta n} \right)^3 &= \dots - 0,00005047 \\ - \frac{1}{5} \left(\frac{\delta n}{2n - \delta n} \right)^5 &= \dots - 0,00000008 \\ \text{Total} &= 0,0533507 \end{aligned}$$

Il faut multiplier la somme des termes par $2M$; or 1°. le double de la somme est $- 0,1067014$; 2°. je prends (181) les produits correspondants aux chiffres qui forment cette somme ainsi doublée; et je les écris comme il suit :

$$\begin{array}{r} 0,04342945 \\ \quad 260577 \\ \quad \quad 30401 \\ \quad \quad \quad 43 \\ \quad \quad \quad \quad 17 \\ \hline \text{Total} = 0,04633983 \end{array}$$

Que l'on convertisse en positif (165) ce logarithme négatif, et on aura $10 - 0,0463398 = 9,9536602$. Tel est dans les tables le log. du cos. de 26° .

En déterminant ainsi quelques logarithmes par intervalles, par exemple de cinq en cinq degrés, plus ou moins, selon qu'il paraîtra nécessaire pour l'exactitude, on formera ensuite successivement, par une opération rapide, tous les log. intermédiaires. Qu'on veuille, par exemple, déduire du log. de $\cos. 26^\circ$ celui de $\cos. 26^\circ 1'$, on fera $n = \cos. 26^\circ = 0,898794$, et $\delta n = \cos. 26^\circ - \cos. 26^\circ 1' = 0,0001275$; et par conséquent $\frac{\delta n}{2n - \delta n} = \frac{0,0001275}{1,7974605}$. Observons

M.ij

que le numérateur n'a que quatre chiffres effectifs, tandis que le dénominateur en a huit. Pour faire la division il seroit donc nécessaire d'ajouter des zéros au numérateur; mais on n'auroit pas ainsi la véritable différence entre $\cos.26^\circ$ et $\cos.26^\circ 1'$, puisque si les tables ne donnent les cosinus qu'avec sept décimales, c'est qu'elles négligent celles qu'on auroit au-delà. Or il y a un moyen facile de connoître cette différence avec plus de décimales que n'en donnent les tables, même sans connoître la valeur absolue des deux cosinus. En faisant $B = 26^\circ$, et $\delta B = 1'$, on a (II. 31°), — $\delta \cos.26^\circ = 2 \sin.30'' \sin.26^\circ 0' 30''$. En calculant cette formule avec les log. des tables ordinaires, j'ai

$$\begin{aligned} \log. 2 &= 0,3010300 \\ \log. \sin.30'' &= 6,1626961 \\ \log. \sin.26^\circ 0' 30'' &= 9,6419714 \\ \log. - \delta \cos. B &= \underline{6,1056975} \end{aligned}$$

Ce log., dans les tables des log. des nombres, correspond au nombre 0,000127555; et telle est la différence qu'on auroit trouvée entre $\cos.26^\circ$ et $\cos.26^\circ 1'$, si on eût calculé ces cosinus avec neuf décimales exactes. C'est un exemple de l'utilité des formules (II. 30° à 33°). Au surplus on n'auroit pas besoin de cet expédient pour construire une table, parce qu'alors il est nécessaire de connoître les sinus et cosinus en nombres naturels, avec quelques décimales de plus que l'on n'en veut dans leurs logarithmes (184).

Comme nous n'avons employé que huit décimales dans nos calculs pour trouver le log. de $\cos.26^\circ$, il est inutile d'en employer davantage pour la recherche de la différence entre ce log. et celui de $\cos.26^\circ 1'$. Il suffit donc de faire $\frac{\delta^n}{2n - \delta n} = \frac{0,00012755}{1,79746}$. J'ai dé-

signé par un point dans le dénominateur, le chiffre à compter duquel il suffit de commencer la multiplication par le premier du quotient, en tenant compte seulement des dizaines données par le chiffre voisin 4, ou, si l'on veut, par les deux derniers, 46. On

trouvera pour quotient 0,00007096, dont le double, multiplié par M , donnera

$$- \delta \log. \cos. 26^\circ = - 0,00006163$$

$$9,95366017 = \log. \cos. 26^\circ \text{ avec 8 décimales, comme on l'a calculé.}$$

Différence 9,9535985 = $\log. \cos. 26^\circ 1'$, et c'est ainsi que le donnent les tables.

Donc avec un seul terme de la série (G), (car dans le second la virgule seroit suivie de douze zéros au moins), nous sommes arrivés du $\log.$ connu de $\cos. 26^\circ$ à $\log. \cos. 26^\circ 1'$; on pourroit calculer de même les logarithmes des cosinus des arcs plus grands, de minute en minute; et au moyen de la formule (F), ceux des cosinus des arcs plus petits. Il est donc clair que si, au lieu de construire une table de logarithmes, de minute en minute, on la desiroit de 10" en 10", ou de degré en degré, &c., on pourroit user de la même méthode, pourvu qu'on ne négligeât pas ce que nous avons dit (184).

Si nous avons suggéré de commencer le calcul par un cosinus, c'est que quand on a les logarithmes des cosinus de 0° à 45° , on en déduit tous les autres par de simples soustractions, au moyen de la formule (I. 29°), qui donne $\log. \cos. (45^\circ + \frac{1}{2} A) = \log. \cos. A - \log. 2 - \log. \cos. (45^\circ - \frac{1}{2} A)$.

Après avoir formé les logarithmes des cosinus, et par conséquent des sinus de tout le quart de cercle, on aura promptement ceux des tangentes, au moyen de la formule (I. 31°) qui donne $\log. \tan. A = \log. \sin. A - \log. \cos. A$.

190. J'ai donné des méthodes pour former les logarithmes avec un nombre illimité de décimales; mais comme il semble difficile que vingt décimales ne suffisent pas dans les cas les plus extraordinaires, on trouvera à la fin de cet Ouvrage la table (BB) qui sera d'un grand secours, comme nous le verrons bientôt. Je l'ai tirée de Gardiner, en me bornant aux logarithmes des nombres premiers;

j'y ai ajouté les facteurs de ceux des nombres composés, qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5, parce que ceux qui le sont se distinguent à la première inspection. Il sera facile, par le moyen de cette table, de former au besoin les logarithmes des autres nombres composés. Pour en éprouver l'utilité, cherchons la racine cinquième de 161900, approchée jusqu'à douze décimales. Négligent les deux zéros qui n'influent que sur la caractéristique, nous chercherons d'abord le logarith. de 1619, mais, pour plus de sûreté, avec quatorze décimales : le plus approché que donne la table est celui de 162 ou de 1620. Je fais $n = 1620$, et j'ai $\Delta n = 1$. Donc par la formule (G)

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta n}{2n - \Delta n} &= -\frac{1}{3239} = -0,00030873726459 \\ -\frac{1}{3} \left(\frac{\Delta n}{2n - \Delta n} \right)^3 &= \dots = -0,00000000000981 \\ \text{Total} &= 0,00030873727440 \end{aligned}$$

Le double de cette somme multiplié par M , comme à l'ordinaire, donne

$$\begin{aligned} -\Delta \log. 1620 &= -0,00026816578925 \\ \log. 1620 &= \log. 2 + 4 \log. 3 + \log. 10 = 3,20951501454263 \\ \text{Différence ou } \log. 1619 &= 3,20924684875338 \end{aligned}$$

Ajoutant 2 à la caractéristique, parceque le log. cherché est celui de 161900, et divisant le log. par 5, on aura

$$\log. \sqrt[5]{161900} = 1,04184936975068$$

En cherchant dans les tables ordinaires à quel nombre correspond ce log. considéré dans ses premières décimales, on trouve que le log. le plus approché est celui de 11,01 qu'on a ensuite par la table (BB), comme on va voir.

$$\begin{aligned} \log. \sqrt[5]{161900} &= 1,04184936975068 \\ \log. 11,01 &= \log. 3,67 + \log. 3 = 1,04178731897175 \\ \text{Différence} &= 0,00006205077893 \end{aligned}$$

En appelant $\Delta \log. n$ cette différence, et faisant $n = 11,01$, la

formule (K), (180), donnera la quantité qu'il faut ajouter à 11,01 pour avoir la racine cherchée. La multiplication de la valeur de $\delta \log. n$ par celle de $\frac{1}{M}$, se fera par addition, au moyen de la préparation (182); et on aura

$$\begin{array}{rcl} \frac{\delta \log. n}{M} & = & 0,000\,142\,877\,198\,57 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\delta \log. n}{M} \right)^2 & = & 0,000\,000\,010\,206\,94 \\ \frac{1}{6} \left(\frac{\delta \log. n}{M} \right)^3 & = & 0,000\,000\,000\,000\,49 \\ \hline \text{Total} & & 0,000\,142\,887\,406\,00 \end{array}$$

En multipliant cette somme par n ou par 11,01, on aura

$$\begin{array}{rcl} \delta 11,01 = \delta n & = & 0,001\,573\,190\,340 \\ n & = & 11,01 \end{array}$$

$$\text{Et la somme ou } \sqrt[5]{161900} = 11,011\,573\,190\,340$$

191. Ces calculs sont courts, si on limite, comme nous l'avons fait, chaque opération à 14 décimales. Je crois même qu'avec les moyens abrégés que j'ai donnés, cette méthode est plus expéditive que celle de Halley, dont les formules, qui d'ailleurs ne peuvent donner qu'un nombre limité de décimales exactes, ont été généralisées par M. l'Abbé Marie. J'ai tiré le problème de ce dernier Auteur, qui le résout ainsi, après avoir démontré que $\sqrt[5]{(a^5 - b)} = \frac{3}{4}a + \sqrt{\left(\frac{1}{16}a^2 - \frac{b}{10a^3}\right)}$ à peu près. Soit $161900 = a^5 - b$. On divisera par 5 le log. de 161900 pris dans les tables ordinaires; on aura pour résultat le logarithme de 11,012, racine⁵ approchée de $a^5 - b$. On supposera ce nombre 11,012 égal à a , et l'on élèvera cette valeur supposée de a à la cinquième puissance; ce qui donnera un nombre composé de six chiffres avant la virgule, et de quinze décimales. On nommera b la différence entre ce nombre et le nombre donné 161900. C'est en calculant l'équation ci-dessus avec ces valeurs de a et de b , qu'on trouvera la racine cherchée, et qu'on pourra reconnoître quelle est la méthode la plus courte. Au reste

voici la formule générale de M. l'Abbé Marie, que je donne pour ceux qui la préféreroient : $\sqrt[m]{(a^m \pm b)} = \frac{m-2}{m-1} a + \sqrt{\frac{a^2}{(m-1)^2} + \frac{2b}{(m^2-m)a^{m-2}}}$, valeur qui n'est qu'approchée.

192. Après avoir vu l'usage qu'on peut faire de nos formules, ainsi que de la table (BB), pour l'extraction des racines, on pourra facilement en faire l'application à la recherche des logarithmes des lignes trigonométriques ou d'un nombre quelconque. Qu'on demande, par exemple, avec vingt décimales, le logarithme de l'arc de 1'', dont nous aurons besoin par la suite. Je prends, avec vingt-deux chiffres, la valeur de cet arc dans la table (AA); puis j'observe qu'en séparant les quatre premiers chiffres à gauche, et les considérant, pour plus de commodité, comme un nombre entier, je puis en avoir le logarithme par la table (BB), puisque $\log. 4848 = \log. 3 + 4 \log. 2 + \log. 101$. Soit donc $4848 = n$, et appellons Δn les dix-huit chiffres qui suivent; nous aurons, en négligeant dans le dénominateur les décimales inutiles pour la division,

$$\frac{\Delta n}{2n + \Delta n} = \frac{0, 136\ 811\ 095\ 359\ 935\ 899}{9696, 136\ 811\ 095\ 359\ 9}$$

En calculant seulement ce terme et le second, de la série (F), et multipliant par $2M$, on aura

$$\Delta \log. n = 0, 00001\ 22556\ 65310\ 72710.$$

Ajoutant à cette quantité $\log. 3$, $4 \log. 2$ et $\log. 101$, on trouvera, en prenant 4 pour caractéristique (165), attendu que dans la valeur de l'arc de 1'', la virgule est suivie de cinq zéros,

$$\log. 1'' = 4, 68557\ 48668\ 23540\ 51953.$$

Sans le secours de la table (BB), ce logarithme auroit exigé le calcul de vingt termes de la formule (G), employée comme on l'a vu (187, 188).

193. Nous avons fait usage, dans l'exemple (190), de la formule (K). Quand le log. donné est plus petit que le log. approché pris dans la table, alors il faut se servir de la formule (L), qui donne

donne la différence que l'on doit soustraire du nombre correspondant au logarithme plus grand, pour avoir le nombre correspondant au logarithme plus petit. Le premier de ces nombres est, dans ce cas, celui qu'on appelle *n*.

Comme les tables de logarithmes sont toujours précédées des instructions nécessaires pour en faire usage, pour trouver les parties proportionnelles, &c., nous nous dispenserons d'en parler.

Les logarithmes à sept décimales des tables ordinaires ne suffisent pas pour donner avec exactitude les secondes et les dixièmes de secondes pour les cosinus, depuis 0° jusqu'à 15° environ. Lorsqu'on désirera une pareille précision, on pourra l'obtenir pour les cosinus entre 5° et 15° , en faisant les calculs en nombres naturels, et se servant des tables de cette espèce. Si le cosinus donné répond à un arc moindre que de 5° , ou qu'on veuille faire usage des logarithmes, il faudra les former et les employer avec autant de décimales qu'on le croira nécessaire; et alors pour trouver à quel arc correspond le logarithme d'un cosinus, on calculera d'abord, par l'une des formules (H), (K), (L), le nombre auquel répond le logarithme donné; puis, par les méthodes enseignées (161), l'arc auquel répond ce nombre lui-même. Au surplus nous chercherons des expédients pour éviter ces cosinus, autant qu'il sera possible, dans l'usage des formules pour la résolution des triangles.

194. Le calcul par logarithmes, très expéditif de sa nature, le devient encore davantage par l'usage du *Complément arithmétique*, opération qui transforme la soustraction en addition, ainsi qu'il suit. Que l'on ait à retrancher 579 de 895; il est clair que $895 - 579 = 895 + 1000 - 579 - 1000 = 895 + 421 - 1000 = 316$. Je puis donc, au lieu de retrancher 579 de 895, ajouter 421 à ce dernier nombre, ce qui me donnera pour somme 1316, pourvu que dans la somme je supprime une unité du même ordre que celle dont cette somme s'est accrue par l'opération. Dans notre exemple cet ordre est celui des unités de mille; il faut donc supprimer une unité de mille dans la somme 1316, et nous aurons

$316 = 895 - 579$. Actuellement si l'on compare 421 à 579, on trouve que 4 et 2 sont la différence ou le complément de 5 et de 7 à 9, et que 1 est le complément de 9 à 10. Donc *pour opérer par le COMPLÉMENT ARITHMÉTIQUE, il faut, au lieu du nombre qu'on doit soustraire, écrire le complément à 9 de chacun de ses chiffres, excepté le dernier à droite, dont on écrira le complément à 10 : faire ensuite l'addition, et supprimer dans la somme une unité du même ordre que celle dont cette somme a été augmentée par cette opération.* Cette suppression ne cause aucun embarras dans les calculs par logarithmes, parcequ'elle tombe toujours sur les dixaines de la caractéristique, qu'on omet déjà par la règle donnée (166). Par le *dernier* chiffre, on entend le dernier effectif; car les zéros qui seroient à la fin du nombre à soustraire, s'écrieroient tels qu'ils sont; mais on écrira 9 au lieu de chacun de ceux qui se trouveront entre les chiffres effectifs. Au premier aspect tout cela paroît devoir embarrasser le calcul plutôt que le faciliter; mais la pratique fera reconnoître l'avantage de l'emploi du complément arithmétique. Nous en ferons un usage continuel dans nos exemples. Pour le moment il suffit de dire que quand on en a l'habitude, il ne coûte pas plus d'écrire, au lieu d'un logarithme, son complément arithmétique, que de copier ce logarithme tel qu'il se trouve dans la table. D'ailleurs si on examine la conversion du log. négatif en logar. positif (165), on verra qu'elle se réduit à prendre le complément du logarithme négatif. Ainsi la cotangente a pour logarithme le complément arithmétique de celui de la tangente, et *vice versa*; puisque (I. 32°), $\log. \text{tang. } A = \log. 1 - \log. \text{cot. } A = -\log. \text{cot. } A$, (172). On en doit dire autant du cosinus et de la sécante (23), et du sinus et de la cosécante (24).

195. Si les logarithmes sont utiles pour les multiplications, les divisions, les élévations aux puissances et les extractions des racines; ils semblent incapables, par leur nature, de se prêter au calcul, quand il s'agit des additions et des soustractions. Il est sans doute à propos de rechercher les expédients les plus commodes pour surmonter cette difficulté.

Soit à calculer une équation de cette forme , $x = ab + cd$, dans laquelle ab et cd représentent deux termes composés chacun de facteurs et de diviseurs monomes , quels que soient leur nature et leur nombre ; le moyen le plus court pour trouver la valeur de x , en calculant l'équation par logarithmes, est en général de chercher le nombre correspondant à $\log.ab = \log.a + \log.b$, et de la même manière le nombre correspondant à $\log.cd$; ensuite de prendre la somme de ces deux nombres.

196. Mais si , par exemple , x est une ligne trigonométrique ; pour trouver à quel arc elle répond , il est plus avantageux de se servir des tables trigonométriques en logarithmes que des tables en nombres naturels. Car dans les premières , à cause de leur usage bien plus fréquent , on a inséré les différences entre les logarithmes contigus , et par ces différences on trouve promptement les secondes , dixièmes , &c. ; avantage que n'ont pas les tables trigonométriques en nombres naturels. Par la même raison , si ab ou si ab et cd étoient des lignes trigonométriques , il seroit à désirer de n'avoir pas à les chercher dans ces dernières tables , et de pouvoir résoudre l'équation par les logarithmes.

Nous donnerons donc deux moyens pour trouver le log. de l'inconnue , en résolvant l'équation proposée.

197. J'écris l'équation comme il suit : $x = ab \left(1 + \frac{cd}{ab} \right)$; je prends le nombre correspondant à $\log. \frac{cd}{ab}$; j'y ajoute l'unité , et j'ai ainsi le nombre $\left(1 + \frac{cd}{ab} \right)$, dont je prends le log. , auquel j'ajoute celui de ab déjà trouvé en calculant $\log. \frac{cd}{ab}$; la somme est $\log.x$.

198. Le second moyen n'est pas moins général , et il a l'avantage particulier de dispenser de l'usage de la table des logarithmes des nombres , lorsque toutes les quantités contenues dans l'équation sont des lignes trigonométriques. Je prends dans l'équation réduite (197) le binôme $1 + \frac{cd}{ab}$, et je le compare avec le second

membre de l'équation $\frac{1}{\cos.^2 A} = 1 + \text{tang.}^2 A$, (I. 19°). Si donc je suppose $\frac{cd}{ab} = \text{tang.}^2 A$, supposition qu'on ne peut contester, puisqu'une tangente peut avoir (34, 41) toutes les valeurs imaginables; j'aurai $1 + \frac{cd}{ab} = \frac{1}{\cos.^2 A}$, et par conséquent $x = \frac{ab}{\cos.^2 A}$. L'équation $\text{tang.}^2 A = \frac{cd}{ab}$ me donne $\text{tang.} A = \sqrt{\frac{cd}{ab}}$; ayant déterminé par son moyen l'arc A , je prends dans la table le logarithme de $\cos. A$, et je l'emploie dans l'autre équation $x = \frac{ab}{\cos.^2 A}$. Donc en séparant en deux parties l'équation donnée, on peut en faire le calcul par logarithmes avec bien plus de facilité qu'en employant les méthodes données jusqu'à présent par la Caille et autres Auteurs qui, en pareil cas, emploient la formule (II. 18°).

Au lieu de l'équation (I. 19°), on peut prendre indifféremment celle-ci $\frac{1}{\sin.^2 A} = 1 + \cot.^2 A$, (I. 4°); en faisant $\cot. A = \sqrt{\frac{cd}{ab}}$, on aura $x = \frac{ab}{\sin.^2 A}$.

199. Donnons un exemple de ces sortes de transformations. Étant donnés les log. des sinus et des cosinus, et par conséquent (189) des tangentes des deux arcs de 1° et de 2°; cherchons le log. de $\sin. 3^\circ$ par cette formule, $\sin. 3^\circ = \sin. 2^\circ \cos. 1^\circ + \cos. 2^\circ \sin. 1^\circ$, (II. 1°). En la comparant à la formule générale (195), on a $\sin. 3^\circ = x$, $\sin. 2^\circ \cos. 1^\circ = ab$, $\sin. 1^\circ \cos. 2^\circ = cd$. Donc (197) $\sin. 3^\circ = \sin. 2^\circ \cos. 1^\circ \left(1 + \frac{\sin. 1^\circ \cos. 2^\circ}{\sin. 2^\circ \cos. 1^\circ}\right) = \sin. 2^\circ \left(1 + \frac{\text{tang.} 1^\circ}{\text{tang.} 2^\circ}\right) \cos. 1^\circ$, (I. 31°). Par conséquent en faisant, comme ci-dessus (198), $\text{tang.} A = \sqrt{\frac{\text{tang.} 1^\circ}{\text{tang.} 2^\circ}}$, on aura $\sin. 3^\circ = \frac{\sin. 2^\circ \cos. 1^\circ}{\cos.^2 A}$. Calculons par logarithmes les deux dernières équations :

$$\begin{array}{r} \log. \text{tang.} 1^\circ = 8,2419215 \\ \text{(I. 32°), } \log. \cot. 2^\circ = 1,4569162 \\ \hline \text{Total } 9,6988377 \end{array}$$

La moitié de cette somme (167), ou $\log. \text{tang.} A = 9,8494188$. Ce log. répond, dans les tables, à $\text{tang.} 35^\circ 15' 37''$. Il faudroit

actuellement soustraire deux fois le log. du cosinus de cet angle, de la somme de log. sin. 2° et de log. cos. 1° . J'évite ces soustractions en écrivant deux fois, au lieu de log. cos. $35^\circ 15' 37''$, son complément arithmétique, et je n'ai qu'une seule addition à faire.

$$\begin{array}{r} \log. \cos. 1^\circ = 9,9999338 \\ \log. \sin. 2^\circ = 8,5428192 \\ \text{compl. log. cos. } 35^\circ 15' 37'' = 0,0880236 \\ \quad \quad \quad 0,0880236 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Somme ou log. sin. } 3^\circ = 8,7188002$$

Et tel est en effet, dans les tables, le logarithme de ce sinus.

200. Il est bon d'observer que dans ces sortes de calculs il n'est pas nécessaire de chercher l'angle A lui-même. Par exemple dans ce cas-ci, il suffit de connoître le log. de la tangente de cet angle pour déterminer immédiatement celui de son cosinus, seule quantité dont on ait besoin. En effet, que l'on prenne la différence de log. tang. A, c'est-à-dire, dans notre exemple, de 9,8494188, au logarithme le plus voisin dans les tables : ce logarithme est, dans celles de Gardiner, 9,8494323 = log. tang. $35^\circ 15' 40''$; et sa différence à celui de tang. A est 0,0000135. Que l'on prenne aussi, dans ces tables, la différence 447, ou 0,0000447, entre les deux logarithmes les plus proches, en plus et en moins, de log. tang. A. Enfin qu'après avoir pris encore la différence 149 entre les deux logarithmes correspondants des cosinus, on fasse la proportion $447 : 135 :: 149 : x$, et la valeur de x sera celle qu'on doit ajouter dans ce cas à log. cos. $35^\circ 15' 40''$ qui se trouve dans la table, pour avoir le logarithme cherché de cos. A.

201. Si l'équation à calculer avoit cette forme, $x = ab - cd$; en écrivant $x = cd \left(\frac{ab}{cd} - 1 \right)$, le premier moyen indiqué (197) pourra s'y appliquer avec une égale facilité, en retranchant l'unité au lieu de l'ajouter.

202. Quant à la 2^e méthode, on comparera le binôme $\frac{ab}{cd} - 1$

au second membre de l'équation (I. 33^e), $\text{tang.}^2 A = \frac{1}{\cos.^2 A} - 1$.
 En procédant comme on a fait (198), on aura $\cos. A = \sqrt{\frac{cd}{ab}}$,
 et $x = cd \text{ tang.}^2 A$.

203. Si on a $\frac{ab}{cd} < 1$, comme on ne peut avoir $\frac{1}{\cos.^2 A} < 1$,
 parce que le carré $\text{tang.}^2 A$ ne peut être négatif, on ne doit plus
 se servir de la formule (I. 33^e) pour en tirer la quantité de compa-
 raison; mais alors on écrira $x = -cd \left(1 - \frac{ab}{cd}\right)$; et prenant
 l'équation (I. 3^e), $\sin.^2 A = 1 - \cos.^2 A$, on fera $\cos. A = \sqrt{\frac{ab}{cd}}$,
 et on aura $x = -cd \sin.^2 A$.

On peut prendre également l'équation (I. 18^e), $\cos.^2 A = 1 - \sin.^2 A$;
 et faisant $\sin. A = \sqrt{\frac{ab}{cd}}$, on aura $x = -cd \cos.^2 A$.

204. Soit maintenant l'équation générale $y = ab \pm cd \pm ef$.
 (Dans cette équation et dans les équations générales qui suivent;
 le signe double embrasse tous les cas, et la règle donnée (11) n'a
 point ici son application). Je fais $ab \pm cd = x$; je cherche
 $\log. x$ par les moyens que nous venons de donner (197 à 203);
 ensuite par les mêmes voies je résous par logarithmes l'équation
 $y = x \pm ef$.

De cette manière on pourra calculer un polynome quelconque
 par logarithmes.

205. Soit enfin l'équation générale $z = \frac{ab \pm cd \pm ef \pm \&c.}{AB \pm CD \pm EF \pm \&c.}$.
 Réduisez par les règles précédentes le numérateur à un seul loga-
 rithme; faites la même opération pour le dénominateur, et l'équa-
 tion sera résolue par logarithmes.

Et si le second membre est ou en partie ou en entier affecté de
 signes radicaux; si on a, par exemple, $z = \frac{\sqrt[m]{(ab \pm cd \pm ef \pm \&c.)}}{\sqrt[n]{(AB \pm CD) \pm EF \pm \&c.}}$,
 alors $\log. \sqrt[m]{(ab \pm cd \pm ef \pm \&c.)} = \frac{1}{m} \log. (ab \pm cd \pm ef \pm \&c.)$,
 et on a de même $\log. \sqrt[n]{(AB \pm CD) \pm EF \pm \&c.} = \frac{1}{n} \times \log. (AB \pm CD)$. Il ne reste donc qu'à suivre les règles données

pour trouver le logarithme d'un binôme ou d'un polynome, sauf la division convenable par l'exposant du radical.

Mais comme les racines quarrées sont d'un usage fréquent, nous allons donner les formules particulieres dont nous nous servons, et qui nous seront très utiles.

206. Soit donc $x = \sqrt{(p^2 + q^2)}$; on aura (14), $x = p \times \sqrt{\left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right)}$. En comparant ce dernier radical avec $\sqrt{(1 + \text{tang.}^2 A)}$, (I. 19^e), on aura $\text{tang.} A = \frac{q}{p}$, et $x = \frac{p}{\cos. A}$. Par la simplicité de ces équations, on voit que la proposée, $x = \sqrt{(p^2 + q^2)}$, est une de celles auxquelles cette espece de transformation s'applique avec le plus d'avantage.

On trouveroit la même chose en suivant la regle générale (205). Alors $\log. x = \frac{1}{2} \log. (p^2 + q^2) = \frac{1}{2} \log. p^2 \left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right) = \log. p + \frac{1}{2} \log. \left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right)$; et, (198), $\frac{q^2}{p^2} = \text{tang.}^2 A$, ou $\frac{q}{p} = \text{tang.} A$. De même $1 + \frac{q^2}{p^2} = \left(\frac{1}{\cos. A}\right)^2$; donc $\frac{1}{2} \log. \left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right) = \log. \frac{1}{\cos. A}$. Et par conséquent $\log. x = \log. p + \log. \frac{1}{\cos. A}$, ou $x = \frac{p}{\cos. A}$.

En comparant $\sqrt{\left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right)}$ avec $\sqrt{(1 + \cot. A^2)}$, (I. 4^e), on a aussi $\cot. A = \frac{q}{p}$, et $x = \frac{p}{\sin. A}$.

207. Si l'équation étoit de cette forme $x = \sqrt{(p^2 + rst^2)}$, elle se réduiroit à la précédente $x = \sqrt{(p^2 + q^2)}$, en mettant rst^2 au lieu de q^2 ; et on auroit $\text{tang.} A = \frac{t}{p} \sqrt{rs}$ et $x = \frac{p}{\cos. A}$, ou $\cot. A = \frac{t}{p} \sqrt{rs}$ et $x = \frac{p}{\sin. A}$.

208. Soit à présent $x = \sqrt{(p^2 - q^2)}$. Les log. s'appliquent aisément à ce cas, parce qu'alors $x = \sqrt{(p - q)(p + q)}$. Mais si p ou q , ou l'un et l'autre, sont des lignes trigonométriques (196), ou que l'on ait seulement les logarithmes de p et de q , sans avoir leur valeur en nombres naturels, il faut alors recourir à l'une des deux formules (I. 3^e, 18^e); et faisant $x = p \sqrt{\left(1 - \frac{q^2}{p^2}\right)}$, on aura $\frac{q}{p} = \cos. A$ et $x = p \sin. A$, ou $\frac{q}{p} = \sin. A$ et $x = p \cos. A$.

209. Enfin toute expression comparable à l'une quelconque des formules trigonométriques, pourra se résoudre et se calculer par le moyen des tables trigonométriques. Soit par exemple $x = m \times \frac{a+b}{a-b}$. Je fais (9), $x = m \times \frac{1 + \frac{b}{a}}{1 - \frac{b}{a}}$; et comparant cette fraction avec le second membre de la formule (II. 8°), j'ai $\frac{b}{a} = \text{tang. B}$, et $x = m \text{ tang.}(45^\circ + B)$.

Nous voilà en état d'entreprendre la résolution des triangles dans tous les cas.

CHAPITRE VIII.

Résolution des triangles rectilignes rectangles.

Fig. 1. 210. COMME GD est la tangente (7) de l'arc BD décrit du rayon CD, on aura, en procédant comme on a fait (46, 47),

$$CD : DG :: R : \text{tang. C} :: R : \text{cot. CGD};$$

puisque dans un triangle rectangle les deux angles obliques sont compléments l'un de l'autre. Donc *dans tout triangle rectangle un côté est à un autre côté comme le rayon est à la tangente de l'angle opposé à ce second côté, ou comme le rayon est à la cotangente de l'angle adjacent à ce même côté.*

211. On a vu de plus (46) que *dans un triangle rectangle l'hypothénuse est au rayon comme un côté est au sinus de l'angle opposé, ou comme un côté est au cosinus de l'angle adjacent.*

212. On sait encore que *dans tout triangle rectangle le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des deux côtés; en sorte que des trois côtés d'un triangle rectangle, deux étant connus, le troisième se trouvera, soit par l'extraction des racines, soit par les méthodes trigonométriques (206 et 208).*

213. Avec les regles contenues dans les trois articles précédents, il suffit de connoître deux choses, outre l'angle droit, dans un triangle rectangle, pour qu'on puisse trouver la valeur de chacune des trois autres parties de ce triangle. Il faut excepter seulement le cas où les deux choses connues sont les deux angles; car alors le problème est indéterminé, parce qu'il peut évidemment y avoir une infinité de triangles semblables, tels, par exemple, que GCD , ABC ; de sorte que de la connoissance des angles il est impossible de conclure la mesure absolue d'aucun des côtés: on en déduit seulement les rapports qui regnent entre ces côtés, (47).

En appelant A l'angle droit, B et C les deux autres, nous avons rassemblé dans la table suivante toutes les solutions que fournissent les regles (210, 211, 212). Pour les vérifier, on pourra les appliquer au triangle ABC , fig. 1. Mais on doit observer que dans le cas de la dernière formule de cette table, il est souvent à propos de calculer BC de la manière enseignée (206), qui se réduit à chercher d'abord B ou C par la 17^e formule, et ensuite BC par la 2^e, ou par la 4^e, ou par la 6^e, ou par la 8^e.

Si dans les formules 13^e et 15^e de cette même table, le sinus ou le cosinus étoient d'une grandeur telle (193) qu'on ne pût avoir les angles par les tables trigonométriques avec l'exactitude désirée, on auroit recours aux formules (217).

Nous verrons bientôt (223) que ce défaut des tables n'apporte ni incertitude ni erreur dans le calcul des équations, lorsque les grands sinus et cosinus sont dans le second membre, c'est-à-dire dans les quantités connues.

Trois seulement des formules qui suivent dépendent du théorème (212); toutes les autres sont fondées sur cette remarque: Si l'on prend l'hypothénuse pour rayon, chaque angle a pour sinus le côté opposé, pour cosinus le côté adjacent; si on prend un côté pour rayon, l'autre côté est la tangente de l'angle opposé, la cotangente de l'angle adjacent; et alors l'hypothénuse est la sécante du premier de ces angles, la cosécante du second.

*Table pour la résolution d'un triangle rectiligne ABC
rectangle en A.*

DONNÉES. INCONNUES.

FORMULES.

$$AB, B \quad \left\{ \begin{array}{ll} AC \dots\dots & 1^{\circ} \quad AC = AB \times \text{tang.} B \\ BC \dots\dots & 2^{\circ} \quad BC = \frac{AB}{\cos. B} \end{array} \right.$$

$$AB, C \quad \left\{ \begin{array}{ll} AC \dots\dots & 3^{\circ} \quad AC = AB \times \cot. C \\ BC \dots\dots & 4^{\circ} \quad BC = \frac{AB}{\sin. C} \end{array} \right.$$

$$AC, B \quad \left\{ \begin{array}{ll} AB \dots\dots & 5^{\circ} \quad AB = AC \times \cot. B \\ BC \dots\dots & 6^{\circ} \quad BC = \frac{AC}{\sin. B} \end{array} \right.$$

$$AC, C \quad \left\{ \begin{array}{ll} AB \dots\dots & 7^{\circ} \quad AB = AC \times \text{tang.} C \\ BC \dots\dots & 8^{\circ} \quad BC = \frac{AC}{\cos. C} \end{array} \right.$$

$$BC, B \quad \left\{ \begin{array}{ll} AB \dots\dots & 9^{\circ} \quad AB = BC \times \cos. B \\ AC \dots\dots & 10^{\circ} \quad AC = BC \times \sin. B \end{array} \right.$$

$$BC, C \quad \left\{ \begin{array}{ll} AB \dots\dots & 11^{\circ} \quad AB = BC \times \sin. C \\ AC \dots\dots & 12^{\circ} \quad AC = BC \times \cos. C \end{array} \right.$$

$$AB, BC \quad \left\{ \begin{array}{ll} B \text{ ou } C \dots\dots & 13^{\circ} \quad \cos. B = \frac{AB}{BC} = \sin. C \\ AC \dots\dots & 14^{\circ} \quad AC = \sqrt{(BC - AB)(BC + AB)} \end{array} \right.$$

$$AC, BC \quad \left\{ \begin{array}{ll} B \text{ ou } C \dots\dots & 15^{\circ} \quad \sin. B = \frac{AC}{BC} = \cos. C \\ AB \dots\dots & 16^{\circ} \quad AB = \sqrt{(BC - AC)(BC + AC)} \end{array} \right.$$

$$AB, AC \quad \left\{ \begin{array}{ll} B \text{ ou } C \dots\dots & 17^{\circ} \quad \text{tang.} B = \frac{AC}{AB} = \cot. C \\ BC \dots\dots & 18^{\circ} \quad BC = AB \sqrt{\left(1 + \frac{AC^2}{AB^2}\right)} \end{array} \right.$$

214. *Exemples de la résolution d'un triangle rectiligne rectangle.* Soit PO une distance de 752 toises, PC de 439; et soit *Fig. 1.* CPO un angle droit. On demande quelle est la distance OC. On connoît deux côtés et on cherche l'hypothénuse; c'est donc le cas de la 18^e formule, dont voici le calcul, en substituant PO à AB, PC à AC, et OC à BC.

$$\begin{aligned}\log. PC &= 2,642465 \\ \text{compl. log. PO} &= 7,123782\end{aligned}$$

$$\log. \frac{PC}{PO} = 9,766247$$

$$\text{le double de ce log. ou } \log. \left(\frac{PC}{PO} \right)^2 = 9,532494$$

Le nombre correspondant de plus près à ce log. est 0,3408

$$\text{Donc } \log. \left(1 + \frac{PC^2}{PO^2} \right) = \log. 1,3408 = 0,127364$$

$$\text{dont la moitié ou } \log. \sqrt{1 + \frac{PC^2}{PO^2}} = 0,063682$$

$$\text{En y ajoutant } \log. PO = 2,876218$$

$$\text{on a } \log. OC = 2,939900$$

Le nombre correspondant de plus près à ce log. est 870,76. Donc la distance OC est de 870 toises et $\frac{76}{100}$. Telle est la solution géométrique pour laquelle j'ai présenté la formule dans la table, de la manière la plus commode pour le calcul.

Voyons maintenant la solution trigonométrique. Par la 17^e formule, on a $\frac{PC}{PO} = \text{tang. COP}$. Or le log. de $\frac{PC}{PO}$ trouvé ci-dessus, répond à tang. 30° 16' 31", 4. Je cherche le log. de sin. 30° 16' 31", 4; et employant son complément conformément à la formule 6^e, j'ai

$$\text{compl. log. sin. } 30^\circ 16' 31'', 4 = 0,297435$$

$$\log. PC = 2,642465$$

$$\text{Somme ou } \log. OC = 2,939900, \text{ comme ci-dessus.}$$

215. Soit proposé de déterminer par la Trigonométrie la hauteur DK d'une tour, d'un clocher, &c. Mesurez à la toise la distance horizontale DC, du pied de la tour, à un point arbitraire C,

duquel on puisse prendre exactement, au moyen des instruments convenables (294 et suiv.), la mesure de l'angle DCK. Supposons que DC ait été trouvé de 23 toises et $\frac{1}{4}$, et DCK de $50^{\circ} 3'$; on aura par la formule 1^e (213), $DK = 23\frac{1}{4} \times \text{tang. } 50^{\circ} 3'$.

$$\text{Or } \log. 23, 25 = 1, 366423$$

$$\log. \text{tang. } 50^{\circ} 3' = 0, 076956$$

$$\text{Somme ou } \log. DK = 1, 443379 = \log. 27, 7574$$

Donc la hauteur de la tour est, dans ce cas, de $27^{\text{to.}} \frac{76}{100}$ environ.

Ce résultat n'est pas celui que la figure présente à l'œil, puisque DK, dans cette figure, est presque double de CD; mais il faut s'accoutumer à se servir des figures telles qu'on les fait à la plume, sans proportions exactes, et seulement pour se guider dans le calcul. C'est ainsi que nous construirons une figure pour le problème suivant.

216. L'industrie des Navigateurs a trouvé le moyen de mesurer l'espace que parcourt un vaisseau. La boussole leur indique de plus la direction de la route ou l'angle formé par la ligne que suit le vaisseau, avec la ligne méridienne. Je suppose qu'on ait fait cinquante lieues par un même vent et sous un angle de $35^{\circ} \frac{1}{2}$ nord-est, et qu'on demande la position du bâtiment, ou de quelle quantité il s'est avancé, soit au nord soit à l'est. Je commence par décrire

Fig. 4. sur le papier une ligne quelconque NS, que je nomme la méridienne, et dont j'appelle N une extrémité qui est censée indiquer le nord, et S l'autre extrémité qui indique le sud. D'un point pris arbitrairement dans cette ligne, que je nomme B, et duquel je suppose que le vaisseau est parti, je tire une ligne quelconque BC, par laquelle je désigne de même les cinquante lieues parcourues par le vaisseau. Je mene cette ligne du côté N et non du côté S, et à la droite de NS; parceque la direction de la route étoit au nord et à l'est. L'angle CBN représente celui de $35^{\circ} \frac{1}{2}$ nord-est, connu par la boussole. Enfin de l'extrémité C je tire une ligne CA, que je suppose perpendiculaire à NS, et j'ai un triangle BAC censé

rectangle en A, dans lequel, en supposant $BC = 50$ lieues, et $CBA = 35^{\circ}\frac{1}{2}$, il faut déterminer la longueur de AB, qui est la route faite vers le nord, et la longueur de AC, qui est celle vers l'est. Comme j'ai désigné les trois angles du triangle par A, B, C, c'est-à-dire par les lettres dont j'ai fait usage dans la table générale (213), j'ai promptement, sans travail et sans crainte d'équivoque, les formules nécessaires. Les données étant BC et B, et les cherchées AB, AC, j'ai par la 9^e formule, $AB = 50 \cos. 35^{\circ} 30'$, et par la 10^e, $AC = 50 \sin. 35^{\circ} 30'$; ce qui donnera à-peu-près, $AB = 40,7$ lieues, et $AC = 29,035$ lieues.

Cet exemple ainsi détaillé peut servir de règle pour décrire les figures dans tous les cas.

217. Pour trouver un angle exactement, lorsqu'on ne pourra se servir des formules 13^e et 15^e (213), à cause de la grandeur du sinus ou du cosinus, on aura recours, suivant le cas, à l'une des quatre équations suivantes, de l'usage desquelles nous donnerons un exemple (223).

Réduisant en proportion la 2^e formule (213), on a $BC : AB :: 1 : \cos. B$. Donc (10), $BC : BC - AB :: 1 : 1 - \cos. B$
 $:: 1 : (I. 7^{\circ}) \ 2 \sin. \frac{1}{2} B = \frac{BC - AB}{BC}$.

La première proportion donne encore $BC + AB : BC - AB :: 1 + \cos. B : 1 - \cos. B :: (9) \ 1 : \frac{1 - \cos. B}{1 + \cos. B} :: 1 : (I. 42^{\circ})$
 $\text{tang. } \frac{1}{2} B = \frac{BC - AB}{BC + AB}$.

En opérant de la même manière sur la 8^e formule, ou, ce qui revient au même, en mettant B au lieu de C, et C au lieu de B dans les deux équations précédentes, on aura

$$\sin. \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{BC - AC}{2BC}}, \quad \text{et} \quad \text{tang. } \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{BC - AC}{BC + AC}}.$$

218. Il arrive qu'au lieu de connoître la valeur absolue de deux parties d'un triangle rectangle, comme il le faudroit pour résoudre ce triangle par les formules (213), on connoît seulement une partie

et la somme ou la différence de deux autres parties. Nous croyons utile de donner pour ces cas les solutions suivantes.

En multipliant la seconde équation (217) par la 14^e, (213), on a $\text{tang.}^2 \frac{1}{2} B \times AC^2 = (BC - AB)^2$, et par conséquent

$$AC : BC - AB :: 1 : \text{tang.} \frac{1}{2} B.$$

Si au lieu de multiplier on divise, on trouvera

$$AC : BC + AB :: \text{tang.} \frac{1}{2} B : 1.$$

Par ces deux analogies on résoudra le triangle, lorsqu'un angle, et la différence ou la somme de l'hypothénuse et d'un côté seront donnés.

219. La formule 1^e (213) donne $AB : AC :: 1 : \text{tang.} B$. Donc $AB + AC : AB - AC :: 1 + \text{tang.} B : 1 - \text{tang.} B :: 1 : \frac{1 - \text{tang.} B}{1 + \text{tang.} B}$, et par conséquent (II. 8^e)

$$AB + AC : AB - AC :: 1 : \text{tang.}(45^\circ - B).$$

Par cette analogie on résoudra le triangle, lorsqu'un angle et la différence ou la somme des deux côtés seront donnés.

220. La proportion $AB : AC :: 1 : \text{tang.} B$, donne aussi $AB : AB \pm AC :: 1 : 1 \pm \text{tang.} B$. Mais par la 9^e formule (213), $AB = BC \cos. B$. Donc $BC : AB \pm AC :: 1 : \cos. B (1 \pm \text{tang.} B) :: 1 : \cos. B \pm \sin. B$; et par conséquent (II. 7^e)

$$BC : AB \pm AC :: 1 : \sin.(45^\circ \pm B) \sqrt{2}.$$

Par cette analogie on résoudra le triangle, lorsque l'hypothénuse, et la somme ou la différence des côtés seront donnés.

Lorsque $\sin.(45^\circ + B)$ est la quantité cherchée, les tables ne donneront pas avec exactitude l'arc correspondant dans le cas où B sera de près de 45°. Mais alors comme on a (28), $\sin.(45^\circ - B) = \sqrt{1 - \cos.^2(45^\circ - B)} = \sqrt{1 - \sin.^2(45^\circ + B)}$, ce qui donne, en substituant à $\sin.(45^\circ + B)$ sa valeur tirée de l'analogie ci-dessus, $\sin.(45^\circ - B) = \sqrt{\left(1 - \frac{(AB + AC)^2}{2BC^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2BC^2 - (AB + AC)^2}{2BC^2}\right)}$; on aura de cette manière, au lieu de la

valeur de $\sin.(45^\circ + B)$, celle de $\sin.(45^\circ - B)$, et par conséquent celle de B , avec toute la précision désirée. Si la fraction $\frac{(AB + AC)^2}{2 BC^2}$ est peu différente de l'unité, il est à propos de calculer par les nombres naturels, et non par logarithmes, la quantité $2 BC^2 - (AB + AC)^2$, pour l'avoir avec exactitude. Mais ensuite on pourra prendre son logarithme, en soustraire le log. de $2 BC^2$; la moitié du reste sera le log. de $\sin.(45^\circ - B)$.

221. Considérons encore deux cas qui fournissent trois théorèmes utiles.

Soit divisée premièrement l'hypothénuse en deux segments par une perpendiculaire comme AD, tirée de l'angle droit.

Fig. 5.

1°. *Le plus grand segment sera au plus petit, comme le rayon au carré de la tangente du plus petit angle.*

2°. *L'hypothénuse sera à la différence des segments, comme le rayon au sinus de la différence des angles.*

En effet, (210), $AD = BD \times \text{tang.} B = CD \times \text{tang.} C$. Mais $\text{tang.} C = \cot. B = \frac{1}{\text{tang.} B}$. Donc $BD \times \text{tang.}^2 B = CD$, et par conséquent 1°.

$$BD : CD :: 1 : \text{tang.}^2 B.$$

Il est évident que B doit être le plus petit angle, en supposant $BD > CD$; puisque la proportion exige qu'on ait aussi $1 > \text{tang.} B$, c'est-à-dire $B < 45^\circ$, (17).

Cette proportion se transforme ainsi : $BD + CD : BD - CD :: 1 + \text{tang.}^2 B : 1 - \text{tang.}^2 B :: 1 : \frac{1 - \text{tang.}^2 B}{1 + \text{tang.}^2 B} :: 1 : \cos. 2B$, (I. 25^e). Mais $BD + CD = BC$, et $\cos. 2B = \sin.(C - B)$, puisque $C = 90^\circ - B$. Donc 2°.

$$BC : BD - CD :: 1 : \sin.(C - B).$$

222. Si au lieu de la perpendiculaire AD , on considère une ligne comme AE , qui tombe obliquement sur l'hypothénuse, en divisant l'angle droit en deux parties égales; alors

Le plus grand segment de l'hypothénuse est au plus petit, comme le rayon à la tangente du plus petit angle.

En effet (49), $AE = \frac{BE \sin.B}{\sin.BAE} = \frac{CE \sin.C}{\sin.CAE}$. Mais $BAE = CAE$ par la construction, et $\sin.C = \cos.B$. Donc $BE \times \sin.B = CE \times \cos.B$, et par conséquent

$$BE : CE :: 1 : \text{tang.} B$$

223. Nous terminerons ce qui concerne toutes ces formules, en donnant un exemple pour en faire voir l'usage et l'utilité.

Supposons que regardant, d'un lieu élevé, l'horizon de la surface de la mer, on demande l'inclinaison du rayon visuel.

Fig. 6. Soit $BT = 40$ pieds, et soit la tangente BA le rayon visuel d'un Observateur qui, du point B , regarde l'horizon de la mer. On cherche l'angle ABO que forme l'horizon apparent AB avec l'horizon vrai OR de l'Observateur.

Puisque $BAC = 90^\circ = CBO$, l'angle cherché $ABO = ACB$. Pour trouver la grandeur de cet angle, on a par la formule 15^e (213), $\cos.C = \frac{AC}{BC}$. Les Astronomes ont déterminé la longueur du demi-diamètre AC ou TC de la Terre, dont la valeur moyenne est à-peu-près de 19630000 pieds, mesure de Paris, en nombres ronds. En ajoutant 40, on a donc la valeur de BC , et par conséquent

$$\begin{aligned} \log.AC &= \log.19630000 = 7,2929203 \\ \text{compl. log.} BC &= \text{compl. log.} 19630040 = 2,7070788 \\ \log.\cos.C &= 9,9999991 \end{aligned}$$

Ce log. répond dans les tables au cosinus d'un angle entre $6' 45''$ et $7' 15''$. On auroit ainsi la valeur de l'angle cherché avec $30''$ d'incertitude (193). Il est donc à propos d'avoir recours à la formule (217), $\sin.\frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{BC - AC}{2BC}}$, qui transforme le grand cosinus en un sinus très petit, et dont voici le calcul.

$$\begin{aligned} \log.\frac{1}{2} (BC - AC) &= \log.\frac{1}{2} BT = \log.20 = 1,3010300 \\ \text{compl. log.} BC &= \text{compl. log.} 19630040 = 2,7070788 \\ \text{Donc log.} \frac{BC - AC}{2BC} &= 4,0081088 \end{aligned}$$

dont la moitié (167), ou $\log.\sin.\frac{1}{2} C = 7,0040544$

Ce

Ce log. répond dans les tables à $\sin. 3' 28''$, 2; et l'on a ainsi avec précision $C = 6' 56''$, 4.

Nous venons de voir que quand on emploie la formule $\cos. C = \frac{AC}{BC}$, le log. de $\cos. C$ ne donne pas exactement la valeur de C : mais cette imperfection n'influe en rien sur le calcul lorsque l'angle C est connu, et qu'étant donnés, par exemple, BC et C , on cherche AC par la formule (213, 12°), $AC = BC \times \cos. C$. Il est clair que si à $\log. BC$ pris de l'exemple ci-dessus, on ajoute $\log. \cos. 6' 56''$, tel que le donnent les tables et que nous l'avons trouvé en calculant la formule $\cos. C = \frac{AC}{BC}$, il en doit résulter nécessairement le même log. de AC , que celui que nous avons employé dans cette même formule. Concluons qu'autant les sinus et cosinus très grands sont peu propres à donner la valeur exacte des angles par le moyen des tables ordinaires, autant ils sont favorables, lorsque l'angle est donné, pour trouver avec précision une autre quantité quelconque d'une équation, puisque s'il y a quelque légère erreur dans l'angle donné, elle n'altère point la valeur de son sinus ou cosinus, et ne nuit point par conséquent à la valeur de la chose cherchée.

Si, au lieu de l'angle d'inclinaison, on vouloit connoître la distance BA , on auroit (213, 16°), $AB = \sqrt{40 \times 39260040}$. En calculant cette équation, on trouvera que l'œil peut, à quarante pieds d'élévation, voir la surface de la mer jusqu'à une distance de 39628 pieds.



C H A P I T R E IX.

Résolution des triangles rectilignes obliquangles.

224. *C*ONNOISSANT deux angles, et par conséquent le troisieme, et connoissant aussi un côté, trouver l'un des deux autres côtés.

Appellons A, B, C, les trois angles, et AC le côté connu. Si Fig. 7. l'on cherche BC, on aura par la regle (49)

$$BC = \frac{AC \times \sin. A}{\sin. B}.$$

Nous avons donné (50) un exemple de ce cas.

Si le côté cherché est AB, on aura par la même regle

$$AB = \frac{AC \times \sin. C}{\sin. B}.$$

225. *Connoissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, trouver l'angle opposé à l'autre côté donné, et par conséquent l'angle intercepté; car ordinairement, avec ces mêmes données, c'est en cherchant celui des angles opposés qui n'est pas connu, qu'on détermine l'angle intercepté.*

Appellons les données AC, BC, B; A est l'inconnue demandée, et on aura

$$\sin. A = \frac{BC \times \sin. B}{AC}.$$

L'angle cherché est toujours aigu, s'il est opposé au plus petit des côtés donnés.

En effet, comme le plus grand angle est toujours opposé au plus grand côté, il faut, si $BC < AC$, qu'on ait aussi $A < B$. Or un triangle rectiligne ne peut avoir deux angles obtus.

Si l'angle cherché est opposé au plus grand des côtés donnés, l'espece de l'angle est douteuse, (35).

Fig. 8. En effet soit, par exemple, $BC > AC$; et menons $CD = AC$; nous aurons $A = ADC$, et $\sin. A = (19) \sin. CDB = \frac{BC \times \sin. B}{AC} = \frac{BC \times \sin. B}{CD}$. Donc pour savoir si l'angle cherché est aigu comme

A, ou obtus comme CDB, il ne suffit pas de connoître la grandeur de B, celle de BC et celle de $AC = CD$; mais il est nécessaire de savoir encore si le plus petit côté donné est dans la direction AC ou dans la direction CD. C'est ce qu'on sait ordinairement par les circonstances locales. Mais sans cela, il est de plus impossible de savoir laquelle il faut adopter des deux valeurs ACB, BCD pour le troisieme angle, et AB, BD pour le troisieme côté.

226. *Connoissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, trouver le troisieme côté.*

Appellons les données AC, BC, B; AB est l'inconnue cher- Fig. 2
et 3.
chée. Que l'on mene sur AB prolongé, s'il le faut, la perpendiculaire CD; on aura (211), $BD = BC \times \cos. B$, et $CD = BC \times \sin. B$. Donc (212), $AD = \sqrt{(AC^2 - CD^2)} = \sqrt{(AC^2 - BC^2 \sin.^2 B)}$. Or $AB = BD \pm AD$. Donc

$$AB = BC \times \cos. B \pm \sqrt{(AC^2 - BC^2 \sin.^2 B)}.$$

On voit par les figures que le radical négatif a lieu lorsque l'angle A est obtus. Donc pour trouver la valeur de AB, il est nécessaire de savoir l'espece de l'angle opposé au plus grand des côtés donnés, comme dans le problème précédent. Si l'angle donné B est obtus, le radical est positif; mais il faut observer qu'alors $BC \times \cos. B$ devient négatif, (36).

J'ai donné pour ce problème une solution directe, et j'en ferai de même pour les problèmes suivants, parceque ces solutions fournissent des expressions utiles et même nécessaires dans les opérations analytiques; mais dans ce cas-ci la voie la plus expéditive et la plus commode pour le calcul numérique, est de chercher d'abord l'angle A par la formule (225); alors le troisieme angle est aussi connu; et ensuite AB se trouve par la 2^e formule (224). Comme les quantités AC, sin. B sont communes à ces deux formules, on n'a que six logarithmes à chercher par cette méthode.

227. *Connoissant deux côtés et l'angle intercepté, trouver le troisieme côté.*

Soient les données AB, AC, A; BC est le côté demandé. Fig. 2.

Menant une perpendiculaire CD sur l'un des côtés connus, on aura (212), $BC^2 = CD^2 + BD^2 = AC^2 - AD^2 + (AB - AD)^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \times AD$. Mais $AD = AC \times \cos.A$, (211); donc

$$BC = \sqrt{(AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos.A)}.$$

En appliquant cette solution à la fig. 3 où A est obtus, on verra que le dernier terme est positif, c'est-à-dire tel que la seule considération des règles (36) auroit conduit à l'employer dans le calcul.

228. Cette formule est assez pénible à calculer. Pour la rendre plus commode dans la pratique, substituons $1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} A$ au lieu de $\cos.A$; et nous aurons (15, 8)

$$BC = \sqrt{(AC \oslash AB)^2 + 4AB \times AC \times \sin.^2 \frac{1}{2} A}.$$

Actuellement par les transformations (207) nous aurons

$$\text{tang. } a = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} A}{AC \oslash AB} \sqrt{AB \times AC}; \text{ et}$$

$$BC = \frac{AC \oslash AB}{\cos. a}$$

La première de ces équations donnera la valeur d'un arc a , qui, employée dans la seconde, fera connoître aussitôt le côté cherché.

229. *Connoissant deux côtés et l'angle intercepté, trouver un des deux autres angles.*

Fig. 2. SOLUTION I. Nommons les données AB, AC, A; soit B l'angle cherché. Du troisième angle C abaissons la perpendiculaire CD; nous aurons (210), $\text{tang. } B = \frac{CD}{BD}$. Mais (211), $CD = AC \times \sin.A$, et $BD = AB - AD = AB - AC \times \cos.A$. Donc

$$\text{tang. } B = \frac{AC \sin. A}{AB - AC \cos. A} = \frac{\text{tang. } A}{\frac{AB}{AC \cos. A} - 1}.$$

La dernière expression nous apprend que dans ce problème il n'est pas nécessaire de connoître la valeur absolue des côtés donnés, mais seulement leur rapport $\frac{AB}{AC}$.

Si A est obtus, $\cos.A$ et $\text{tang. } A$ seront négatifs (36). Mais si A étant aigu, on a $AC \cos.A > AB$, alors la valeur de $\text{tang. } B$ sera

négative, ou, ce qui revient au même, B sera obtus. Soit dit au surplus, une fois pour toutes, qu'il suffit de donner les formules trigonométriques en supposant tous les angles aigus. Quand un angle donné est obtus, ou que la valeur d'une formule se trouve négative, il faut alors se ressouvenir des règles des signes (36) récapitulées et détaillées dans la table (42).

Si au lieu de B on cherche l'angle C; en abaissant la perpendiculaire du point B sur la ligne AC, on trouvera par la même méthode

$$\text{tang. } C = \frac{AB \sin. A}{AC - AB \cos. A}.$$

On obtiendrait le même résultat en changeant seulement dans la formule précédente B en C et C en B, règle générale et facile dans tous les cas.

230. SOLUTION II. $AB : AC :: \sin. C : \sin. B$, (49). Donc $AB + AC : AB - AC :: \sin. C + \sin. B : \sin. C - \sin. B :: \text{tang. } \frac{1}{2}(C + B) : \text{tang. } \frac{1}{2}(C - B)$, (II. 12°). Mais $\text{tang. } \frac{1}{2}(C + B) = \text{tang. } \frac{1}{2}(180^\circ - A) = \text{tang. } (90^\circ - \frac{1}{2}A) = \cot. \frac{1}{2}A$, (7). Donc

$$\text{tang. } \frac{1}{2}(C - B) = \cot. \frac{1}{2}A \times \frac{AB - AC}{AB + AC}; \text{ ou}$$

$$\cot. \frac{1}{2}(C - B) = \text{tang. } \frac{1}{2}A \times \frac{AB + AC}{AB - AC}.$$

Pour calculer l'une ou l'autre de ces formules, on nommera AC le plus petit des deux côtés donnés. On connoît déjà $\frac{C + B}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}A$. Retranchant de cette quantité la valeur de $\frac{C - B}{2}$ donnée par la formule, on aura celle de B; en l'ajoutant, au contraire, on aura le plus grand angle C; et cette addition donne l'angle obtus, quand il l'est effectivement.

231. Si la valeur des côtés AB, AC étoit donnée en logarithmes et non en nombres naturels, comme il arrive dans les tables astronomiques pour les distances des planetes au soleil, alors on fera, (209)

$$\text{tang. } x = \frac{AC}{AB}; \text{ et on aura}$$

$$\cot. \frac{1}{2}(C - B) = \text{tang. } \frac{1}{2}A \text{ tang. } (45^\circ + x).$$

232. Connoissant les trois côtés, trouver un angle.

SOLUTION I. Soit A l'angle cherché. De la formule (227) on tire

$$\cos. A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 AB \times AC}.$$

Il seroit facile de déduire de cette formule une nouvelle démonstration de la formule (53), par la marche que nous avons suivie pour démontrer la formule (51); et cette démonstration feroit voir pourquoi j'ai choisi l'une plutôt que l'autre des deux racines du second membre de l'équation dont la formule (53) est tirée.

L'expression ci-dessus de $\cos. A$ sera plus commode pour le calcul sous la forme suivante (15):

$$\cos. A = \frac{(AC + AB + BC)(AC + AB - BC)}{2 AC \times AB} - 1.$$

233. SOLUTION II. En mettant, dans la formule que nous venons de trouver, $2 \cos.^2 \frac{1}{2} A - 1$ au lieu de $\cos. A$, on aura

$$\cos. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\frac{AC + AB + BC}{2} \times \left(\frac{AC + AB + BC}{2} - BC \right)}{AB \times AC}}$$

Cette solution me paroît la plus expéditive : cependant la suivante est plus usitée, parceque souvent on aime mieux chercher dans les tables le log. d'un sinus que celui d'un cosinus, et surtout parcequ'on n'a pas les petits angles avec exactitude par les cosinus.

234. SOLUTION III. Dans la première formule (232), mettons $1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} A$ au lieu de $\cos. A$; nous aurons $2 \sin.^2 \frac{1}{2} A =$

$$1 + \frac{BC^2 - AC^2 - AB^2}{2 AB \times AC} = \frac{(BC + AC - AB)(BC + AB - AC)}{2 AB \times AC}. \text{ Donc}$$

$$\sin. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\left(\frac{BC + AC + AB}{2} - AB \right) \left(\frac{BC + AC + AB}{2} - AC \right)}{AB \times AC}}$$

235. La table III, à la fin de cet Ouvrage, contient les solutions analytiques de toutes les questions que renferme ce problème: *Dans un triangle ABC, trois parties, dont au moins un côté, étant données, déterminer les autres parties.* Je dis trois parties dont au moins un côté; j'en excepte un seul cas, celui de deux

angles connus, lesquels suffisent pour déterminer le troisieme angle.

On trouvera dans cette table quelques expressions compliquées, mais qui peuvent avoir des applications utiles, comme on en verra des exemples (334) relativement à quelques questions délicates *de minimis*.

Les formules 1° , 2° , 10° , 11° , 19° , 20° , 28° , 29° , 55° , 56° , 82° , 83° de la table III, naissent visiblement de la regle (49).

Les formules 30° , 39° , 48° , 57° , 66° , 75° , 84° , 93° , 102° , sont fondées sur les art. 51, 36, et donnent celles qui les suivent immédiatement, comme on le reconnoîtra si l'on se rappelle les formules (II. 1° , 3° , 5°).

Les formules 8° , 25° , 43° , 77° , 105° , sont démontrées aux articles 226, 227, 232, 229.

Les formules 9° , 17° , 18° , 26° , 27° , se démontrent comme la 8° ; ou plutôt la 9° se tire de la 8° , en changeant dans celle-ci A en B et B en A; et par des changements semblables la 9° donne la 17° et la 26° , et la 8° donne la 18° et la 27° .

Les 7° et 16° se démontrent comme la 25° , ou se tirent de la 25° en changeant convenablement les lettres.

Les 70° et 97° se démontrent comme la 43° , ou s'en déduisent en changeant les lettres.

Les formules 50° , 51° se démontrent comme la 77° , ou la 51° se déduit de la 77° et la 50° de la 51° , en changeant les lettres. Il en est de même des 78° et 104° , comparées à la 105° .

La 3° est tirée de la 1° , en mettant dans celle-ci la valeur de $\sin. A$, prise de la 31° , et divisant le numérateur et le dénominateur par $\sin. C$. Les 4° , 12° , 13° , 21° et 22° , se tirent de même des 2° , 10° , 11° , 19° et 20° .

Les 5° , 6° , 14° , 15° , 23° et 24° sont faciles à tirer des formules 51° , 77° , 105° , 50° , 78° , 104° .

La 32° est tirée de la 28° , en substituant dans celle-ci la valeur de AB prise de la 7° . On déduira de la même maniere les formules 33° , 59° , 60° , 86° , 87° des 29° , 55° , 56° , 82° , 83° .

Si on observe que $\sin.A = \sqrt{(1 - \cos.^2 A)}$, on verra que les 34° , 61° , 88° proviennent des 43° , 70° , 97° .

La 35° se déduit de la 28° , en y introduisant la valeur de BC prise de la formule 26° . On déduira de même les formules 36° , 62° , 63° , 89° , 90° des formules 29° , 55° , 56° , 82° , 83° .

En faisant attention que $\cos.A = \sqrt{(1 - \sin.^2 A)}$, on reconnoîtra que les formules 37° , 38° , 64° , 65° , 91° , 92° proviennent des 28° , 29° , 55° , 56° , 82° , 83° .

En observant que $\cos.A = \frac{\sin.A}{\text{tang}.A}$, et divisant la 32° par la 50° , on aura la 41° . On trouvera de la même manière les formules 42° , 68° , 69° , 95° , 96° .

La 44° est tirée de la 40° , en substituant dans celle-ci la valeur de $\sin.B$ prise de la 56° , et celle de $\cos.B$ prise de la 65° . Les 45° , 71° , 72° , 98° , 99° sont formées de même, en substituant respectivement dans les 40° , 67° , 94° , les valeurs contenues dans les 82° et 91° , 83° et 92° , 28° et 37° , 29° et 38° , 55° et 64° .

On sait que $\text{tang}.A = \frac{\sin.A}{\cos.A}$; donc en divisant la 35° par la 44° , on aura la 53° . Les 54° , 80° , 81° , 107° , 108° sont formées de la même manière.

De plus $\text{tang}.A = \sqrt{\left(\frac{1}{\cos.^2 A} - 1\right)}$; d'où il est facile de conclure que les 52° , 79° , 106° proviennent des 43° , 70° , 97° .

Enfin en divisant la 28° par la 37° , on a la 46° , et l'on forme de la même manière les 47° , 73° , 74° , 100° , 101° .

236. La table IV, rejetée de même à la fin de cet Ouvrage, n'a pas besoin d'explication. J'ai cru devoir l'ajouter en faveur de ceux qui n'aiment pas les expressions dans lesquelles les parties du triangle sont désignées simplement par les lettres de l'alphabet. J'y ai réuni les solutions les plus commodes pour le calcul numérique.

On aura pu conclure des formules des tables III et IV, et en général de toutes les formules précédentes, que pour résoudre un triangle rectiligne obliquangle, il est nécessaire de connoître trois
des

des parties qui le composent, et que l'une au moins de ces parties soit un côté par la même raison que celle donnée (213). Telle est la règle générale. Nous allons cependant donner des solutions pour des combinaisons différentes.

237. *Connoissant deux côtés AB, AC, et la différence (C ∩ B) Fig. 7. des angles opposés, résoudre le triangle.*

De la seconde formule (230), dans laquelle, pour plus de généralité, je substitue ∩ à —, je déduis l'équation suivante :

$$\text{tang. } \frac{1}{2} A = \cot. \frac{1}{2} (C \cap B) \times \frac{AB \cap AC}{AB + AC}; \text{ ou}$$

$$\text{tang. } \left\{ \begin{array}{l} \text{demi-angle compris} \\ \text{entre les côtés donnés} \end{array} \right\} = \frac{\cot. \frac{1}{2} \text{ diff. donnée} \times \text{diff. des côtés donnés}}{\text{somme des côtés donnés}}$$

L'angle A étant connu, la détermination des autres parties du triangle n'a plus de difficulté.

238. *Connoissant les angles et la somme (AB + AC), ou la différence (AB ∩ AC) de deux côtés, résoudre le triangle.*

De l'équation précédente se déduisent les suivantes :

$$(AB \cap AC) = (AB + AC) \text{ tang. } \frac{1}{2} A \text{ tang. } \frac{1}{2} (C \cap B)$$

$$(AB + AC) = (AB \cap AC) \cot. \frac{1}{2} A \cot. \frac{1}{2} (C \cap B), \text{ ou}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Diff. des côtés dont} \\ \text{la somme est donnée} \end{array} \right\} = \frac{\text{som. de ces côtés} \times \text{tang. } \frac{1}{2} \text{ angle compris}}{\cot. \frac{1}{2} \text{ diff. des deux autres angles}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Som. des côtés dont} \\ \text{la différ. est donnée} \end{array} \right\} = \frac{\text{diff. de ces côtés} \times \cot. \frac{1}{2} \text{ angle compris}}{\text{tang. } \frac{1}{2} \text{ diff. des deux autres angles}}$$

L'une ou l'autre de ces deux formules donnera la valeur absolue de AB et de AC.

239. *Connoissant un angle A, le côté opposé BC, et la somme (AB + AC), ou la différence (AB ∩ AC) des deux autres côtés, résoudre le triangle.*

En multipliant par $\frac{BC}{BC} = 1$ le premier membre de la seconde équation (238), la réduisant en proportion, et se rappelant les formules (I. 31°, 32°), on a

$$\frac{BC}{BC} : \frac{(AB \cap AC)}{(AB + AC)} :: \frac{\cos. \frac{1}{2} A}{\sin. \frac{1}{2} A} : \frac{\sin. \frac{1}{2} (C \cap B)}{\cos. \frac{1}{2} (C \cap B)}$$

Or je n'ai qu'à démontrer que les numérateurs sont en proportion ;

Q

il s'ensuivra que les dénominateurs sont aussi en proportion (13) : et ces deux analogies feront connoître la valeur de chacune des quatre parties inconnues du triangle. Soient, par exemple, BC, A , et $(AB \curvearrowright AC)$ les choses connues ; on trouvera , par la proportion des numérateurs , la valeur de $\frac{1}{2}(C \curvearrowright B)$; on emploiera cette valeur dans l'analogie des dénominateurs , de laquelle alors on déduira la valeur de $(AB + AC)$. Connoissant ainsi les sommes et les différences des côtés AB et AC , et des angles opposés B et C , on obtiendra leur valeur absolue de la manière indiquée (230).

Démontrons l'analogie des numérateurs. Puisque $(AB \curvearrowright AC)$

$$= \frac{BC \sin. C \curvearrowright BC \sin. B}{\sin. A}, \text{ (III. 1}^\circ, 11^\circ), \text{ on aura } BC = \frac{(AB \curvearrowright AC) \sin. A}{\sin. C \curvearrowright \sin. B} =$$

$$\frac{(AB \curvearrowright AC) \sin. (C + B)}{\sin. C \curvearrowright \sin. B} = \text{(I. 6}^\circ, \text{ II. 22}^\circ) \frac{(AB \curvearrowright AC) 2 \sin. \frac{1}{2}(C + B) \cos. \frac{1}{2}(C + B)}{2 \sin. \frac{1}{2}(C \curvearrowright B) \cos. \frac{1}{2}(C + B)}$$

$$= \frac{(AB \curvearrowright AC) \sin. \frac{1}{2}(C + B)}{\sin. \frac{1}{2}(C \curvearrowright B)}. \text{ Mais } \sin. \frac{1}{2}(C + B) = \sin. \frac{1}{2}(180^\circ - A) =$$

$$\cos. \frac{1}{2}A. \text{ Donc } BC = \frac{(AB \curvearrowright AC) \cos. \frac{1}{2}A}{\sin. \frac{1}{2}(C \curvearrowright B)} ; \text{ équation qui donne la}$$

 proportion cherchée.

On aura donc , en réduisant en équations les deux analogies que nous venons de démontrer,

$$\sin. \frac{1}{2}(C \curvearrowright B) = \frac{(AB \curvearrowright AC) \cos. \frac{1}{2}A}{BC} ;$$

$$\cos. \frac{1}{2}(C \curvearrowright B) = \frac{(AB + AC) \sin. \frac{1}{2}A}{BC} ; \text{ ou}$$

$$\sin. \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{ différence des} \\ \text{angles inconnus} \end{array} \right\} = \frac{\text{diff. donnée} \times \cos. \frac{1}{2} \text{ angle donné}}{\text{côté donné}} ,$$

$$\cos. \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{ différence des} \\ \text{angles inconnus} \end{array} \right\} = \frac{\text{som. donnée} \times \sin. \frac{1}{2} \text{ angle donné}}{\text{côté donné}}$$

240. *Connoissant un angle, un côté adjacent, et la somme des deux autres côtés, résoudre le triangle.*

Fig. 9. Soient les choses connues B, BC et $(AB + AC)$. Que l'on prolonge AB de manière qu'on ait $BD = (AB + AC)$, ou qu'on ait $AD = AC$; on connoîtra dans le triangle BCD les deux côtés BC, BD , et l'angle intercepté B ; et l'on trouvera par la solution (230) la valeur de $\frac{1}{2}(BCD - D)$, qui est celle

de $\frac{1}{2}ACB$, puisque $D = ACD$ par la construction. Cette valeur sera exprimée par l'équation suivante :

$$\cot. \frac{1}{2}ACB = \tan. \frac{1}{2}B \times \frac{(AB + AC) + BC}{(AB + AC) - BC}, \text{ ou}$$

$$\cot. \left\{ \begin{array}{l} \text{demi-angle inconnu} \\ \text{adjac. au côté connu} \end{array} \right\} = \tan. \frac{1}{2} \text{ angle donné} \times \frac{\text{somme donnée} + \text{côté donné}}{\text{somme donnée} - \text{côté donné}}$$

241. Connoissant un angle, un côté adjacent, et la différence des deux autres côtés, résoudre le triangle.

Soient les choses connues B , BC et $(AB - AC)$. Qu'on prenne Fig. 10 $BD = (AB - AC)$, ou qu'on fasse $AD = AC$. Dans le triangle BCD on trouvera, comme dans le cas précédent, la valeur de $\frac{1}{2}(BDC - BCD)$. Mais $BDC = 180^\circ - ADC$, $BCD = ACB - ACD$, et $ADC = ACD$ par la construction. Donc la valeur trouvée est celle de $90^\circ - \frac{1}{2}ACB$. Donc on tirera la valeur de ACB de l'équation suivante :

$$\tan. \frac{1}{2}ACB = \tan. \frac{1}{2}B \times \frac{BC + (AB - AC)}{BC - (AB - AC)}, \text{ ou}$$

$$\tan. \left\{ \begin{array}{l} \text{demi-angle inconnu} \\ \text{adjac. au côté connu} \end{array} \right\} = \tan. \frac{1}{2} \text{ ang. donné} \times \frac{\text{côté donné} + \text{diff. donnée}}{\text{côté donné} - \text{diff. donnée}}$$

242. Passons au calcul des SEGMENTS. Nous prévenons que dans un triangle quelconque ABC , nous nommons *base*, selon l'usage, Fig. 2 le côté AB sur lequel on abaisse une perpendiculaire CD ; et *angle* et 3. *vertical* l'angle C , duquel on abaisse cette perpendiculaire.

Trouver les valeurs des segments de la base AB du triangle ABC .

Soient donnés d'abord les trois côtés. Puisque $CD^2 = AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$, il s'ensuit que $AC^2 \smile BC^2 = AD^2 \smile BD^2$, ou que $(AC \smile BC)(AC + BC) = (AD \smile BD)(AD + BD)$. Si la perpendiculaire tombe en dedans du triangle, $(AD + BD) = AB$; si elle tombe en dehors, $(AD \smile BD) = AB$.

Donc, pour les deux cas,

$$AD \pm BD = \frac{(AC \smile BC)(AC + BC)}{AB}, \text{ ou}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{la somme ou} \\ \text{la différence} \end{array} \right\} \text{ des segments} = \frac{\text{som. des deux côtés} \times \text{leur diff.}}{\text{la base}}$$

Dans l'usage de cette formule il n'est nécessaire ni de faire attention au double signe, ni de savoir si la perpendiculaire tombe

en dedans ou en dehors. La moitié de la valeur donnée par la formule, ajoutée à la moitié de la base, donnera toujours le plus grand segment, et la différence des deux moitiés le plus petit. Cette remarque s'applique aussi aux solutions suivantes ; et nous en donnerons un exemple (250).

243. Soient *donnés* maintenant les trois angles et la base AB.

Fig. 2. Par la regle (210) on a $CD = BD \times \text{tang.} B = AD \times \text{tang.} A$. Donc $BD : AD :: \text{tang.} A : \text{tang.} B$, et $BD + AD : BD \curvearrowright AD :: \sin.(A + B) : \sin.(A \curvearrowright B)$, (II. 10°).

Fig. 3. Si la perpendiculaire tombe en dehors, on a $BD + AD : BD - AD :: \sin.(CAD + B) : \sin.(CAD - B)$. Mais $CAD + B = 180^\circ - A + B = 180^\circ - (A - B)$, et $CAD - B = 180^\circ - (A + B)$. Donc on a $BD + AD : BD - AD :: \sin.(A - B) : \sin.(A + B)$.

Donc en général

$$BD \curvearrowright AD = \frac{AB \times \sin.(A \curvearrowright B)}{\sin.(A + B)}, \text{ ou (III. 84°)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{la diff. ou} \\ \text{la somme} \end{array} \right\} \text{ des segments} = \frac{\text{la base} \times \sin. \text{ diff. des ang. adjacents}}{\sin. \text{ de l'angle vertical}}$$

244. Trouver les valeurs des segments d'un côté, formés par une ligne qui divise également l'angle opposé.

Fig. 10 Soit $BCD = ACD$, et soient *donnés* dans le triangle ABC les angles et le côté divisé AB ; ou encore soient *donnés* les trois côtés.

Par la regle (49) on a $CD = \frac{BD \sin. B}{\sin. BCD} = \frac{AD \sin. A}{\sin. ACD}$. Donc $BD : AD :: \sin. A : \sin. B$, et $BD + AD : BD \curvearrowright AD :: \text{tang.} \frac{1}{2}(A + B) : \text{tang.} \frac{1}{2}(A \curvearrowright B)$, (II. 12°). Donc

$$BD \curvearrowright AD = \frac{AB \text{ tang. } \frac{1}{2}(A \curvearrowright B)}{\text{tang. } \frac{1}{2}(A + B)} = \frac{AB (BC \curvearrowright AC)}{BC + AC}, (230); \text{ ou}$$

$$\text{diff. des segments} = \frac{\text{côté divisé} \times \text{tang. } \frac{1}{2} \text{ diff. des ang. adjacents}}{\text{tang. } \frac{1}{2} \text{ somme de ces angles}}$$

$$\text{diff. des segments} = \frac{\text{côté divisé} \times \text{diff. des deux autres côtés}}{\text{somme de ces deux côtés}}$$

245. Trouver les valeurs des segments de l'angle vertical.

Soient *donnés* l'angle vertical ACB et les deux côtés adjacents

AC, BC. On a (211), $CD = AC \times \cos.ACD = BC \times \cos.BCD$; Fig. 2
donc $BC : AC :: \cos.ACD : \cos.BCD$; et $BC + AC : BC \propto$ et 3.
 $AC :: (II. 13^\circ) \cot.\frac{1}{2}(BCD + ACD) : \tan.\frac{1}{2}(BCD \propto ACD) ::$
(I. 32°) $\cot.\frac{1}{2}(BCD \propto ACD) : \tan.\frac{1}{2}(BCD + ACD)$. Donc
en général pour les deux cas de la perpendiculaire située en
dedans ou en dehors,

$$\tan.\frac{1}{2}BCD \propto ACD = \cot.\frac{1}{2}ACB \times \frac{BC \propto AC}{BC + AC}; \text{ ou}$$

$$\tan.\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \text{diff. ou} \\ \text{somme} \end{array}\right\} \text{ des segments} = \cot.\frac{1}{2}\text{ang. vertical} \times \frac{\text{diff. des côtés adjac.}}{\text{somme de ces côtés}}$$

246. Trouver les valeurs des segments d'un angle, formés par
une ligne qui partage également le côté opposé.

Supposons $AD = BD$, et soient donnés l'angle divisé ACB et Fig. 10
les deux côtés adjacents AC, BC.

On a (49), $CD = \frac{BD \sin.B}{\sin.BCD} = \frac{AD \sin.A}{\sin.ACD}$; et par conséquent
 $\sin.BCD : \sin.ACD :: \sin.B : \sin.A :: AC : BC$. Donc aussi $AC +$
 $BC : AC \propto BC :: \tan.\frac{1}{2}(BCD + ACD) : \tan.\frac{1}{2}(BCD \propto ACD)$,
(II. 12°); et

$$\tan.\frac{1}{2}(BCD \propto ACD) = \tan.\frac{1}{2}ACB \times \frac{AC \propto BC}{AC + BC}; \text{ ou}$$

$$\tan.\frac{1}{2}\text{diff. des segments} = \tan.\frac{1}{2}\text{ang. divisé} \times \frac{\text{diff. des côtés adjac.}}{\text{somme de ces côtés}}$$

247. Résoudre un triangle isoscele.

Le triangle isoscele se résout comme les triangles rectangles, au
moyen d'une perpendiculaire qui partage en deux parties égales
la base et l'angle vertical. Les deux analogies suivantes donnent
la solution de tous les cas.

*Un côté est à la moitié de la base, comme le rayon est au
cosinus d'un angle à la base, ou comme le rayon est au sinus de
la moitié de l'angle vertical.*

Il est facile de vérifier ces proportions sur une figure avec le
secours de la table (213).

248. Les exemples suivants pourront diriger pour l'usage des
formules que nous avons données dans ce Chapitre.

Fig. 3. Soit AC une distance de 585 pieds 5^{po}. 6^{lig}., AB une autre distance de 55^{pi}. 3^{po}. 4^{lig}.; soit aussi connu CAB de 143° 36', et soit BC une distance cherchée.

Ce cas est celui de la formule (IV. 3^e). Pour prendre les logarithmes des deux distances connues, je convertis d'abord ces distances en lignes, et j'ai AC = 84306 lignes, et AB = 7960 lig. Voici le calcul de la formule.

$$\begin{array}{rcl}
 \log. AC & = & 4,9258585 \\
 \log. AB & = & 3,9009131 \\
 \hline
 \text{somme} & & 8,8267716 \\
 \hline
 \text{demi-somme} & & 4,4133858 \\
 \log. 2 & = & 0,3010300 \\
 \log. \sin. \frac{1}{2} CAB = \log. \sin. 71^{\circ} 48' & = & 9,9777108 \\
 \text{compl. log. } (AC - AB) = \text{compl. log. } 76346 & = & 5,1172137 \\
 \hline
 \text{somme ou log. tang. } a & = & 9,8093403 \\
 \hline
 (200), \text{ compl. log. cos. } a & = & 0,0754710 \\
 \log. (AC - AB) \text{ pris de son compl. ci-dessus} & = & 4,8827863 \\
 \hline
 \text{somme ou log. BC} & = & 4,9582573
 \end{array}$$

Et par conséquent BC = 90836 lig.

On résout ordinairement ce problème en cherchant d'abord les deux angles inconnus, par la formule (IV. 4^e), et ensuite le côté par la formule (IV. 1^e). On a alors huit log. à chercher, et sept seulement par notre méthode, attendu que l'usage continuél que l'on fait du log. de 2 le fixe nécessairement dans la mémoire.

249. Employons actuellement les mêmes valeurs des trois côtés, pour donner un exemple de la formule (IV. 5^e); et cherchons un angle, par exemple B. Voici le calcul: nous y employons 90835,86 pour la valeur de BC, valeur prise ci-dessus, mais avec toute la précision que peuvent donner les logarithmes, afin d'avoir l'angle B aussi exactement que nous l'aurions eu par la formule (IV. 4^e) avec les données de l'article précédent.

$$\log. \frac{1}{2} \text{ somme des trois côtés} = \log. 91550,93 = 4,9616627$$

$$\log. (\frac{1}{2} \text{ somme} - AC) = \log. 7244,93 = 3,8600342$$

$$\text{compl. log. AB} = 6,0990869$$

$$\text{compl. log. BC} = 5,0417427$$

$$\text{somme ou log. cos. } \frac{1}{2} B = 9,9625265$$

$$\text{demi-somme ou log. cos. } \frac{1}{2} B = 9,9812632$$

Ce logarithme répond à $\cos. 16^{\circ} 42' 34'' \frac{1}{2}$. Donc l'angle cherché $B = 33^{\circ} 25' 9''$. Le lecteur pourra s'exercer à le chercher par les formules (IV. 4^e et 6^e). On observera que l'usage du complément arithmétique a dispensé des soustractions de $\log. AB$ et de $\log. BC$.

250. On demande la largeur AD d'un fleuve qui passe au pied d'une tour CD. Sur le bord A on prendra, avec des instruments, l'angle DAC, que je suppose de $27^{\circ} 42'$; on passera à un autre point quelconque B, dans le même plan vertical que A et C; on relevera de même l'angle CBA, que je suppose de $16^{\circ} 23'$, et on mesurera la distance horizontale AB, que je suppose de 125 toises. Ces données suffisent pour trouver la valeur de AD, qui est le plus petit segment de la base AB du triangle ACB, prolongée jusqu'à la perpendiculaire CD. Voici le calcul de la formule (243); pour plus de commodité, je ne chercherai que la moitié de sa valeur; ce qu'on fera également pour toutes les autres semblables. Fig. 11

$$\log. \sin. (CAB - B) = \log. \sin. 135^{\circ} 55' = 9,842424$$

$$\text{compl. log. sin. } (CAB + B) = \text{compl. log. sin. } 168^{\circ} 41' = 0,707232$$

$$\log. \frac{1}{2} AB = \log. 62,5 = 1,795880$$

$$\text{somme ou log. } \frac{1}{2} (BD \frown AD) = 2,345536$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2} (BD \frown AD) = 221,6$$

$$\text{et retranchant } \frac{1}{2} AB, \text{ ou } 62,5$$

on a pour le petit segment 159,1.

Donc la largeur cherchée ou AD = 159 toises à très peu près.

CHAPITRE X.

Des analogies différentielles des triangles rectilignes.

251. **D**ANS les deux Chapitres précédents nous avons donné les solutions d'un triangle rectiligne. Considérons à présent deux triangles qui ont deux parties communes, ou, ce qui revient au même, un triangle qui, conservant deux parties constantes, éprouve un changement dans les quatre autres. Nous chercherons à déterminer par des analogies, qu'on nomme alors *analogies différentielles*, le rapport entre le changement d'une partie du triangle et le changement d'une autre partie; et cette recherche appliquée aux cas où une seule partie est constante, et où même aucune ne l'est, complètera les solutions de tous les problèmes déterminés que peut résoudre la Trigonométrie rectiligne. Je traiterai ce sujet d'une manière que je crois absolument neuve; je construirai les analogies dans la plus grande généralité, de sorte qu'elles soient applicables rigoureusement à toutes sortes de variations, de quelque grandeur qu'elles soient. Je nommerai ces analogies *différentielles finies*; j'en déduirai celles qu'on donne communément, qui ne sont exactes que pour les variations infiniment petites, et qui déterminent aussi, mais par approximation, les variations finies et très petites; je nommerai *infinitésimales* ces dernières analogies.

Fig. 12 Soient deux triangles ABC , ABD , ayant le côté AB et l'angle A communs; ou soit un triangle ABC qui se convertisse en ABD , de sorte qu'un côté AB et un angle adjacent A restent constants.

Le côté AC , en devenant AD , augmente d'une quantité CD , que nous appellerons δAC , à la manière du calcul différentiel. On aura de même $BD = BC + \delta BC$. L'angle B , en devenant ABD , augmente aussi d'une quantité CBD , que nous appellerons δB ; et comme CBD est de même la diminution de l'angle C , qui de-
vient

vient D, puisqu'on sait que l'angle extérieur $C = D + CBD$, on aura $\delta B = \delta C$, en observant que ces variations ont lieu en sens contraire.

Cela posé, le triangle BCD donne (49), $CD : \sin.CBD :: BC : \sin.D :: BD : \sin.C$. Donc, en substituant les dénominations adoptées,

$$\delta AC : \left\{ \begin{array}{l} \sin.\delta B \\ \text{ou} - \sin.\delta C \end{array} \right\} :: BC : \sin.(C - \delta C) :: BC + \delta BC : \sin.C.$$

252. Dans l'usage de cette formule et des autres formules différentielles finies qui suivront, il faut employer les expressions $\sin.(C - \delta C)$, $(BC + \delta BC)$, et autres semblables, en donnant aux *différences* le signe qui convient selon les cas; ce qu'il est toujours facile de reconnoître dans la Trigonométrie rectiligne. Il est clair, par exemple, à la seule inspection de la figure, que les changements de AC et de C doivent toujours se faire en sens contraire; et c'est ce que nous indiquons en donnant des signes contraires à δAC et à $\sin.\delta C$, (154). Si l'angle C augmentoit, l'analogie deviendrait $-\delta AC : -\sin.\delta B$ ou $+\sin.\delta C :: BC : \sin.(C + \delta C) :: BC - \delta BC : \sin.C$. Nous verrons de plus (266), que le signe de δBC dépend aussi de l'espece de l'angle C.

253. Si l'on suppose que les variations soient infiniment petites, on pourra (140) mettre δB au lieu de $\sin.\delta B$; (133), $\sin.C$ au lieu de $\sin.(C \mp \delta C)$, et BC au lieu de $(BC \pm \delta BC)$; alors la formule (251) deviendra

$$\delta AC : \delta B \text{ ou } -\delta C :: BC : \sin.C.$$

Et, à l'exception du signe négatif que l'on omet, telle est la forme ordinaire sous laquelle on donne cette analogie.

Avant de construire d'autres analogies différentielles, nous allons donner un exemple qui fera pressentir l'utilité de ces formules; il nous servira de plus à reconnoître les limites entre lesquelles on peut, sans erreur dans le calcul, faire usage des analogies infinitésimales, lorsque les variations sont petites, mais cependant finies et non pas infiniment petites.

Fig. 13 254. Soit AC une hauteur à mesurer par la méthode (215). A quelle distance doit se placer l'Observateur, pour que l'erreur que peut commettre l'instrument dans la mesure de l'angle ABC produise la moindre erreur possible dans le calcul de la hauteur ?

Supposons que l'erreur dans la mesure soit en *plus*, que l'instrument donne, par exemple, ABD au lieu de ABC; la hauteur calculée sera AD au lieu de AC. On voit par la figure que ces erreurs n'influent ni sur le côté AB, ni sur l'angle A qui demeurent constants. (Le raisonnement seroit le même si l'erreur étoit en *moins*). Appellant donc δB l'erreur dans l'angle observé, et δAC l'erreur dans la hauteur, on aura (253), $\delta AC = \frac{BC \times \delta B}{\sin. C}$, ou $\frac{\delta AC}{\delta B} = \frac{BC}{\sin. C}$. Or dans ce problème il s'agit de trouver non la valeur absolue de δAC et de δB , mais seulement quelle doit être, dans un cas quelconque, la distance AB pour que le rapport $\frac{\delta AC}{\delta B}$ ait la moindre valeur possible. Pour y parvenir, éliminons une des quantités BC et C, dépendantes l'une et l'autre de la position cherchée du point B. Dans ce cas-ci, $A = 90^\circ$; on a donc (213, 8°), $BC = \frac{AC}{\cos. C}$; et par conséquent $\frac{\delta AC}{\delta B} = \frac{AC}{\sin. C \cos. C} = \frac{2 AC}{\sin. 2C}$, (I. 6°). Il est évident que le numérateur $2 AC$ est une quantité constante qui ne dépend ni de l'erreur δB , ni de la distance AB. Donc la moindre valeur de $\frac{\delta AC}{\delta B}$ aura lieu lorsque $\sin. 2C$ sera le plus grand possible, c'est-à-dire, quand on aura $C = 45^\circ$. L'Observateur se placera donc, autant qu'il se pourra, à une distance $AB = AC$.

Pour démontrer que cette conclusion est rigoureuse, quelle que soit la valeur de δB , quoique d'ailleurs l'équation $\delta AC = \frac{2 AC \times \delta B}{\sin. 2C}$ ne puisse donner la valeur exacte de δAC que lorsque δB est infiniment petit, ainsi que nous le verrons par un exemple numérique (258); prenons l'analogie différentielle finie (251), $\delta AC : \sin. \delta B :: BC : \sin. (C - \delta C)$, qui donne, en substituant à BC sa valeur ci-dessus, $\frac{\delta AC}{\sin. \delta B} = \frac{AC}{\sin. (C - \delta C) \cos. C} =$

$$\frac{AC}{\sin.(C - \delta C) \sin.ABC} = \frac{2 AC}{\cos.(C - \delta C - B) - \cos.(C - \delta C + B)}, \text{ (II. 16°).}$$

Mais $B = 90^\circ - C$, et $\delta C = \delta B$, (251); ensorte qu'on a $\cos.(C - \delta C + B) = \sin.\delta B$. Donc $\frac{\delta AC}{\sin.\delta B} = \frac{2 AC}{\cos.(C - \delta C - B) - \sin.\delta B}$,

expression dans laquelle on voit que la moindre valeur de $\frac{\delta AC}{\sin.\delta B}$ a lieu lorsque $\cos.(C - \delta C - B)$ est le plus grand possible, c'est-à-dire quand $C = B + \delta C = B + \delta B$. Mais comme on ne sait si l'erreur δB est commise par l'instrument en plus ou en moins, et que dans le second cas la moindre valeur cherchée a lieu lorsque $C = B - \delta B$, il faut prendre le milieu pour satisfaire aux deux cas. On fera donc $C = B$, et l'analogie rigoureuse nous donne la même conséquence que la formule infinitésimale.

255. Qu'on observe avec quelle facilité le calcul différentiel résout les problèmes de cette espece. Je dis *le calcul différentiel*; car la formule (253), et toutes les autres formules infinitésimales que nous trouverons ci-après, peuvent s'obtenir en différentiant les équations trigonométriques qui contiennent les constantes et les variables dont il s'agit dans les différents cas. Dans notre exemple, les constantes sont A et AB, les variables que nous considérons sont AC et B; il faut donc différentier l'équation (III. 77°), en l'écrivant, pour plus de commodité, comme il suit: $AB \times \text{tang.B} - AC \cos.A \text{ tang.B} = AC \sin.A$. Or la différentielle de AC est δAC , et $\delta \text{tang.B} = \frac{\delta B}{\cos.^2 B}$, (II. 39°). Donc (131, 134), $\frac{AB \delta B}{\cos.^2 B} - \cos.A \text{ tang.B } \delta AC - AC \cos.A \times \frac{\delta B}{\cos.^2 B} = \sin.A \delta AC$, ou $\delta B \left(\frac{AB - AC \cos.A}{\cos.^2 B} \right) = \delta AC (\sin.A + \cos.A \text{ tang.B})$. Multipliez l'équation par $\cos.B$; mettez $\frac{AC \sin.A}{\text{tang.B}}$ au lieu de $AB - AC \times \cos.A$, (IV. 77°), et BC au lieu de $\frac{AC \sin.A}{\sin.B}$, (III. 19°), et enfin $\sin.C$ au lieu de $(\sin.A \cos.B + \sin.B \cos.A)$, (III. 85°); l'équation deviendra $\delta B \times BC = \delta AC \times \sin.C$; d'où se déduit l'analogie (253).

256. Essayons maintenant de donner une valeur finie à δB

R ij

dans l'exemple (254). Supposons que l'instrument puisse commettre une erreur de $30' = \delta B$; que B ait été observé de 45° , et que la distance mesurée AB soit de 83 pieds; dans ce cas, $AB = AC$, et $\sin. 2C = 1$. Donc $\delta AC = \frac{2AC \times \delta B}{\sin. 2C} = 2 \times 83 \times 30'$. Pour ce calcul, il semble qu'il eût été mieux de conserver $\sin. \delta B$ comme dans la formule rigoureuse (251), puisqu'on a des tables de logarithmes des sinus; tandis que pour avoir $\log. \delta B$, il faudroit prendre dans la table ($\Lambda\Lambda$) la valeur de l'arc δB , puis chercher le log. de cette valeur entre les logarithmes des nombres. Mais comme les tables de ces derniers logarithmes portent ordinairement en tête de chaque page la réduction des nombres en degrés, minutes et secondes, il est très facile de prendre, par exemple, $\log. 1800$ au lieu de $\log. (30' = 1800'')$, puis d'ajouter à $\log. 1800$ le log. de l'arc d'une seconde, que nous avons préparé (192), et dont il est bon de retenir de mémoire les premiers chiffres; on aura le logarithme cherché de l'arc de $30'$, puisqu'il est évident que l'arc de $1800'' = 1800 \times$ l'arc de $1''$.

En général cette opération est plus courte que celle de chercher le logarithme du sinus d'un petit arc, sur-tout quand cet arc est exprimé en minutes, secondes et dixièmes, comme il arrive continuellement dans l'usage des analogies différentielles.

257. Faisons maintenant le calcul de l'équation $\delta AC = 2 \times 83 \times 30'$.

$$\begin{array}{r} \log. (2 \times 83 = 166) = 2,220108. \\ \log. 1800 = 3,255273 \\ (192), \log. 1'' = 4,685575 \\ \hline \text{somme ou } \log. \delta AC = 0,160956 \end{array}$$

Le nombre correspondant à ce logarithme est 1,4486; une erreur de $30'$ dans la mesure de l'angle B produit donc sur la hauteur cherchée AC une erreur de 1,4486 pieds.

258. Ce résultat ne peut pas être absolument exact, parcequ'un arc de $30'$ n'est pas infiniment petit. En employant la formule

différentielle finie (251), et supposant que l'angle ait été relevé plus grand qu'il n'est en effet, ainsi que le donne la figure, (si au contraire il eût été relevé plus petit qu'il ne l'est, il faudroit (252) changer les signes des *différences*), on a $\delta AC = BC \times \frac{\sin. \delta B}{\sin. (C - \delta C)} = \frac{AB}{\cos. B} \times \frac{\sin. \delta B}{\sin. D} = \frac{AB \sin. \delta B}{\cos. B \cos. (B + \delta B)} = \frac{83 \times \sin. 30'}{\cos. 45^\circ \cos. 45^\circ 30'}$. Donc $\log. \delta AC = 0,164773$, et $\delta AC = 1,4614$. En comparant ce résultat avec le précédent, on voit que l'erreur de la formule infinitésimale est de 0,0128, ou de $\frac{1}{80}$ de pied à très peu près; ce qui ne mérite aucune attention; mais comme cette erreur seroit plus grande à mesure que B, AB et δB seroient plus grands qu'on ne les a supposés dans cet exemple, il importe de savoir quand elle peut se négliger.

259. Dans le cas où δB excéderoit un degré ou environ, une première cause d'erreur seroit d'avoir employé δB au lieu de $\sin. \delta B$: mais, de 0° à 1° , il est aisé de voir, en comparant les logarithmes des sinus à ceux des arcs, que la différence est insensible dans les calculs ordinaires, sur-tout si l'on cherche une petite quantité. Par exemple, la différence de $\log. 30'$ à $\log. \sin. 30'$ n'est que de 0,000006. Or pour le cas que nous venons de calculer (257), cette quantité de plus ou de moins dans le $\log.$ de δAC n'altère en rien la valeur 1,4486 de δAC . Prenons donc pour règle générale dans les analogies différentielles, qu'on peut employer sans scrupule δA , δB , &c., au lieu de $\sin. \delta A$, $\sin. \delta B$, &c., toutes les fois que l'arc δA , l'arc δB , &c. ne sera pas plus grand que d'un degré.

Il est clair que δA pourra même aller jusqu'à 2° , lorsque dans les formules infinitésimales on aura $\frac{1}{2} \delta A$ au lieu de $\sin. \frac{1}{2} \delta A$. Mais quand on aura $\frac{1}{2} \delta A$ au lieu de $\tan. \frac{1}{2} \delta A$, et quand on aura 1 au lieu de $\cos. \frac{1}{2} \delta A$, il faudra, pour renfermer l'erreur dans les mêmes limites, que, dans le premier cas, δA soit moindre que de $1^\circ 30'$, et que dans le second il ne soit pas plus grand que de $1^\circ 10'$; ce qu'il est facile de comprendre en examinant les tables.

260. Une seconde cause d'erreur et la seule qui ait influé dans le calcul (257), vient de ce que nous avons employé 2 au lieu de l'expression exacte $\frac{1}{\cos.45^\circ \cos.45^\circ 30'}$, (258); ce qui revient au même que d'avoir employé, dans le dénominateur, $\cos.45^\circ$ au lieu de $\cos.45^\circ 30'$, puisque $\cos.^2 45^\circ = \frac{1}{2}$, (44). Il suffit d'ouvrir les tables pour voir que la différence d'un cosinus à un autre pour un intervalle δB varie beaucoup à raison des différentes grandeurs de B. Soit par exemple $\delta B = 30'$; si $B = 10^\circ$, on a $\cos.10^\circ - \cos.10^\circ 30' = 0,0015528$. Mais si $B = 80^\circ$, on a $\cos.80^\circ - \cos.80^\circ 30' = 0,0086006$. Donc en général lorsque dans les analogies différentielles on emploie $\cos.A$ au lieu de $\cos.(A \pm \delta A)$, l'erreur est d'autant plus grande que A approche plus de 90° . On voit de même par les tables, que si l'on emploie $1^\circ. \sin.A$ au lieu de $\sin.(A \pm \delta A)$; $2^\circ. \text{tang}.A$ au lieu de $\text{tang}.(A \pm \delta A)$; $3^\circ. \text{cot}.A$ au lieu de $\text{cot}.(A \pm \delta A)$, l'erreur est d'autant plus grande, dans le premier et le troisième cas, que A est plus petit; et dans le second cas, d'autant plus que A approche davantage de 90° .

Au surplus toutes les fois qu'on jugera l'erreur telle qu'on ne croira pas devoir la négliger, les formules différentielles finies que je donne, serviront à corriger le résultat des formules infinitésimales, ou à faire immédiatement les calculs avec une précision rigoureuse. Il sera bien de faire attention à l'erreur provenant de la seconde cause, lorsque δA ou $\frac{1}{2} \delta A$ ne sera pas moindre que de $30'$. Cette erreur est toujours la plus considérable.

261. Pour avoir le log. d'un arc, par exemple le log. de $30'$, nous avons ajouté (256) $\log. 1800$ à $\log.$ de l'arc de $1''$; ce qui revient au même que de diviser 1800 par le nombre des secondes contenues dans l'arc égal en longueur au rayon; et c'est ce dernier parti qu'on prend communément. En effet si l'on nomme R'' ce nombre de secondes, puisque $1800 \times \text{l'arc de } 1'' = \text{l'arc de } 1800''$, par la même raison $R'' \times \text{l'arc de } 1'' = \text{l'arc } R'' =$

$R = 1$. Donc l'arc de $1'' = \frac{1}{R''}$, et par conséquent $1800 \times$ l'arc de $1'' = \frac{1800}{R''}$.

262. Par l'équation $R'' \times$ l'arc de $1'' = 1$, on a la valeur de $R'' = \frac{1}{\text{l'arc de } 1''}$. Le log. du rayon exprimé en secondes, n'est donc autre chose que le complément arithmétique de $\log. 1''$, (192); donc

$$\log. R'' = 5, 31442 \ 51331 \ 76459 \ 48047.$$

Le nombre correspondant à ce log. est 206264,8 +. Tel est le nombre des secondes contenues dans l'arc égal au rayon; par conséquent cet arc est de $57^\circ 17' 44'' 48'''$, &c. Il est facile de le tirer de la table (AA), et de pousser plus loin l'approximation.

En retranchant de $\log. R''$ le logarithme de 60, pris dans la table (BB), on a le logarithme de l'arc égal au rayon et exprimé en minutes, ou

$$\log. R' = 3, 53627 \ 38827 \ 92815 \ 84796.$$

En retranchant encore de ce logarithme celui de 60, on a le logarithme de l'arc égal au rayon et exprimé en degrés, ou

$$\log. R^0 = 1, 75812 \ 26324 \ 09172 \ 21545.$$

Au moyen de ces trois logarithmes, on trouve, sans aucun travail, le logarithme d'un arc de la table (AA). Qu'on veuille, par exemple, le log. de l'arc de 40° . En prenant, parmi les logarithmes des nombres naturels, celui de 40, et y ajoutant le complément de $\log. R^0$, on aura le logarithme cherché. Si l'arc eût été, par exemple, de $40^\circ 10' = 2410'$, on auroit ajouté à $\log. 2410$ le complément de $\log. R'$. Enfin si l'arc eût été, par exemple, de $40^\circ 10' 9'', 8 = 144609'', 8$; en prenant entre les logarithmes des nombres naturels celui de 144609,8 et y ajoutant le complément de $\log. R''$, on auroit eu le logarithme cherché.

263. Comme il est important de ne pas oublier d'employer R'' dans le calcul des analogies différentielles infinitésimales, nous l'insérerons dans toutes ces analogies, même dans celle qui a été

donnée (253), que nous répéterons, ainsi que l'analogie (251), pour les rapprocher de toutes celles que nous allons trouver.

$$(251), \delta AC : \left\{ \begin{array}{l} \sin. \delta B \\ \text{ou} - \sin. \delta C \end{array} \right\} :: BC : \sin.(C - \delta C) :: BC + \delta BC : \sin.C$$

$$(253), \delta AC : \frac{\delta B}{R''} \text{ ou } - \frac{\delta C}{R''} :: BC : \sin.C.$$

Il est clair que par cette dernière analogie, quand δB sera la chose cherchée, on aura $\delta B = \frac{\delta AC \times \sin.C \times R''}{BC}$, et qu'ainsi on aura δB , δC , &c. en minutes et secondes, par les tables des log. des nombres, (256). Il ne doit plus rester actuellement de difficulté sur l'usage de la quantité R'' ; on pourra faire l'épreuve de ce que nous venons d'en dire, en traitant δB comme l'inconnue dans l'exemple (257). Poursuivons la formation des analogies différentielles.

Fig. 12 264. Le triangle BCD donne (49), $BD : BC :: \sin.BCD : \sin.D$. D'où l'on tire, en procédant comme on a fait (230), $\cot. \frac{1}{2}(BCD - D) : \tan. \frac{1}{2} CBD :: BD + BC : BD - BC$. En substituant les dénominations adoptées (251), et observant que $\cot. \frac{1}{2}(BCD - D) = \cot. \frac{1}{2}(180^\circ - C - D) = \tan. \frac{1}{2}(C + D) = \tan.(C - \frac{1}{2} \delta C)$, on aura $\tan.(C - \frac{1}{2} \delta C) : \tan. \frac{1}{2} \delta B \text{ ou } (154) - \tan. \frac{1}{2} \delta C :: 2BC + \delta BC : \delta BC$, et par conséquent

$$\frac{1}{2} \delta BC : \left\{ \begin{array}{l} \tan. \frac{1}{2} \delta B \\ \text{ou} - \tan. \frac{1}{2} \delta C \end{array} \right\} :: BC + \frac{1}{2} \delta BC : \tan.(C - \frac{1}{2} \delta C).$$

Cette formule rigoureuse se réduit à la forme infinitésimale, en mettant $\frac{1}{2} \delta B$ au lieu de $\tan. \frac{1}{2} \delta B$, (153), et supprimant les *différences* dans le dernier rapport, (253, 260); ensorte que l'on a

$$\delta BC : \frac{\delta B}{R''} \text{ ou } - \frac{\delta C}{R''} :: BC : \tan.C.$$

Ces deux formules donnent le rapport entre la variation du côté BC et celle de l'angle B ou de l'angle C, quand AB et A restent constants comme on l'a supposé (251).

265. Le triangle BCD donne, selon l'avant-dernière formule (239), $\sin. \frac{1}{2}(BCD - D) = \cos. \frac{1}{2} CBD \times \frac{BD - BC}{CD}$. Mais
sin:

$\sin. \frac{1}{2} (BCD - D) = \cos. (C - \frac{1}{2} \delta C)$, (264), et $\cos. \frac{1}{2} CBD = \cos. \frac{1}{2} \delta B = \cos. \frac{1}{2} \delta C$, puisque le cosinus reste positif, quoique δC soit négatif (154). Donc $\cos. (C - \frac{1}{2} \delta C) = \cos. \frac{1}{2} \delta B \times \frac{\delta BC}{\delta AC}$. Et par conséquent

$$\delta AC : \delta BC :: \cos. \frac{1}{2} \delta C : \cos. (C - \frac{1}{2} \delta C).$$

D'où il suit qu'on aura pour l'infinitésimale, (140, 133)

$$\delta AC : \delta BC :: 1 : \cos. C.$$

266. On peut observer dans les analogies précédentes (264, 265), que quand l'angle C est obtus, ou plus rigoureusement parlant, lorsqu'on a $(C - \frac{1}{2} \delta C) > 90^\circ$, la tangente et le cosinus de cet angle étant négatifs (36), BC varie alors en sens contraire de B, et AC de BC. Cela est facile à reconnoître par une figure. Mais attendu l'application que j'ai faite des signes convenables aux différentielles dans mes analogies, si l'on observe de plus les regles des signes (36, 42), on n'aura besoin ni de réflexion, ni d'une figure qui représente exactement l'espece de chaque angle.

267. Prenons maintenant pour *quantités constantes un angle et le côté opposé.*

Si le triangle ABC se convertit en ADE, de maniere qu'on ait $DE = BC$, A et BC seront les quantités constantes; et comme la somme des angles d'un triangle rectiligne est toujours constante, $\delta B = \delta C$; mais ces variations sont en sens contraire. Fig. 14

Cela posé, puisque (49), $AB \sin. A = BC \sin. C$, en différentiant (131, 139), on aura $\delta AB \sin. A = BC \cdot 2 \sin. \frac{1}{2} \delta C \cos. (C + \frac{1}{2} \delta C)$. Mais $\sin. A : BC :: \sin. C : AB$. Donc $\delta AB \sin. C = AB \cdot 2 \sin. \frac{1}{2} \delta C \cos. (C + \frac{1}{2} \delta C)$, et par conséquent

$$\frac{1}{2} \delta AB : \sin. \frac{1}{2} \delta C \text{ ou } - \sin. \frac{1}{2} \delta B :: AB : \frac{\sin. C}{\cos. (C + \frac{1}{2} \delta C)}.$$

Donc on aura pour l'infinitésimale

$$\delta AB : \frac{\delta C}{R''} \text{ ou } - \frac{\delta B}{R''} :: AB : \text{tang. } C.$$

268. On a aussi $AC \sin. A = BC \sin. B$. En différentiant, et

donnant aux différentielles les signes convenables, conformément à la figure, on trouvera de la même manière

$$-\frac{1}{2} \delta AC : -\sin.\frac{1}{2} \delta B \text{ ou } +\sin.\frac{1}{2} \delta C :: AC : \frac{\sin.B}{\cos.(B - \frac{1}{2} \delta B)}, \text{ et}$$

$$- \delta AC : -\frac{\delta B}{R''} \text{ ou } +\frac{\delta C}{R''} :: AC : \text{tang.B.}$$

269. Maintenant si l'on divise l'une par l'autre, les analogies différentielles finies (267, 268), on aura $\frac{\delta AB}{-\delta AC} : 1 :: \frac{AB}{AC} :$
 $\frac{\sin.C \cos.(B - \frac{1}{2} \delta B)}{\sin.B \cos.(C + \frac{1}{2} \delta C)} :: 1 : \frac{\cos.(B - \frac{1}{2} \delta B)}{\cos.(C + \frac{1}{2} \delta C)},$ (49); et par conséquent

$$\delta AB : -\delta AC :: \cos.(C + \frac{1}{2} \delta C) : \cos.(B - \frac{1}{2} \delta B).$$

Donc on aura pour l'infinitésimale,

$$\delta AB : -\delta AC :: \cos.C : \cos.B.$$

On seroit parvenu à la même analogie en divisant l'une par l'autre les deux infinitésimales (267, 268).

Fig. 15

270. Si $A = 90^\circ = D$, en développant l'expression $\cos.(C + \frac{1}{2} \delta C)$ dans l'analogie différentielle finie (267), on a
 $\delta AB = \frac{2 \sin.\frac{1}{2} \delta C \times AB}{\sin.C} (\cos.C \cos.\frac{1}{2} \delta C - \sin.C \sin.\frac{1}{2} \delta C) =$
 $(I. 6^\circ) \sin.\delta C \times AB \cot.C - AB 2 \sin.^2 \frac{1}{2} \delta C = AC \sin.\delta C -$
 $AB + AB \cos.\delta C, (213, 3^\circ), (I. 7^\circ).$ Or $AB + \delta AB = BD$,
 et $\delta C = ACD = ABD$; donc

$$BD = AC \sin.ACD + AB \cos.ACD.$$

En opérant de même sur l'analogie différentielle finie (268), et considérant que parceque l'hypothénuse est constante, si $BD = AB + \delta AB$, alors $CD = AC - \delta AC$, on trouvera

$$CD = AC \cos.ACD - AB \sin.ACD.$$

Si δC étoit négative, de sorte qu'on eût $BCA > BCD$, ce qui arriveroit si, par exemple, on mettoit, dans la fig. 15, A au lieu de D, et D au lieu de A, on trouveroit, en procédant de même, et observant qu'alors on a $BD = AB - \delta AB$ et $CD = AC + \delta AC$,

$$BD = AB \cos.ACD - AC \sin.ACD.$$

$$CD = AC \cos.ACD + AB \sin.ACD.$$

Donc, deux triangles rectangles ayant l'hypothénuse commune, si on connoît la différence des angles ayant même sommet, et de plus deux côtés dans l'un de ces triangles; les deux premières ou les deux dernières équations que nous venons de donner feront trouver les deux côtés de l'autre triangle. Ce cas se rencontre fréquemment dans l'Astronomie. Mais comme il arrive aussi quelquefois qu'au lieu de la différence des angles on connoît leur somme ACD , il est à propos de faire voir qu'alors les deux dernières équations donnent encore les quantités cherchées, en faisant seulement un changement de signes dans la première de ces deux équations. Fig. 16

271. En effet ($213, 4^\circ$), $BC = \frac{AB}{\sin.BCA} = \frac{BD}{\sin.BCD}$. Donc $AB : BD :: \sin.BCA : \sin.(ACD - BCA) :: \sin.BCA : \sin.ACD \times \cos.BCA - \sin.BCA \cos.ACD :: 1 : \sin.ACD \cot.BCA - \cos.ACD$, (9). Donc $BD = AB \sin.ACD \cot.BCA - AB \times \cos.ACD$. Mais ($213, 17^\circ$), $\cot.BCA = \frac{AC}{AB}$. Donc

$$BD = AC \sin.ACD - AB \cos.ACD.$$

Par la même méthode, en partant des équations $BC = \frac{AC}{\cos.BCA} = \frac{CD}{\cos.BCD}$, on trouvera

$$CD = AC \cos.ACD + AB \sin.ACD.$$

272. Soient maintenant *deux côtés constants*, et soient ces côtés AB, AC , ensorte que le triangle ABC se convertissant en ABD , AD soit égal à AC . Fig. 17

On a (49), $AC : AB :: \sin.B : \sin.C :: \sin.ABD : \sin.D$. Or on voit par la dernière proportion, que si ABD est $> B$, on doit avoir aussi $D > C$, pourvu que tous ces angles soient aigus, comme nous le supposons toujours (229), nonobstant même ce que la figure pourroit représenter, (215). Nous ferons donc δC positif, ou $D = C + \delta C$, puisque la figure suppose $ABD > B$ ou $ABD = B + \delta B$.

On a donc $\sin.(B + \delta B) : \sin.B :: \sin.(C + \delta C) :$

Fig. 17 $\sin.C$. Donc aussi (10), (II. 12°), $\text{tang.} \frac{1}{2}(B + \delta B + B) :$
 $\text{tang.} \frac{1}{2}(B + \delta B - B) :: \text{tang.} \frac{1}{2}(C + \delta C + C) :$
 $\text{tang.} \frac{1}{2}(C + \delta C - C)$, et, en réduisant et transposant,

$$\text{tang.} \frac{1}{2} \delta B : \text{tang.} \frac{1}{2} \delta C :: \text{tang.}(B + \frac{1}{2} \delta B) : \text{tang.}(C + \frac{1}{2} \delta C).$$

On aura donc pour l'infinitésimale

$$\delta B : \delta C :: \text{tang.} B : \text{tang.} C.$$

Ici le diviseur R'' est inutile, parcequ'il diviseroit également δB et δC .

273. Par la méthode employée (264), on tire du triangle BCD, $\cot. \frac{1}{2}(BDC - BCD) = \text{tang.} \frac{1}{2} CBD \times \frac{BC + BD}{BC - BD} = \text{tang.} \frac{1}{2} \delta B \times \frac{2BC - \delta BC}{-\delta BC}$, en supposant $BC > BD$, comme cela doit être (A étant aigu), à cause de $BAC > BAD$. Mais $BDC - BCD = D + ADC - (ACD - C) = D + C$, parceque le triangle ACD est isoscele. Donc $\cot. \frac{1}{2}(D + C)$, ou $\cot.(C + \frac{1}{2} \delta C) = \text{tang.} \frac{1}{2} \delta B \times \frac{2(BC - \frac{1}{2} \delta BC)}{-\delta BC}$; donc aussi

$$\text{tang.} \frac{1}{2} \delta B : -\frac{1}{2} \delta BC :: \cot.(C + \frac{1}{2} \delta C) : BC - \frac{1}{2} \delta BC; \text{ et}$$

$$\frac{\delta B}{R''} : -\delta BC :: \cot.C : BC.$$

274. Divisons l'une par l'autre les analogies différentielles finies (272, 273), et nous aurons

$$\text{tang.} \frac{1}{2} \delta C : -\frac{1}{2} \delta BC :: \cot.(B + \frac{1}{2} \delta B) : BC - \frac{1}{2} \delta BC;$$

et par conséquent

$$\frac{\delta C}{R''} : -\delta BC :: \cot.B : BC.$$

275. Dans le triangle BCD on a, par la dernière formule (239), $\cos. \frac{1}{2}(BDC - BCD) = \sin. \frac{1}{2} CBD \times \frac{BC + BD}{CD} = \sin. \frac{1}{2} \delta B \times \frac{2(BC - \frac{1}{2} \delta BC)}{CD}$. Or (247), $\frac{1}{2} CD = AC \sin. \frac{1}{2} CAD = -AC \sin. \frac{1}{2} \delta A$, en appelant A l'angle BAC, qui, en diminuant, devient BAD; et $\frac{1}{2}(BDC - BCD) = C + \frac{1}{2} \delta C$, (273). Donc

$\cos.(C + \frac{1}{2} \delta C) = \sin.\frac{1}{2} \delta B \times \frac{BC - \frac{1}{2} \delta BC}{AC \sin.\frac{1}{2} \delta A}$; et par conséquent

$\sin.\frac{1}{2} \delta B : - \sin.\frac{1}{2} \delta A :: AC \cos.(C + \frac{1}{2} \delta C) : BC - \frac{1}{2} \delta BC$;
ce qui nous donne pour l'infinitésimale

$$\delta B : - \delta A :: AC \cos.C : BC.$$

276. Si nous appliquons la même solution à la figure 18, dans laquelle ABC se changeant en AEC, on a $AB = AE$, $BCE =$ Fig. 18
 δC , $E = B + \delta B$, $CE = BC - \delta BC$, et $BAE = - \delta A$;
nous trouverons de même $\cos.\frac{1}{2} (CEB - CBE) = \cos.(B + \frac{1}{2} \delta B)$
 $= \sin.\frac{1}{2} \delta C \times \frac{2(BC - \frac{1}{2} \delta BC)}{BE} = \sin.\frac{1}{2} \delta C \times \frac{BC - \frac{1}{2} \delta BC}{AB \sin.\frac{1}{2} \delta A}$. Donc aussi

$$\sin.\frac{1}{2} \delta C : - \sin.\frac{1}{2} \delta A :: AB \cos.(B + \frac{1}{2} \delta B) : BC - \frac{1}{2} \delta BC$$

Et par conséquent

$$\delta C : - \delta A :: AB \cos.B : BC.$$

277. En divisant l'une par l'autre les analogies différentielles finies (273, 275), ainsi que celles trouvées (274, 276), on aura

$$- \frac{1}{2} \delta BC : - \sin.\frac{1}{2} \delta A :: AC \sin.(C + \frac{1}{2} \delta C) : \cos.\frac{1}{2} \delta B$$

$$- \frac{1}{2} \delta BC : - \sin.\frac{1}{2} \delta A :: AB \sin.(B + \frac{1}{2} \delta B) : \cos.\frac{1}{2} \delta C$$

Et les infinitésimales seront

$$- \delta BC : - \frac{\delta A}{R''} :: AC \sin.C : 1$$

$$- \delta BC : - \frac{\delta A}{R''} :: AB \sin.B : 1$$

278. Si deux angles sont constants, et par conséquent le troisième ; en faisant varier les côtés, on a deux triangles semblables, dans lesquels les variations des côtés sont proportionnelles aux côtés eux-mêmes, ou (49) aux sinus des angles opposés à ces mêmes côtés. La solution de ce cas appartient à la Géométrie plutôt qu'à la Trigonométrie.

279. Pour faciliter l'usage des analogies différentielles que nous avons trouvées jusqu'à présent, j'ai cru qu'il seroit utile d'en composer une table. J'y ai exprimé les infinitésimales de la manière

qu'on préfère le plus généralement, c'est-à-dire en dénommant les différentes parties du triangle. J'ai omis R'' pour plus de brièveté; on suppléera cette quantité dans le calcul: nous en avertissons à la fin de la table. J'ai disposé chaque analogie *infinitésimale* sous l'analogie *finie* correspondante; ensorte qu'on verra sur-le-champ dans celle-ci ce qui se trouve négligé dans celle-là, et qu'on en tiendra compte dans le calcul, lorsqu'il le faudra et qu'on le pourra. Les analogies différentielles finies donnent la valeur exacte de l'une quelconque des quantités contenues dans chacune d'elles. Il n'en est pas ainsi des infinitésimales, qui ne peuvent que donner à-peu-près la valeur finie de l'une des deux différentielles que chacune d'elles renferme. Et si ce n'étoit pas une différentielle qu'on cherchât par ces analogies; si, par exemple, connoissant δAC et δBC , on cherchoit l'angle C par le moyen de l'analogie (265), $\delta AC : \delta BC :: 1 : \cos.C$, l'erreur pourroit être grave; car en général *dans l'usage même des formules rigoureuses, il n'est pas sûr de chercher des grandes quantités par le moyen des petites*; puisqu'alors une légère erreur dans les quantités données peut en produire une considérable dans les quantités cherchées: on en verra un exemple (799). Au contraire, si dans l'analogie que nous venons de citer, on connoît une des deux différentielles; pour trouver la valeur très approchée de l'autre, il suffit de connoître à-peu-près l'angle C . Une légère erreur sur une grande quantité telle qu'on suppose $\cos.C$ relativement aux différentielles, ne produit ordinairement qu'une erreur insensible sur une petite quantité telle qu'on suppose la différentielle cherchée. On en a vu un exemple (258).

De ce que nous avons dit, il résulte que le calcul des analogies infinitésimales est extrêmement commode, puisqu'entre autres avantages on peut négliger les secondes dans la valeur des arcs, en employant leurs lignes trigonométriques.

TABLE DES ANALOGIES DIFFÉRENTIELLES, FINIES ET INFINITÉSIMALES,
démontrées (263 à 277).

Quantités constantes AB, A; ou un côté et un angle adjacent.

$$1^{\text{e}} \text{ ANAL. } \delta AC : \left\{ \begin{array}{l} \sin. \delta B \\ \text{ou} - \sin. \delta C \end{array} \right\} :: BC : \sin. (C - \delta C) :: BC + \delta BC : \sin. C$$

(M)... La variation du *côté adjacent* à l'angle constant est à la variation de l'un des angles, comme le côté opposé à l'angle constant est au sinus de l'angle opposé au côté constant.

$$2^{\text{e}} \quad \frac{1}{2} \delta BC : \left\{ \begin{array}{l} \text{tang. } \frac{1}{2} \delta B \\ \text{ou} - \text{tang. } \frac{1}{2} \delta C \end{array} \right\} :: BC + \frac{1}{2} \delta BC : \text{tang. } (C - \frac{1}{2} \delta C).$$

(N)... La variation du *côté opposé* à l'angle constant est à la variation d'un des angles, comme ce côté est à la tangente de l'angle opposé au côté constant.

$$3^{\text{e}} \quad \delta AC : \delta BC :: \cos. \frac{1}{2} \delta C : \cos. (C - \frac{1}{2} \delta C).$$

(O)... La variation du *côté adjacent* à l'angle constant est à la variation du *côté opposé*, comme le rayon au cosinus de l'angle opposé au côté constant.

Quantités constantes BC, A; ou un côté et l'angle opposé.

$$4^{\text{e}} \quad \frac{1}{2} \delta AB : \sin. \frac{1}{2} \delta C \text{ ou } - \sin. \frac{1}{2} \delta B :: AB : \frac{\sin. C}{\cos. (C + \frac{1}{2} \delta C)}.$$

$$5^{\text{e}} \quad - \frac{1}{2} \delta AC : \sin. \frac{1}{2} \delta C \text{ ou } - \sin. \frac{1}{2} \delta B :: AC : \frac{\sin. B}{\cos. (B - \frac{1}{2} \delta B)}.$$

(P)... La variation d'un *côté* est à la variation d'un *angle*, comme ce même côté à la tangente de l'angle opposé.

$$6^{\text{e}} \quad \delta AB : - \delta AC :: \cos. (C + \frac{1}{2} \delta C) : \cos. (B - \frac{1}{2} \delta B).$$

(Q)... Les variations des *côtés* sont proportionnelles aux cosinus des angles opposés.

Quantités constantes AB, AC ; ou deux côtés.

$$7^{\circ} \quad \text{tang.} \frac{1}{2} \delta B : \text{tang.} \frac{1}{2} \delta C :: \text{tang.} (B + \frac{1}{2} \delta B) : \text{tang.} (C + \frac{1}{2} \delta C).$$

(R)... Les variations des *angles opposés aux côtés constants* sont proportionnelles aux tangentes de ces mêmes angles.

$$8^{\circ} \quad - \frac{1}{2} \delta BC : \text{tang.} \frac{1}{2} \delta B :: BC - \frac{1}{2} \delta BC : \cot. (C + \frac{1}{2} \delta C).$$

$$9^{\circ} \quad - \frac{1}{2} \delta BC : \text{tang.} \frac{1}{2} \delta C :: BC - \frac{1}{2} \delta BC : \cot. (B + \frac{1}{2} \delta B).$$

(S)... La variation du *côté* est à celle d'un *angle adjacent*, comme ce même côté à la cotangente de l'autre angle adjacent.

$$10^{\circ} \quad - \sin. \frac{1}{2} \delta A : \sin. \frac{1}{2} \delta B :: BC - \frac{1}{2} \delta BC : AC \cos. (C + \frac{1}{2} \delta C).$$

$$11^{\circ} \quad - \sin. \frac{1}{2} \delta A : \sin. \frac{1}{2} \delta C :: BC - \frac{1}{2} \delta BC : AB \cos. (B + \frac{1}{2} \delta B).$$

(T)... La variation de l'*angle opposé au côté variable* est à celle d'un *angle adjacent*, comme le côté variable est au produit du côté constant opposé à cet angle adjacent, par le cosinus de l'autre angle adjacent.

$$12^{\circ} \quad - \sin. \frac{1}{2} \delta A : - \frac{1}{2} \delta BC :: \cos. \frac{1}{2} \delta B : AC \sin. (C + \frac{1}{2} \delta C).$$

$$13^{\circ} \quad - \sin. \frac{1}{2} \delta A : - \frac{1}{2} \delta BC :: \cos. \frac{1}{2} \delta C : AB \sin. (B + \frac{1}{2} \delta B).$$

(V)... La variation de l'*angle opposé au côté variable* est à celle de ce *côté*, comme le rayon est au sinus de l'un des deux autres angles, multiplié par le côté constant contigu à cet angle.

Dans les analogies infinitésimales, nous supposons toujours que les *variations des angles* (lesquelles se prennent en secondes) sont divisées par R'' , (262).

280. Les analogies précédentes, et sur-tout les infinitésimales, peuvent devenir plus nombreuses au moyen des substitutions. Par exemple, si l'on cherchoit une des différentielles de l'analogie $\delta AB : \delta C :: AB : \text{tang.} C$, (267); que le côté AB fût inconnu, mais que les angles B et C et le côté AC fussent donnés, on pourroit
trouver,

trouver, par leur moyen, le côté $AB = \frac{AC \cdot \sin.C}{\sin.B}$, et employer ensuite la valeur numérique de AB dans cette analogie ; mais si au lieu de cette valeur numérique, on substitue dans cette même analogie la valeur analytique de AB telle que nous venons de la donner, la proportion deviendra $\delta AB : \delta C :: AC \cos.C : \sin.B$, et le calcul sera plus expéditif. Il en seroit de même si on connoissoit AB , AC et A , et que l'angle C fût inconnu ; en substituant la valeur (229) de $\tan.C$, on auroit $\delta AB : \delta C :: AC - AB \times \cos.A : \sin.A$. On fera donc ces substitutions quand elles seront nécessaires : nous les omettons ici ; mais nous nous proposons d'y suppléer dans les analogies différentielles de la Trigonométrie sphérique, qui sont d'un plus grand usage. On pourra recourir à celles-ci, même pour la Trigonométrie rectiligne, à l'usage de laquelle il est facile de les réduire, comme nous le verrons (727).

281. Il y a deux manières de calculer les analogies différentielles finies, lorsque le second rapport contient aussi la différentielle cherchée : je suppose, par exemple, quel'on cherche δC par l'analogie (279, 1°), qui donne $-\sin.\delta C = \frac{\delta AC}{BC} \times \sin.(C - \delta C)$.

La première méthode déjà indiquée (pag. 71) consiste à employer $\sin.C$ au lieu de $\sin.(C - \delta C)$ qu'on ne peut employer, parceque δC est inconnu : on a alors une valeur approchée de δC ; pourvu que δC soit très petit relativement à C . En se servant de cette valeur approchée de δC , que l'on substitue dans le calcul $\sin.(C - \delta C)$, au lieu de $\sin.C$, et on aura une autre valeur de δC plus approchée que la première. Si cette seconde valeur n'est pas encore aussi exacte qu'on le desire, on l'emploiera au lieu de la première, et on en trouvera une troisième beaucoup plus exacte, et ainsi de suite. Ordinairement on voit, dès le premier calcul, quelle est à très peu près la valeur exacte de δC .

282. Par la seconde méthode, je réduis l'équation de sorte que l'inconnue soit d'un seul côté. J'ometts alors le signe négatif de $\sin.\delta C$; il influeroit ici sur le calcul, tandis qu'il ne doit (252)

qu'indiquer que C diminue lorsque ΔC augmente : je développe $\sin.(C - \Delta C)$, (II. 2°); et divisant l'équation par $\sin.\Delta C$, j'ai

$$\cot.\Delta C = \frac{BC + \cos.C \times \Delta AC}{\sin.C \times \Delta AC}.$$

Mais cette méthode, peu commode pour le calcul par logarithmes, donne en outre, dans de certains cas, une équation compliquée du second degré; par exemple lorsqu'on cherche ΔC par l'analogie (279, 2°), en développant $\tan.(C - \frac{1}{2}\Delta C)$, (II. 6°).

283. Si une seule partie du triangle est constante, nous allons voir que les mêmes analogies (279) serviront encore; mais il faut connoître deux variations pour pouvoir trouver toutes les autres. Je parle seulement des analogies infinitésimales; car on ne pourra que rarement, dans ce cas, appliquer la méthode suivante aux analogies différentielles finies, parcequ'elles exigent beaucoup de données et qu'elles se prêtent peu aux substitutions.

Fig. 19 Soit le triangle DTS, qui se convertisse en DES, le seul côté DS demeurant constant. Soit connue la valeur de EDT = + ΔD , et celle de TSE = + ΔS ; et soit demandée, par exemple, la variation de DT qui devient DE.

On prolongera DT, s'il est nécessaire, jusqu'à la rencontre de SE, et on considérera d'abord le triangle DTS converti en DRS, et conservant par conséquent comme constants *un côté DS et un angle adjacent D*. Puisqu'on connoît ΔS , on aura la variation TR de DT, qui dans ce cas est *le côté adjacent à l'angle constant D*, par l'analogie (M), (279), qui donnera $\Delta DT : \Delta S :: TS : \sin.T$. J'observe que S est l'angle variable adjacent au côté constant, et qu'il en est de même de l'angle B dans l'analogie (279, 1°). J'en conclus que ΔS étant ici donné positif de même que ΔB l'est dans l'analogie citée, ΔDT doit être positif, puisqu'il correspond à ΔAC . (C'est ce qu'on voit par la fig. 19; mais cependant en général ce n'est pas aux figures qu'on doit se fier pour des solutions de ce genre). On a donc $\Delta DT = \Delta S \times \frac{TS}{\sin.T}$.

Cette équation donne la différence de DT à DR. Pour avoir la

différence cherchée de DT à DE, il reste à connoître celle de DR à DE. Considérons le triangle DSR converti en DSE, *un côté DS et l'angle adjacent DSR* demeurant constants. Puisqu'on connoît δD , et qu'on cherche la variation de DR, *côté opposé à l'angle constant*, l'analogie (N), (279), est celle qui convient à ce cas ; et on aura $\delta DR : \delta D :: DR : \text{tang.} R$. J'observe que D correspond à B dans l'analogie (279, 2°) ; et raisonnant comme ci-dessus, j'en conclus que δDR doit être positif. Il faut donc ajouter la valeur de δDR à celle déjà trouvée de δDT dans le triangle DTS, ou de DR — DT, pour avoir la valeur entière cherchée de δDT ou de DE — DT. Donc $\delta DT = \delta S \times \frac{TS}{\sin. T} + \delta D \times \frac{DR}{\text{tang.} R}$. En écrivant DT au lieu de DR, et T au lieu de R, comme nous avons toujours fait dans les analogies infinitésimales, où nous avons employé seulement les parties du triangle primitif ABC, auquel correspond DTS dans le cas présent ; on aura

$$\delta DT = \frac{TS \times \delta S + DT \times \cos. T \times \delta D}{\sin. T}.$$

284. Le triangle n'ayant donc qu'une seule partie constante, (que je nommerai *la première*), et étant données les variations de deux autres parties, que je nommerai *la seconde et la troisième*, la méthode générale pour connoître la variation de l'une quelconque des trois parties restantes du triangle sera celle qui suit :

Considérez comme *constantes la première et la seconde* ; prenez dans la table (279) l'analogie convenable pour calculer la variation ou l'effet que la variation connue de la *troisième* produit sur la *quatrième*, qui est celle dont je suppose qu'on cherche la variation. Considérez ensuite comme *constantes la première et la troisième*, et cherchez de même l'effet que produit sur la *quatrième* la variation connue de la *seconde*. La somme de ces deux effets sera, dans tous les cas, la variation cherchée. Je dis *la somme dans tous les cas* ; parce que je suppose qu'on prendra les analogies infinitésimales dans la table (279), en donnant aux différentielles les signes

T ij

qu'elles se trouveront avoir dans les analogies finies correspondantes, ou les signes contraires si les données l'exigent (252, 283).

On verra plusieurs applications de cette méthode (782, 785, &c.).

Ainsi pour avoir tenu compte des signes des différentielles en composant les analogies, nous sommes dispensés de former des figures exactes, qui seroient quelquefois compliquées et embarrassantes dans le cas dont il s'agit, et bien plus encore dans le suivant.

285. *Lorsqu'aucune des parties du triangle n'est constante, trois variations étant données, on trouvera toutes les autres par la même méthode. Je nomme première, seconde et troisième, les trois parties dont les variations sont données; pour connoître la variation de l'une quelconque des trois autres parties, que je nomme quatrième, je suppose constantes la première et la seconde; je trouve, comme ci-dessus, l'effet que produit sur la quatrième la variation connue de la troisième; je suppose ensuite constantes la première et la troisième; je trouve l'effet que produit sur la quatrième la variation connue de la seconde; enfin je suppose constantes la seconde et la troisième, et je trouve l'effet que produit sur la quatrième la variation connue de la première. La somme de ces trois effets, pris avec leurs signes respectifs, sera l'effet total ou la variation cherchée.*

La table (279) fournit donc les analogies différentielles pour tous les cas possibles. J'ajouterai seulement encore quelques expressions qu'on emploie fréquemment dans l'analyse infinitésimale.

286. *Dans un triangle rectiligne rectangle, lorsque la différence de l'hypothénuse au plus grand côté est très petite, elle est égale à la moitié du carré du plus petit côté, divisée par l'hypothénuse.*

Fig. 20 Puisque dans un triangle ABC rectangle en A, on a (213, 14°),

$$BC - AB = \frac{AC^2}{BC + AB};$$
 en appelant δBC la différence de l'hypothénuse BC au plus grand côté AB, il s'ensuit que $AB = BC - \delta BC$, et par conséquent que $BC - AB = \frac{AC^2}{2 BC - \delta BC} =$

$\frac{AC^2}{2(BC - \frac{1}{2} \Delta BC)}$. Quand ΔBC est très petit par rapport à BC , on peut mettre BC au lieu de $(BC - \frac{1}{2} \Delta BC)$, (253); donc alors $BC - AB = \frac{\frac{1}{2} AC^2}{BC}$.

287. *Le sinus verse d'un arc très petit est égal à la moitié du quarré de ce même arc.*

Prenant l'hypothénuse pour rayon, si l'on mène l'arc CD jusqu'à la rencontre de AB prolongé, on verra que $BC - AB = AD = \sin.v. CD$, (4), et que $AC = \sin.CD$. Mais quand le sinus est très petit, on peut lui substituer l'arc, (259). Par cette substitution l'équation finale de l'article précédent devient $\sin.v. CD = \frac{\frac{1}{2} CD^2}{BC} = \frac{1}{2} CD^2$, en faisant, comme à l'ordinaire, le rayon $BC = 1$.

C'est aussi la valeur que donneroit la seconde équation (154), puisque $\sin.v. A = 1 - \cos.A = \frac{A^2}{2}$, en négligeant les puissances plus élevées de A , qui ont une valeur insensible relativement à A^2 , lorsque A est très petit.

288. *Lorsque l'arc est très petit, l'excès de sa sécante sur le rayon est égal à la moitié du quarré de ce même arc.*

Soit DE la tangente et BE la sécante (7) du petit arc CD ; on cherche la valeur de CE , quantité qu'on nomme aussi *l'écart de la tangente*, c'est-à-dire la distance de l'extrémité de la tangente à l'arc. Or $AB : BC :: AD : CE = \frac{BC \times AD}{AB} = \frac{BC \times \frac{1}{2} CD^2}{BC - \Delta BC}$, (287, 286). Donc en négligeant comme ci-dessus ΔBC , $CE = \frac{1}{2} CD^2$.

On voit que dans le calcul infinitésimal *le sinus verse se considère comme égal à l'excès de la sécante sur le rayon.*

On aura une expression exacte de cet excès, par la formule (I. 27°), qui donne $\frac{1}{\cos.A} - 1$ ou $\sec.A - 1 = \tan.A \tan.\frac{1}{2}A$. Cette expression peut être utile dans plusieurs cas.

CHAPITRE XI.

De l'usage de la Trigonométrie rectiligne sur le terrain.

289. Nous parlerons en premier lieu de la manière de mesurer mécaniquement une distance et un angle, puisque ce sont là les opérations fondamentales qui fournissent les données pour calculer les autres parties inconnues d'un triangle, ainsi qu'on l'aura déjà observé dans les exemples (48, 50, 215, &c.). Comme la mesure des angles est bien plus facile à relever que celle des côtés, on mesure ordinairement un côté seulement, et ce côté se nomme *la base*.

De la manière de mesurer la base.

Fig. 21 Soit proposé de mesurer sur le terrain la distance AB.

On commencera par planter verticalement, au moyen du fil à plomb, deux pieux bien droits, AC, BD, aux deux points extrêmes A et B. Ces pieux, qu'on nomme aussi *piquets* ou *jallons*, se terminent ordinairement d'un bout par une pointe ferrée, pour qu'ils pénètrent plus aisément en terre, et portent à l'autre bout un signal pour faciliter la direction du rayon visuel figuré par la ligne ponctuée CD. L'Observateur ayant l'œil appliqué en C ou en D, fera poser, de distance en distance, d'autres piquets toujours d'à-plomb, et qui soient en même temps dans la direction, ou, pour mieux dire, dans le plan vertical du rayon visuel CD; (le plan vertical est celui qui, prolongé, passeroit par le centre de la Terre, que nous supposerons sphérique dans tout ce Chapitre, parceque son ellipticité est tout-à-fait insensible dans les opérations dont il y est question). Ces piquets se multiplient autant qu'il est nécessaire pour que l'on puisse suivre par leur moyen la ligne droite AB lorsqu'on la mesure, sans s'écarter de la direction de cette ligne,



ni à droite ni à gauche. Si l'on veut procéder avec plus de sûreté, on tracera un petit sillon de A en B, en appliquant de temps en temps l'œil aux jallons et dans leur plan vertical, pour conduire le sillon bien droit; ou bien on menera une ficelle d'un jallon à l'autre. On prendra ensuite la mesure avec un grand compas, ou avec une chaîne de gros fil-fer, ou avec une perche d'une longueur connue. La longueur de la chaîne ou l'ouverture du compas, c'est-à-dire la distance de ses deux pointes, doivent être des parties aliquotes de la toise ou de quelque mesure bien connue. Le compas doit être tel que son ouverture ne puisse varier pendant l'opération. On portera successivement les pointes du compas, ou la chaîne bien tendue, ou la perche, sur le sillon ou le long de la ficelle; et l'on mesurera ainsi avec précision le nombre des pieds ou des toises de la distance AB. On opère plus promptement et plus sûrement encore, si l'on emploie deux perches égales, que l'on met successivement l'une au bout de l'autre, de manière que la première devienne la seconde, et ainsi de suite alternativement.

290. Cette manière de mesurer suppose que le terrain soit plan depuis A jusqu'en B, et la distance mesurée se nomme, dans ce cas, *distance horizontale*. Dans la rigueur mathématique, deux points de la surface de la terre, quelque voisins qu'ils soient, ne peuvent avoir leur horizon dans un même plan, à cause de la courbure du Globe. Mais cette sphéricité n'occasionne qu'une erreur absolument insensible dans ces sortes d'opérations. Les bases les plus longues que l'on ait mesurées jusqu'à présent, sont environ de 36000 pieds, mesure de Paris : cette distance répond à un arc un peu plus grand que de six minutes; ce qui se trouve par la proportion suivante : *Le rayon de la terre exprimé en pieds (223) est à un arc terrestre exprimé en pieds, comme le rayon de la table (AA), ou 1, est à l'arc de même degré pris dans la même table.* En appelant A cet arc de la table, on a donc, dans le cas dont il s'agit, $A = \frac{36000}{196,10000}$, (223). La différence de l'arc à la corde est $\frac{1}{24} A^3$, en ne prenant que le premier terme de la dernière série (152), les termes

qui suivent étant insensibles. Cette différence, en parties du rayon de la table, est donc $(\frac{36}{19630})^3 \times \frac{1}{24}$; il faut multiplier cette valeur par le rayon terrestre, ou par 19630000, ce qui donnera la différence ci-dessus exprimée en pieds et fractions de pieds; et on trouvera qu'un arc terrestre long de 36000 pieds est plus long que la corde qui lui est sous-tendue, de $\frac{5}{1000}$ de pieds seulement. On voit donc qu'un tel arc peut se prendre, sans le moindre scrupule, pour une ligne droite dans les opérations les plus délicates de la Géodésie.

Lorsqu'on voudra avoir l'arc en minutes et secondes, on emploiera R'', (262), au lieu de 1 dans l'analogie ci-dessus.

291. Si le terrain de la base est incliné ou inégal, on procédera comme il suit. Après avoir fixé avec des jallons l'alignement de la base BC, on en prendra la mesure en tenant toujours les perches horizontales, comme *ac*, *be*, &c. Les perpendiculaires ponctuées DC, Ec, &c.; représentent le fil à plomb qui doit raser les extrémités des deux perches, supérieure et inférieure, pour qu'on soit assuré que l'une commence où l'autre finit, condition sans laquelle il est évident que la mesure ne seroit pas juste. En opérant ainsi, la somme des perches *ac*, *be*, *dm*, *hB*, sera égale à la distance horizontale AC des points B et C.

Si cependant on vouloit connoître la distance effective BC des mêmes points, on pourroit mesurer successivement les hauteurs *aC*, *bc*, *de*, *hm*, dont la somme est égale à AB; et connoissant AC et AB, on trouveroit par le calcul de la formule (213, 18°), la longueur de l'hypothénuse BC. (Si le terrain monte et descend alternativement, il est clair que pour avoir AB il faut soustraire la somme des différences des hauteurs des perches en descendant, de celle de ces différences en montant). Mais il est plus aisé de mesurer AB par le nivellement, méthode dont se servent ordinairement les Ingénieurs et les Arpenteurs. L'usage du barometre (311) est encore plus facile. Enfin la voie la plus courte est de prendre avec des instruments la mesure de l'angle ACB, (296 et suiv.);

par

par le moyen de cet angle et du côté AC ; on trouvera BC , (213, 8°).

292. Pour disposer les perches horizontalement dans la mesure des terrains inclinés , on se sert du niveau. Il y a des niveaux de plusieurs especes et de plusieurs formes. La fig. 23 représente un *niveau d'air*. C'est un tube de verre , FE , fermé hermétiquement , et rempli d'une liqueur , ordinairement d'esprit de vin , sur laquelle surnage une bulle d'air. On pose cet instrument sur la perche , dont on élève et abaisse celle des extrémités qui ne touche point au terrain , (par exemple l'extrémité *a* de la perche *ac* dans la fig. 22) , jusqu'à ce que la bulle d'air s'arrête en G , dans la partie du milieu du tube , qui est ordinairement indiquée par deux traits. La perche est alors parallèle à l'horizon.

293. Ce que nous venons d'exposer est plus que suffisant pour les mesures ordinaires de l'Arpentage , de la Topographie et de la Géographie. Lorsqu'il est question de pratiques plus délicates ; s'il s'agit , par exemple , de déterminer la longueur d'un degré de la Terre , il faut alors mettre en usage bien d'autres moyens , employer d'autres précautions , que nous omettrons , pour ne pas être diffus inutilement , puisqu'en pareil cas on ne peut se dispenser d'avoir sous les yeux des Traités particuliers , comme l'excellent Livre de *la Figure de la Terre* , par Bouguer , et le *Voyage astronomique et géographique* , Ouvrage dans lequel le savant P. Boscovich a donné les méthodes les plus ingénieuses pour l'Astronomie-pratique et les solutions , par la Géométrie la plus simple , d'un grand nombre de problèmes relatifs à la figure de la Terre.

De la maniere de relever les angles sur le terrain.

294. La *planchette* est le plus commode , et peut-être le plus Fig. 24 ancien instrument qui ait été inventé pour prendre la mesure des angles sur le terrain. C'est effectivement une petite planche bien dressée , d'un pied et demi ou environ en quarré , soutenue ordinai-

rement sur trois pieds, et montée avec divers mouvements pour qu'on puisse l'incliner à volonté à l'horizon. Les meilleures planchettes sont celles qui peuvent se mouvoir en tout sens avec facilité, qui sont solides, fortes, conservant invariablement l'inclinaison sur laquelle on les fixe, et qui ne sont point sujettes à se détruire ou à se déformer par les variations de la chaleur et du froid, de la

Fig.25 sécheresse et de l'humidité. FG est une alidade, c'est-à-dire une règle de cuivre, garnie de deux pinnules qui servent à diriger le rayon visuel.

Fig.24 Pour prendre l'angle formé par deux objets, comme B et C, vus d'un point de station auquel je suppose que réponde d'à-plomb un point A de la planchette; on fixera sur cet instrument un papier bien tendu, sur lequel on appliquera l'alidade de manière qu'en regardant par les pinnules l'objet B, on puisse mener le long de la règle qu'il faut contenir fermement, une ligne indéfinie Ab . On mirera de même au travers des pinnules l'objet C, et l'on tirera une ligne Ac ; l'angle cAb , sur le papier, sera l'angle cherché CAB.

Il est facile de déterminer sur le terrain le point correspondant au point A du papier, en suspendant successivement aux bords m, n de la planchette, un fil à plomb qui descende près de la superficie du sol, et portant sur le terrain, dans la direction de l'un des plombs vers l'autre, une des deux distances Am ou An mesurée horizontalement.

295. Pour savoir le nombre des degrés de l'angle bAc , on en prend la mesure avec un demi-cercle de cuivre ou de corne, comme l'enseignent les *Éléments de Géométrie*. Si l'on veut cette mesure avec plus de précision, on prendra avec le compas une portion

Fig.26 $AD = AE$ sur les droites Ab, Ac , et DE sera la corde de l'angle A pour le rayon AE. On mesurera sur une échelle de parties égales les lignes AE, DE, et l'angle A sera connu par le moyen des tables des sinus, puisqu'on a $AE : DE :: 1 : 2 \sin. \frac{1}{2}A$, (247). C'est aussi la méthode la plus exacte pour former sur le papier un angle donné, en menant une ligne AE d'une longueur arbitraire, et de

cette ligne comme rayon, et du centre A, décrivant un arc qu'on coupe en D, à un intervalle ED, qu'on détermine en calculant la même analogie. Quand ces deux opérations n'exigent pas une extrême exactitude, on peut éviter le calcul en faisant usage de l'échelle des cordes, que donne le compas de proportion.

296. Après la planchette, l'instrument le plus usité pour relever les angles sur le terrain, est le *graphometre*. C'est un demi-cercle de métal, divisé de degré en degré, ou de demi-degré en demi-degré; il porte une alidade mobile EC, qui tourne sur le centre A de l'instrument, et qui est garnie de pinnules. Deux autres pinnules sont aussi fixées sur le demi-cercle, perpendiculairement à son plan, aux extrémités du diamètre qui passe par les divisions marquées 0 et 180. Les deux extrémités de l'alidade portent ordinairement quelques divisions dont voici l'usage. Fig. 27

Supposons le graphometre divisé de 30' en 30'; si on prend un intervalle, par exemple, de 14 divisions ou de 7 degrés, et qu'un intervalle semblable soit divisé, sur chacune des extrémités de l'alidade, en 15 parties égales, il est clair que chacune de ces parties vaudra $\frac{2}{15}$ ou 28'. La première division, marquée 0 sur l'alidade, doit correspondre précisément au milieu des pinnules, c'est-à-dire qu'elle doit être dans le plan des fils verticaux, qui sont ordinairement fixés dans le milieu des pinnules. On appelle communément cette division de l'alidade *la ligne de foi*; elle indique à laquelle des divisions du graphometre correspond la direction du rayon visuel. Je suppose donc que la ligne de foi tombe sur le graphometre entre 40° et 40° 30'. Pour savoir combien il y a de minutes entre la division de 40° et le point du graphometre qui correspond à zéro de l'alidade, on contiendra l'alidade, et on cherchera parmi ses divisions quelle est celle qui coïncide le plus exactement avec l'une de celles du demi-cercle. Supposons que ce soit la 7^e division de l'alidade: dans notre exemple elle coïncidera nécessairement avec celle de 43° sur le graphometre. Puisque l'intervalle de six espaces sur l'alidade, de la 1^e à la 7^e division, vaut $6 \times 28' = 2^{\circ} 48'$,

Fig.27 il s'ensuit que la première division de l'alidade répond, sur le graphometre, à un point situé à $43^{\circ} - 2^{\circ} 48' = 40^{\circ} 12'$. Si c'eût été la 8^e division de l'alidade qui eût coïncidé avec celle de $43^{\circ} 30'$, on auroit trouvé de la même manière, que le zéro de l'alidade seroit tombé sur $40^{\circ} 14'$. Ces exemples font aisément comprendre que les divisions de l'alidade subdiviseront les espaces du demi-cercle, de $2''$ en $2''$.

Le limbe qui porte ces divisions se nomme le *nonius* ou le *vernier*.

Le graphometre doit être monté sur un pied bien solide, et de manière qu'on puisse fixer le plan du demi-cercle dans toutes les positions, horizontale, verticale, et inclinée à l'horizon. Les graphometres plus perfectionnés, sont en outre garnis de vis qui servent aux petits mouvements, soit pour achever de mettre avec toute l'exactitude possible le plan de l'instrument dans l'inclinaison désirée, soit pour placer rigoureusement l'alidade dans la direction de l'objet qu'on veut mirer au travers des pinnules. Au lieu de pinnules on se sert avec avantage de deux lunettes, l'une fixée au demi-cercle, parallèlement au diamètre qui passe ou réellement ou mentalement par les divisions marquées 0 et 180. Cette lunette est placée au-dessous du demi-cercle, pour que l'alidade puisse tourner librement sur la surface supérieure. L'alidade porte la seconde lunette, laquelle doit être disposée de manière qu'elle puisse s'incliner un peu, verticalement, sur le plan de l'alidade. Chacune de ces lunettes doit avoir deux fils bien tendus en croix, au foyer commun des verres, ou au moins un seul fil tendu verticalement.

Enfin le graphometre porte une boussole qui sert à déterminer l'angle que fait le rayon visuel avec la ligne méridienne, comme nous l'expliquerons plus clairement ci-après, (340).

297. Il est aisé de concevoir l'usage du graphometre. Si l'on veut mesurer la distance angulaire de deux objets F, G, vus d'un point quelconque, on placera perpendiculairement sur ce point le centre A du graphometre, et on inclinera ou disposera l'instrument de manière qu'en regardant à travers les pinnules fixes, le fil vertical

paroisse partager également l'un F des deux objets, et qu'en même temps le plan de l'instrument pût, s'il étoit prolongé, rencontrer l'autre objet G. Ensuite on fera tourner l'alidade EC, jusqu'à ce que le fil de ses pinnules partage également l'objet G. On observera à quel point du demi-cercle correspond la ligne de foi de l'alidade; la distance de ce point à la première division du graphometre en B, est l'arc BC, qui indiquera de combien de degrés et minutes est l'angle cherché BAC ou FAG.

Cet angle, mesuré dans un plan commun aux trois points A, F, G, n'est égal à l'angle GAF, mesuré sur le plan horizontal du point A, que quand les points F et G sont situés dans ce dernier plan, comme nous le verrons (321). Nous donnerons (322) le moyen d'évaluer et de corriger cette différence; correction qu'on s'épargnera, si le graphometre est armé de lunettes, lorsqu'un seul des objets sera situé hors de l'horizon de l'Observateur. Car alors on pourra mirer cet objet au moyen du petit mouvement vertical que nous avons supposé (296) à la lunette de l'alidade, en laissant toujours le plan du demi-cercle dans celui de l'horizon.

298. Avant de se servir d'un instrument, il est essentiel de s'assurer de sa bonté. On peut exiger de l'Artiste qui le fournit, qu'il en démontre la justesse, ou qu'il donne les moyens de la reconnoître. Pour les opérations ordinaires, les petites imperfections sont insensibles, les erreurs considérables sont aisées à découvrir; nous ne dirons donc que peu de mots sur ce point.

Il faut d'abord vérifier dans un graphometre si les rayons visuels qui passent par les pinnules fixes et par celles de l'alidade, se coupent dans le point précis qui correspond au centre du demi-cercle; et si l'arc de 180° est juste, c'est-à-dire si les divisions marquées 0 et 180 sont aux points précis où elles doivent être. Pour ces vérifications il suffit d'observer si les quatre fils se confondent ensemble dans un même plan, lorsque les zéros des verniers de l'alidade coïncident parfaitement avec les divisions marquées 0 et 180; si cela a lieu dans les deux positions de l'alidade, c'est-à-dire, soit

Fig.27 lorsque la pinnule E est du côté de la pinnule D, soit lorsque cette pinnule E est du côté de la pinnule B; et enfin si, en tournant l'alidade, le bord des nonius couvre ou coupe une partie égale dans chacune des divisions du demi-cercle. Ces opérations feront reconnoître si le point A, sur lequel se meut l'alidade, est vraiment le centre de l'instrument; s'il est, comme il doit l'être, dans la commune intersection du plan des fils du demi-cercle et du plan des fils de l'alidade; enfin si l'arc de 180° est absolument juste. Après cette dernière vérification, on pourra reconnoître s'il y a des erreurs sensibles dans la position des autres divisions, en y présentant successivement le nonius, ou mesurant les cordes avec un compas à pointes très fines.

299. Si le graphometre est garni de lunettes, il n'exige alors qu'un nonius du côté de l'objectif de la lunette mobile : on mettra la ligne de foi de ce nonius en coïncidence avec la première division B du demi-cercle, et l'on observera si les fils verticaux des deux lunettes couvrent les mêmes points d'un même objet, comme C; (cette opération suppose que les deux fils soient bien verticaux; ce dont on peut s'assurer d'abord, en observant s'ils se confondent avec un fil à plomb pendant à une certaine distance). Ensuite on tournera l'alidade de manière que la ligne de foi du nonius soit en coïncidence avec la dernière division du demi-cercle en D. Si le fil vertical, ou l'intersection des deux fils, se trouvoit ne pas tomber alors sur des points remarquables d'un objet quelconque, il faudroit en planter un, tel que E. Après avoir reconnu avec certitude les points précis de l'objet E, couverts par le fil de la lunette mobile, et ceux de l'objet C, couverts par le fil de la lunette fixe, on tournera le graphometre de manière que le point D se trouve où étoit d'abord le point B, et *vice versa*; (ce qui s'obtient facilement si, avant de mouvoir le graphometre, on marque sur le terrain, au moyen d'un fil à plomb, les points correspondants aux points B et D). Alors on observera si le fil de la lunette fixe étant dirigé sur les points remarquables de l'objet E, celui de la lunette mobile couvre

de même aussi les points reconnus de l'objet C. Par cette opération l'arc de 180° sera vérifié, ainsi que la position exacte du centre de l'instrument dans l'intersection commune aux plans verticaux des axes optiques des deux lunettes.

Les autres vérifications se feront comme nous avons dit (298).

Dans toutes ces opérations, que, pour plus de sûreté, il est à propos de répéter plusieurs fois; s'il se trouvoit quelque erreur, il faudra en apprécier la quantité par le moyen du nonius ou de la vis qui le fait marcher (296), si les mouvements de cette vis sont mesurés par un index. Et en se servant de l'instrument, on tiendra compte des erreurs découvertes.

300. Un autre instrument d'un usage très étendu, est le *quart de cercle*, qui n'est que la moitié ABL du graphometre. Aussi ne mesure-t-il les angles obtus que lorsqu'on les a divisés en deux angles aigus, par le moyen d'un objet intermédiaire quelconque. Dans la vérification de cet instrument, il faut comparer l'arc de 90° à quatre angles droits pris successivement, en faisant mouvoir l'instrument autour de son centre, comme nous l'avons dit (299) pour la comparaison de l'arc de 180° du graphometre à deux angles de 180° chacun. Lorsqu'il s'agit du graphometre, l'erreur trouvée par la comparaison est le double de l'erreur de l'arc de 180° ; et si l'on opere avec le quart de cercle, l'erreur trouvée en mesurant le 4° angle est le quadruple de l'erreur de l'arc de 90° . Fig. 27

C'est le quart de cercle qu'on emploie dans les opérations les plus délicates, parcequ'à volume et poids égaux, il peut avoir un rayon plus grand que le graphometre, et que plus le rayon est grand, plus on a les angles avec une précision rigoureuse. Quant aux méthodes des vérifications scrupuleuses du quart de cercle pour parvenir à reconnoître jusqu'à une seconde d'erreur, cette matiere a été épuisée par M. l'Abbé Boscovich dans l'Ouvrage cité (293). On peut encore avoir recours aux Éphémérides de Milan pour 1782; on y trouvera un résumé bien fait des vérifications des instruments de l'Observatoire de Milan, auxquelles on a apporté

la plus grande exactitude. Enfin le Liv. XIV de l'Astronomie de M. de la Lande réunit d'excellents préceptes pour la vérification de toutes sortes d'instruments astronomiques.

301. Le célèbre Astronome Tobie Mayer a imaginé un instrument très simple, et commode pour relever les angles. On peut en voir la description dans le Tom. II des Actes de Gottingue.

Il seroit trop long d'énoncer et de décrire tous les instruments qui ont été imaginés pour relever les angles. Nous nous contenterons d'avoir parlé de ceux qui sont les plus connus et les plus en usage. Nous nous réservons de parler de la boussole, (339).

Nous terminerons en observant que si dans ces instruments on préfère les lunettes aux pinnules, c'est qu'avec celles-ci, comme on ne distingue pas bien les objets éloignés, on ne peut répondre d'une erreur de 2'.

De la mesure des hauteurs.

Fig-29 302. On demande la hauteur d'un clocher, représentée par la ligne ponctuée AB, B étant le centre de la base du clocher ou le point correspondant perpendiculairement au point A.

À une distance convenable (254), j'établis le graphometre monté verticalement, c'est-à-dire dans le plan de la ligne verticale AB, (il en seroit de même du quart de cercle), de sorte qu'en même temps le diametre CD soit parallele à l'horizon; ce dont je m'assure par le fil à plomb, qui, dans ce cas, appliqué légèrement au plan de l'instrument, doit battre à la fois sur la division marquée 90 et sur le centre N. Je fais tourner l'alidade EF jusqu'à ce que j'apperçoive sur le milieu du fil de ses pinnules ou de sa lunette le sommet A du clocher. Les degrés et minutes de l'arc FD sur le graphometre, seront la mesure de l'angle d'élévation ANH. Du point G sur le terrain auquel correspond à plomb le centre N de l'instrument, je mesure (289 et suiv.) la distance horizontale GK = NH, en suivant toujours la direction de la lunette

lunette CD ; j'ajoute à GK la distance $BK = MH$. Connoissant NM et ANM, je trouverai AM, comme dans l'exemple (215); j'y ajouterai (ce qu'on doit faire dans toutes les opérations semblables) l'élévation, au-dessus du terrain, de la lunette fixe, c'est-à-dire $GN = KH = BM$, et j'aurai la hauteur cherchée AB.

303. Proposons-nous de *déterminer une hauteur inaccessible par le pied*.

Soit CD la hauteur qu'on veut déterminer. Puisque la rivière Fig. 11 AD empêche de mesurer une distance horizontale du point D à la station de l'Observateur; on mesurera une ligne horizontale AB dans le plan de la hauteur CD, et on prendra les angles d'élévation B et CAD. Dans le triangle CAB on connoîtra les trois angles et le côté AB; on cherchera la valeur de l'un des deux autres côtés, (224); et alors on aura $CD = AC \sin.A$, ou bien $CD = BC \sin.B$, (211).

304. *Déterminer une hauteur, dans le plan de laquelle on ne peut mesurer une distance horizontale*.

Soit AB la hauteur cherchée. Choisissez deux stations, C et D, Fig. 30 dont l'une soit dans le même plan horizontal que le point A, et telles que vous puissiez mesurer leur distance effective CD, (291). Mesurez les angles BCD et CDB, en plaçant l'instrument dans le plan oblique des trois points B, C, D. De celle des deux stations qui est dans le plan horizontal de A, prenez avec l'instrument dirigé verticalement, l'angle d'élévation BDA, ou BCA. Connoissant les angles et l'un CD des côtés dans le triangle BCD, vous trouverez l'un des deux autres côtés BC, BD; et vous aurez $AB = BD \sin.BDA$, ou bien $AB = BC \sin.BCA$.

On verra (344) comment, étant en B, et une hauteur AB étant donnée, on peut déterminer une distance horizontale CD.

305. Lorsque l'Observateur est à une distance considérable de l'objet, les hauteurs déterminées par les méthodes précédentes ont besoin de quelques corrections.

Fig. 31 En premier lieu l'horizon de l'Observateur n'est pas le même que celui de l'objet observé. Soit C le centre de la Terre, R la cime d'une montagne, A le point d'où l'on a observé l'angle d'élévation RAB; ORI, perpendiculaire à CR, est l'horizon du point R; BAD, perpendiculaire à CA, est l'horizon du point A. Si on prend $CE = CA$, RE sera la vraie hauteur de la montagne, relativement au point A. Si on mène la corde ponctuée AE, *le véritable angle d'élévation* de la montagne seroit RAE; mais RAB est *l'angle d'élévation apparent*, c'est-à-dire celui qui a été observé avec les instruments, lequel est toujours relatif à l'horizon BAD de l'Observateur. Donc la hauteur de la montagne, déterminée par les méthodes précédentes, sera BR et non RE.

De plus, dans le calcul des hauteurs, nous avons toujours supposé $RBA = 90^\circ$; à la rigueur RBA égale la somme des deux angles intérieurs C et BAC, ou $RBA = 90^\circ + C$; mais comme C n'est jamais que de très peu de minutes (290), on peut résoudre le triangle RBA comme rectangle en B, sans qu'il en résulte une erreur sensible dans le calcul de BR.

BE est donc la seule erreur dépendante de la différence des horizons, de laquelle il soit nécessaire de tenir compte. Pour la calculer, on se servira avec avantage de la formule (286) qui donne $BE = \frac{AB^2}{2 BC}$. En voici un exemple.

306. Les Académiciens François (Bouguer, *Figure de la Terre*) mesurerent au Pérou une base inclinée (291), dont la longueur AR se trouva de 6274, 057 toises, et ils observerent l'angle RAB de $1^\circ 5' 43''$, l'effet de la réfraction (307) déduit. En faisant $BR = AR \times \sin. RAB$, on trouve $BR = 119,93$ toises. Pour calculer BE, on peut prendre AR au lieu de AB, et CE au lieu de BC, les erreurs qui en résultent étant insensibles. On a déjà le log. de AR employé dans le calcul de BR, et 2 CE est le diamètre de la Terre. (Le diamètre moyen, déduit des mesures de degrés, prises

dans la Laponie, à Paris et au Pérou, est exactement de 6543373 toises). Avec ces données on fait promptement le calcul qui suit :

$$\log. AR = 3,797548$$

$$\text{Idem} = 3,797548$$

$$\text{compl. log. } 2 \text{ CE} = 3,184198$$

$$\log. BE = 0,779294 = \log. 6,02.$$

En ajoutant BE à BR, on a la hauteur vraie de la montagne ou RE = 125,95 toises. Et en effet, par un calcul rigoureux, en résolvant le triangle RAE, on trouve RE = 125,97.

Par la formule $BE = \frac{AB^2}{2BC}$, on reconnoît aisément si BE peut se négliger. Par exemple, lorsque AB = 1000 toises, BE = 0,15 toises seulement.

307. En second lieu les réfractions produisent une erreur, lorsqu'on prend les angles d'élévation, comme RAB. Les rayons de lumière, qui traversent l'atmosphère obliquement, se plient continuellement vers la Terre, à cause de l'attraction progressivement plus grande qu'ils éprouvent en traversant les couches de plus en plus denses de l'atmosphère. Ce changement de direction se nomme *réfraction*; il en résulte que les rayons décrivent une ligne courbe, et que l'œil voyant l'objet par la tangente de cette courbe, *l'effet de la réfraction est de faire voir les objets plus élevés qu'ils ne le sont réellement*. Le développement de la théorie de ce phénomène n'entre pas dans le plan de ce Traité; mais le fait est constant, et il est facile de s'en convaincre par l'expérience.

Soit donc C le centre de la Terre. Par la nature des triangles rectilignes, on a $C = 180^\circ - CRA - CAR$; mais $CRA = 90^\circ - IRA$, et $CAR = 90^\circ + RAB$. Par la substitution de ces deux valeurs, la première équation devient $C = IRA - RAB$. L'angle C est toujours connu quand on connoît AR que l'on peut employer sans erreur sensible, au lieu de l'arc AE, dans la proportion donnée (290). Si donc se plaçant en R, on mesure avec un instrument l'angle IRA, et du point A l'angle RAB, et que la

Fig. 31. différence de ces deux angles ne se trouve pas égale à C, ce dont il s'en faudra sera la somme des deux réfractions. En effet si, l'Observateur étant placé en R, la réfraction fait voir le point A plus élevé qu'il n'est, l'angle observé IRA sera donc plus petit qu'il n'est réellement. Par la même raison si du point A on voit le point R au-dessus de sa vraie position, l'angle RAB sera donné trop grand par l'observation. La différence de ces deux angles sera donc trouvée un peu trop foible, et ce qui lui manquera est la somme des deux erreurs causées par la réfraction qui, par ce moyen, sera connue et déterminée.

308. EXEMPLE. Les PP. Boscovich et Maire, dans l'Ouvrage cité (293), rapportent qu'observant, de l'embouchure de l'*Ausa*, la cime du mont *Carpegna*, ils trouverent l'angle RAB d'élévation apparente $= 2^{\circ} 7'$. Du point R ils observerent l'angle de dépression apparente IRA $= 2^{\circ} 24' 10''$. (La dépression vraie seroit l'angle formé par RA et par une corde parallèle à AE, qui, partant du point R, se termineroit au rayon CA prolongé). Donc la différence des deux angles ou IRA $-$ RAB $= 17' 10''$. Mais la distance AR, réduite, pour plus d'exactitude, à AE, avoit déjà été calculée, par la méthode donnée (50), de 18218,25 toises; ce qui donne C $= 19' 9''$, (290). La somme des deux réfractions est donc $19' 9'' - 17' 10'' = 1' 59''$. En prenant $1'$ pour la demi-somme, on a $2^{\circ} 6'$ pour la valeur réelle de l'angle RAB, et $2^{\circ} 25' 10''$ pour celle de IRA.

Quand on a calculé l'angle C, on connoît aussi BAE $= \frac{1}{2} C$, puisque l'angle formé par la tangente et par la corde, est égal à la moitié de l'arc intercepté. On trouve dès-lors promptement la hauteur RE par la solution du triangle REA. En le considérant, pour abrégér, comme rectangle en E, on a $RE = AE \text{ tang. RAE} = 18218,25 \times \text{tang. } 2^{\circ} 15' 34'',5 = 718,85$. Le P. Maire fixe à 718 toises la hauteur du mont *Carpegna*.

309. Quand la différence de hauteur, entre deux objets, est très petite, on peut avoir un angle de dépression tant d'un côté

que de l'autre. Alors les deux horizons se rencontrent entre les deux objets. Par exemple le point B observé du point E, est déprimé de la quantité BEF, EF étant l'horizon du point E; et si du point B, ayant OR pour horizon, on observe le point E, on le voit déprimé de la quantité RBE. En procédant comme on a vu (307), on trouvera dans ce cas $BCR = BEF + RBE$; et comme chacun de ces angles paroît, à cause de la réfraction, plus petit qu'il n'est réellement, leur somme dans ce cas sera moindre que BCR, de la somme des deux réfractions.

310. En faisant un grand nombre d'observations de ce genre, on peut en conclure une règle générale assez juste pour corriger l'effet de la réfraction sur un angle observé, lorsqu'on ne peut ou qu'on ne veut pas déterminer chaque fois cette correction par l'observation de deux angles. Les PP. Boscovich et Maire établissent que l'effet de la réfraction est la 18^e partie de l'arc de la Terre intercepté; ce qui se trouve à-peu-près exact dans l'exemple (308), dans lequel C étant de 19', la réfraction donnée par l'observation est de 1'. Lambert, dans un Ouvrage intitulé *les Propriétés remarquables de la route de la Lumière*, &c., trouve que la réfraction est la 14^e partie de l'arc de la Terre intercepté: M. de la Lande, Cassini de Thuri, et quelques autres, ont adopté de même la quatorzième partie. On peut prendre le milieu entre ces estimations; car à cause de l'inconstance des réfractions on ne doit pas compter sur une très grande précision. Les PP. Boscovich et Maire enseignent que moins l'objet est élevé sur l'horizon, plus la réfraction est sujette à varier d'un moment à l'autre. Ils recommandent d'éviter, pour ces observations, les heures trop voisines du lever et du coucher du soleil, et de ne pas avoir le soleil en face. Observons de plus, que les réfractions sont en général très irrégulières, lorsque quelque cause météorologique fait varier rapidement le baromètre.

311. La hauteur des montagnes peut difficilement être déterminée avec précision par les méthodes précédentes; l'angle d'élé-

Fig. 6.

vation est toujours trop petit, de sorte qu'une légère erreur dans la mesure de cet angle (254) en produit une sensible dans la hauteur cherchée. Et il est très facile de commettre une erreur d'une minute au moins, soit par l'inconstance des réfractions, soit à cause de la petitesse des instruments qu'on transporte pour de semblables opérations, soit par la difficulté de l'observation, attendu les vacillations que les objets terrestres paroissent éprouver dans la lunette à raison des vapeurs de l'atmosphère, soit enfin parce que le vent permet rarement de faire avec exactitude l'observation très essentielle du fil à plomb (302).

Fig. 31. Supposons que les observations du P. Maire aient été affectées d'une erreur de $34'' \frac{1}{2}$ en plus dans l'angle RAE, (308); on trouvera que $18218,25 \times \text{tang. } 2^\circ 15' = 715,8$. Donc une erreur de $34'' \frac{1}{2}$ seulement en produit une de trois toises sur la hauteur cherchée de la montagne. Et M. l'Abbé Boscovich prévient (Liv. 4, art. 258) que la dernière des causes que nous venons de citer, c'est-à-dire l'oscillation du fil à plomb, occasionnée par l'agitation de l'air, peut seule avoir apporté dans ces observations une erreur de plus d'une minute.

Pour mesurer plus exactement et avec plus de sûreté la hauteur d'une montagne, il vaut mieux se servir du barometre, en observant les préceptes de M. de Luc dans ses *Recherches sur les modifications de l'atmosphère*, Ouvrage dont le mérite est assez connu. M. Megnié, très habile Constructeur d'instruments astronomiques à Paris, fait des barometres à niveau constant, divisés avec une telle exactitude, qu'on peut y observer avec facilité une variation d'un cinquantième de ligne.

De la mesure des distances.

Fig. 7. 312. Soit BC la largeur d'une rivière, ou un intervalle quelconque, dont l'un au moins des points extrêmes, par exemple C, soit accessible; on demande la valeur de BC.

Je mesure (289 et suiv.) une base comme AC, dans la direction et de la longueur les plus convenables (332 et suiv.). Je mesure encore (296 et suiv.) les angles A et C; le troisième, B, me sera connu, et je calculerai la distance BC, comme dans l'exemple (50).

313. Si on opère avec la planchette, on procédera comme il suit. On formera sur le papier, de la manière indiquée (294), un angle a égal à l'angle A sur le terrain; on plantera un piquet au point A; on transportera la planchette en C; et là, après avoir placé, au moyen des pinnules, la ligne ca dans le plan vertical de CA, et de sorte que le point c réponde d'à-plomb au point C, on tournera l'alidade, en la centrant au point c , jusqu'à ce que l'objet situé en B se trouve de même au milieu des pinnules. Alors on mènera le long de la règle la ligne cb jusqu'à la rencontre de la ligne ba ; et on aura sur le papier un triangle cab semblable au triangle CAB sur le terrain. En supposant que la base mesurée AC soit de mille toises, si on appelle x le nombre des toises de l'intervalle cherché BC, on aura $ac : bc :: 1000 : x = 1000 \times \frac{bc}{ac}$. Pour connoître x , il suffit donc de connoître le rapport entre bc et ac ; or on a facilement ce rapport par une échelle quelconque de parties égales, en déterminant exactement avec un compas combien de ces parties répondent à l'intervalle bc , et combien à l'intervalle ac .

Il est évident que la longueur de ac , qui représente la base sur le papier, est arbitraire, et que de cette ligne dépend la grandeur du triangle abc .

314. Déterminer la distance CD, dont les deux points extrêmes sont l'un et l'autre inaccessibles. Fig. 32

Mesurez une base AB, que vous choisirez aussi avantageusement qu'il sera possible (332 et suiv.): relevez, du point B, les angles CBD, CBA, et du point A, les angles CAD, DAB; dans les triangles CAB, DAB, vous connoîtrez alors les trois angles

Fig. 32 et un côté AB ; calculez (IV. 1^e) les côtés AC, AD ; ou les côtés BC, BD ; et deux côtés avec l'angle compris vous étant connus dans le triangle CAD, ou dans le triangle CBD, vous trouverez (IV. 3^e) le troisième côté, qui est la distance cherchée CD.

315. Si les angles ont été pris avec la planchette, les lignes tirées sur le papier seront 1^o. la base *ab* d'une longueur à volonté ; 2^o. les lignes indéfinies *ac*, *ad*, que l'on mène, en relevant les angles au point A ; 3^o. les lignes *bc*, *bd*, menées respectivement jusqu'à la rencontre des deux précédentes, pour former les angles relevés du point B. Cela posé, entre les points d'intersection *c* et *d* on menera la ligne *cd*, et on aura sur le papier une figure *abdc*, semblable au quadrilatère ABDC sur le terrain ; et par conséquent, le nombre des toises de AB étant connu, on aura par une échelle de parties égales, le rapport $\frac{cd}{ab}$, et on déduira de la proportion $ab : cd :: AB : CD$ la valeur en toises de la distance cherchée CD.

On voit combien l'usage de la planchette est commode, puisqu'elle donne les distances, sans qu'il soit besoin de connoître la grandeur des angles, ni de résoudre aucun triangle. Observons cependant qu'elle les donne avec moins de précision, les opérations graphiques ne pouvant jamais atteindre à l'exactitude du calcul.

316. Si les points A, B, C, D, ne sont pas tous quatre dans un même plan, la somme des angles CAD et DAB, mesurés dans le plan de chaque triangle respectif, ne sera pas égale à l'angle CAB, comme nous le verrons bientôt (329), et de même on n'aura point $CBD + ABC = ABD$. Cette erreur ne peut être corrigée dans l'usage de la planchette ; mais elle est ordinairement légère et même insensible. Dans les opérations délicates on se sert du graphometre ou du quart de cercle, et on corrige l'erreur par le calcul, (320 et suiv.), ou, pour éviter toute erreur sur la distance cherchée CD, on mesure aussi les angles CAB, ABD, et on n'emploie, pour la solution de chaque triangle, que les angles de

de ce triangle, qui ont été donnés immédiatement par l'observation.

317. Si on ne pouvoit mesurer commodément une base AB, telle que de deux de ses points, A et B, on pût découvrir les objets C et D; alors on feroit, pour déterminer la distance AB, les opérations indiquées (312, 313), ou celles exposées (314, 315), selon que se trouvera située la base qu'on pourra mesurer. L'intervalle AB étant ainsi connu, on en déduira CD, comme nous l'avons dit.

Il est facile de concevoir qu'une seule base étant mesurée, on peut, en ne mesurant plus que les angles, passer de triangle en triangle, et déterminer les distances respectives de tous les lieux d'une province, d'un royaume, &c.

De la réduction des angles au centre de la station.

318. Il arrive rarement qu'on puisse relever un angle en établissant l'instrument au centre de l'objet qu'on a observé des autres points de station. Si cet objet est, par exemple, la croix d'un clocher, la cime d'un arbre, une cheminée, &c., l'angle relevé ne peut être le même que s'il eût été observé précisément du centre de ces signaux, et il faut alors le réduire à ce point. La correction n'est ordinairement que de quelques secondes; on ne la calcule alors que dans les opérations où l'on apporte le plus grand scrupule. Voici comment on la détermine.

Soit *mnro* la base d'un clocher dont la pointe élevée verticalement sur le centre C a été observée de la station A ou B, en relevant l'angle CAB ou ABC; et soit ACB l'angle qu'on veut connoître. Si l'on ne peut placer commodément l'instrument qu'au point E, l'angle observé sera AEB; il faut le réduire à l'angle ACB. Pour y parvenir, faisons $ACB - AEB = - \delta E$, et observons que les deux triangles ACB, AEB ont un côté commun AB; nous aurons (284),

$$- \delta E = \left(\frac{\delta AE \cot A}{AE} + \frac{\delta BE \cot B}{BE} \right) R''.$$

Y

Fig. 33

Fig.33. Si le point E est plus distant du point A que le point C, alors δAE sera négatif; si la distance est égale, $\delta AE = 0$, et le second membre de la formule se réduit alors à un seul terme. (Tout ceci doit s'entendre de même de δBE). On se rappellera de plus que la cotangente d'un angle obtus est négative; et en employant les signes convenables, la formule servira pour toutes les positions possibles du point E, relativement au point C. Quand le second membre de l'équation se trouve être négatif, la correction δE est positive, et l'on a $E < ACB$.

Pour calculer la formule, il faut connoître δAE et δBE . Si on prend $AD = AG = AE$, et $AF = AC$, on aura $\delta AE = GC = DF$. Quand on ne pourra mesurer GC , il sera toujours facile de mesurer DF , en prenant à vue d'œil sur le terrain deux points, D, F, à-peu-près aussi distants du point A, que les points E et C; les petites erreurs sur cette mesure sont insensibles dans le calcul. (On s'y prendroit de même pour connoître $\delta BE = CH$). Quant aux autres quantités de la formule, il suffit de les connoître à-peu-près.

319. Il y a un moyen plus expéditif, qui est celui qu'on enseigne ordinairement, mais qu'on n'a appliqué aux différents cas que par des regles un peu étendues. Il consiste à mesurer GE , EH . Alors on a $GAE = \frac{GE}{AE} \times R''$, en prenant l'angle GAE au lieu du sinus; on a de même $EBH = \frac{EH}{BE} \times R''$: or $GAE + EBH = AEB - ACB$; et par conséquent

$$GAE + EBH = \delta E.$$

Pour employer cette équation dans tous les cas, on donnera le signe négatif au petit angle GAE , quand il sera en dedans du triangle ABC ; on en usera de même pour le petit angle EBH ; et l'on aura toujours ainsi la correction δE avec le signe qu'il faudra lui donner en l'appliquant à l'angle observé AEB .

Concluons qu'il y a deux positions à choisir de préférence, lorsqu'on le peut. La plus avantageuse est d'établir le centre de

l'instrument en un point comme G ou H, sur la direction de l'une des lignes AC ou BC. Alors l'un des deux petits angles est nul, et le calcul de l'autre seulement donne la réduction au centre par le moyen de la dernière équation. Si l'on ne peut prendre cette position, on fera ensorte de placer l'instrument de manière qu'on ait $\angle A E = 0$, ou $\angle B E = 0$. Alors le calcul de la formule (318) sera réduit à un seul terme.

De la réduction des triangles d'un plan à un autre plan.

320. Après la réduction de chaque angle observé, au centre de chaque station respective, il faut ordinairement réduire les parties d'un ou de plusieurs triangles à un même niveau.

Supposons que les lignes AP, AE, PE soient trois cordes d'arcs terrestres, ou, ce qui revient au même, que les points A, P, E soient à égale distance du centre de la Terre; supposons encore le point R plus élevé que ces trois points de la quantité RE : il s'agit de réduire au triangle APE le triangle APR, dont les parties auront été déterminées par les méthodes précédentes. Nous considérons RE comme étant perpendiculaire aux cordes AE, PE, quoique chacun des angles REA, REP, soit égal à 90° , plus la moitié de l'arc soutenu par chacune de ces cordes respectivement, comme il est aisé de le voir dans la figure 31, pour l'angle REA formé par une corde et une sécante. Dans la pratique il ne résulte qu'une erreur insensible de cette supposition, d'ailleurs très avantageuse pour simplifier les corrections et trouver des règles générales pour la réduction des triangles d'un plan à un autre.

321. Avant d'aller plus loin, il est bon de se convaincre que les parties du triangle APR ne sont point égales aux parties correspondantes du triangle APE, à l'exception du côté commun AP. En effet AR est $>$ AE, comme il est facile de le reconnoître dans la fig. 31. Par la même raison PR est $>$ PE; et en comparant les triangles APR, APE aux triangles ACB, AEB de la fig. 33, qui

sont dans les mêmes circonstances, mais couchés sur un plan commun, on verra d'un coup-d'œil que le triangle qui a deux côtés plus longs, n'a pas les angles égaux à ceux du triangle qui a deux côtés plus courts.

Fig. 34 322. Cela posé; on demande que le triangle APR soit réduit au triangle APE, dont les trois sommets A, P, E, sont supposés à une égale distance du centre de la Terre. Nous appellerons *horizon commun* de ces trois points, la section ou le plan qui leur est commun. Cherchons d'abord l'angle PAE, étant donnés l'angle PAR et l'angle vrai d'élévation RAE, (305).

Dans les deux triangles rectangles AER, PER, qui ont un côté commun RE, on a $RE^2 = AR^2 - AE^2 = PR^2 - PE^2$; donc $AR^2 - PR^2 = AE^2 - PE^2$. Ajoutant des deux côtés AP^2 , et divisant l'équation par $2 AP$, on aura $\frac{AP^2 + AR^2 - PR^2}{2 AP} = \frac{AP^2 + AE^2 - PE^2}{2 AP}$. Donc (232), $\cos.PAR \times AR = \cos.PAE \times AE$; et par conséquent (211)

$$\cos.PAE = \frac{\cos.PAR}{\cos.RAE}.$$

On trouvera de même $\cos.APE = \frac{\cos.APR}{\cos.RPE}$. D'où l'on tire cette règle générale pour réduire les angles qui ont leur sommet sur le plan de réduction : *Le cosinus de l'angle réduit est égal au cosinus de l'angle observé, divisé par le cosinus de l'angle d'élévation.*

323. Lorsqu'on aura réduit les angles en A et en P, le troisième, E, sera connu. Cependant nous allons donner une formule pour réduire, quand on le voudra, l'angle R indépendamment des deux autres. Cette formule nous sera encore utile pour la solution d'un autre problème intéressant (344),

Dans les deux triangles APR, APE, qui ont un côté commun AP, on a (III. 7°), $AP^2 = AR^2 + PR^2 - 2 AR \times PR \times \cos.ARP = AE^2 + PE^2 - 2 AE \times PE \times \cos.AEP$. De la

dernière équation on tire $\cos.AEP = \frac{AR \times PR \times \cos.ARP - RE^2}{AE \times PE}$; ce qui donne (211, 210)

$$\cos.AEP = \frac{\cos.ARP - \sin.RAE \sin.RPE}{\cos.RAE \cos.RPE}, \text{ v. page 166.}$$

ou, pour plus de facilité dans le calcul numérique,

$$\cos.AEP = \tan.RAE \tan.RPE \left(\frac{\cos.ARP}{\sin.RAE \sin.RPE} - 1 \right).$$

De la première de ces deux formules, plus facile à énoncer, je déduis cette règle pour réduire l'angle unique ayant son sommet hors du plan de réduction : *Le cosinus de l'angle réduit est égal au cosinus de l'angle observé, duquel on aura soustrait le rectangle des sinus des angles d'élévation, et qu'ensuite on aura divisé par le rectangle des cosinus de ces mêmes angles.*

324. La réduction des côtés n'a nulle difficulté. $AE = AR \cos.RAE$, $PE = PR \cos.RPE$.

Quand on veut procéder avec une extrême exactitude; au lieu de faire les réductions précédentes, on peut résoudre les triangles RAE, RPE, comme obliquangles (320); et après avoir déterminé les côtés du triangle APE, calculer les angles par les formules (IV. 5° ou 6°, &c.).

Quoiqu'indépendamment des angles d'élévation, il soit toujours bien d'observer aussi les angles correspondants de dépression, puisqu'ils se servent réciproquement de vérification, et qu'ils donnent ensemble la valeur actuelle de la réfraction (307, 308); cependant nous n'en faisons aucune mention dans les formules précédentes, parce qu'un triangle se réduit ordinairement au plan des points les plus bas. Au surplus les formules sont les mêmes dans les deux cas.

325. Soit maintenant le triangle ARr, dont on demande la réduction au plan AEe, où les points E, e, des lignes verticales RE, re, sont supposés à la même distance du centre de la Terre, que le point A. Fig. 35

Qu'on prolonge le plan AEe jusqu'en P, c'est-à-dire jusqu'à la

rencontre de la ligne RP, menée par les points R, *r*. Les verticales RE, *re*, sont toujours supposées perpendiculaires au plan AEeP, et par conséquent aux lignes de ce même plan, avec lesquelles elles se rencontrent.

Voyons en premier lieu comment nous réduirons l'angle connu RAr à l'angle EAe.

$\sin. rPA$ ou $\sin. RPA = \frac{Ar \sin. PAR}{Pr} = \frac{AR \sin. PAR}{PR}$. Mais $Pr : PR :: re : RE :: Ar \sin. rAe : AR \sin. RAE$; en substituant ce dernier rapport au premier, dans la dernière équation, nous aurons $\frac{\sin. PAR}{\sin. rAe} = \frac{\sin. PAR}{\sin. RAE}$; ou $\sin. PAR : \sin. PAR :: \sin. RAE : \sin. rAe$; d'où nous tirerons (10), (II. 12°), $\text{tang.}^{\frac{1}{2}}(PAR + PAR) : \text{tang.}^{\frac{1}{2}}(PAR - PAR) :: \text{tang.}^{\frac{1}{2}}(RAE + rAe) : \text{tang.}^{\frac{1}{2}}(RAE - rAe)$. Mais $PAR - PAR$ est l'angle connu RAr; et les deux derniers termes sont composés des angles d'élévation RAE, *rAe*, supposés connus par l'observation; donc le premier terme de l'analogie sera seul inconnu; et nous aurons

$$\text{tang.}^{\frac{1}{2}}(PAR + PAR) = \text{tang.}^{\frac{1}{2}}RAR \times \frac{\text{tang.}^{\frac{1}{2}}(RAE + rAe)}{\text{tang.}^{\frac{1}{2}}(RAE - rAe)}.$$

Jusqu'à présent on n'avoit pu obtenir cette formule que de la Trigonométrie sphérique.

Connoissant la demi-somme et la demi-différence de PAR et PAR, on a (230) la valeur absolue de chacun de ces angles. Ensuite on a PAE et PAe par le moyen de la formule (322). La différence de ces deux angles est l'angle cherché EAe.

Quoique les réductions se fassent d'ordinaire, comme nous l'avons dit, au niveau du point le plus bas, cependant si des deux objets R, *r*, l'un étoit élevé et l'autre abaissé, on voit aisément que dans ce cas le point P tomberoit entre les deux points E, *e*, et que l'angle connu RAr seroit égal à $PAR + PAR$; alors dans la dernière analogie le terme inconnu seroit le second.

326. Si les angles d'élévation, RAE, *rAe*, des deux objets étoient égaux, l'équation $\frac{\sin. PAR}{\sin. rAe} = \frac{\sin. PAR}{\sin. RAE}$ fait voir qu'alors $\sin. PAR =$

sn.PAR, ou que (19), $PAR = 180^\circ - PAr$. Cela posé, la formule (322) fait voir de même que $\cos.PAE = \cos.PAe$, ou que $PAE = 180^\circ - PAe$. Donc $E Ae = PAE - PAe = 180^\circ - 2 PAe$, ou $PAe = 90^\circ - \frac{1}{2} EAe$; et par conséquent $\cos.PAe = \sin.\frac{1}{2} EAe$. On prouveroit de même que $\cos.PAr = \sin.\frac{1}{2} RAr$. Ainsi dans ce cas on aura recours à la formule (322), qui devient

$$\sin.\frac{1}{2} EAe = \frac{\sin.\frac{1}{2} RAr}{\cos.rAe}, \text{ ou}$$

le sinus de la moitié de l'angle réduit est égal au sinus de la moitié de l'angle observé, divisé par le cosinus de l'angle d'élévation.

Si l'un des deux objets étoit élevé et l'autre abaissé, de manière que l'angle d'élévation fût égal à l'angle de dépression, on auroit $PAR = PAr = \frac{1}{2} RAr$, et $PAE = PAe = \frac{1}{2} EAe$; alors la formule seroit

$$\cos.\frac{1}{2} EAe = \frac{\cos.\frac{1}{2} RAr}{\cos.rAe}.$$

327. Pour réduire l'angle ARP à AEP ou AEe, par le moyen de la formule (323), il faut connoître l'angle RPE. Or si l'on observe qu'ayant $PR : Pr :: RE : re$, on a $PR : PR - Pr :: RE : RE - re$, et que $PR : RE :: 1 : \sin.RPE$; on en conclura que $Rr : RE - re :: 1 : \sin.RPE = \frac{RE - re}{Rr} = \frac{AR \sin.RAE - Ar \sin.rAe}{Rr}$. Prenant les sinus des angles au lieu des côtés opposés, on a

$$\sin.RPE = \frac{\sin.RrA \sin.RAE - \sin.ARr \sin.rAe}{\sin.RAr}.$$

Pour réduire l'angle ArR à l'angle AeE, on réduira d'abord, au moyen de la formule (323), l'angle ArP à l'angle AeP; le supplément de celui-ci sera l'angle cherché AeE.

On a déjà vu (324) comment se réduisent les côtés adjacents aux angles d'élévation. Quant au côté Rr, il est facile de trouver que $Ee = Rr \cos.RPE$.

328. On s'épargnera les réductions précédentes, (qui ne sont point applicables à la planchette), lorsque le plan du quart de

cercle ou du graphometre sera disposé horizontalement, et que les lunettes pourront se mouvoir verticalement et se diriger vers les objets, soit au-dessus soit au-dessous du plan de l'instrument. L'angle se mesure alors sur le plan de l'horizon, puisque l'instrument est dans ce même plan, et que le mouvement vertical de la lunette ne change rien à la position de l'alidade. Observons cependant que dans ce cas chaque angle est mesuré sur le plan horizontal de chaque station respective, et non sur un plan exactement commun à tous les angles; ensorte que si les distances

Fig.31 étoient considérables, l'inclinaison, par exemple, de l'horizon BA du point A à l'égard de l'horizon OI du point R, pourroit quelquefois mériter attention. Cette inclinaison est visiblement égale à l'angle C, ou à l'arc de la Terre compris entre les diverses stations.

Fig.35 329. Si l'on suppose que du point A on ait observé les distances angulaires de trois objets E, r, P, l'un desquels, r, soit plus élevé que les autres, il est clair maintenant, par la formule (322), que la somme des deux angles EAr, rAP, sera plus grande que l'angle EAP, comme nous avons promis (316) de le démontrer.

Fig.36 330. Soit C le centre de la Terre, et soit représenté par la corde AB le plan vu de côté d'un triangle réduit, dans toutes ses parties, à un horizon commun, par les méthodes précédentes. Si on veut abaisser ce triangle au plan de la corde DE, cela n'altérera les angles en rien, puisque les deux plans sont parallèles; il faut seulement diminuer les côtés. Cette correction est facile; on a (278), $\delta AB : \delta BC :: AB : BC :: (247) 2 \cos. BAC : 1 :: 2 \sin. \frac{1}{2} C : 1$. Connoissant $\delta BC = BE$, quantité de laquelle on veut que le plan du triangle soit abaissé, on trouvera par l'une quelconque des trois analogies précédentes, la valeur de δAB , ou la diminution à faire sur chaque côté du triangle qu'il s'agit d'abaisser.

Quand on a une chaîne de triangles, dans chacun desquels on a fait les réductions précédentes; par la dernière réduction ci-dessus

dessus on les ramène tous à un même niveau, s'ils ne s'y trouvent pas. Ordinairement c'est au niveau de la mer que se fait la réduction générale.

Si au lieu des cordes on vouloit avoir les arcs correspondants, il est facile de les déduire des cordes ; car la troisième équation (152) donne pour la différence de l'arc à la corde, $A - 2 \sin. \frac{1}{2} A = \frac{\sin. \frac{3}{2} A}{3} = \frac{(2 \sin. \frac{1}{2} A)^3}{24}$. Je n'emploie que le premier terme de la série, parce que les termes ultérieurs sont insensibles. On observera que pour avoir cette différence, et par conséquent l'arc, en parties de la corde exprimées, par exemple, en pieds, toises, &c., il faut diviser l'expression $\frac{(2 \sin. \frac{1}{2} A)^3}{24}$, par le carré du rayon de la Terre exprimé en mêmes parties de la corde ; ce qui est conforme aux règles données (290).

Des conditions les plus avantageuses des triangles ; et de la construction des signaux.

331. On ne doit pas se contenter de mesurer deux angles dans un triangle ; il faut toujours, lorsqu'on le peut, mesurer aussi le troisième. Si la somme des trois angles réduits au centre des stations respectives est à très peu près de 180° , plus ou moins, on sera sûr de les avoir bien observés, et on partagera l'erreur également entre tous trois, lorsqu'on n'aura aucun motif particulier de douter d'une observation plus que d'une autre : si, par exemple, la somme des trois angles observés est de $180^\circ 0' 30''$, on diminuera de $10''$ chaque angle, avant de calculer les côtés et de faire la réduction à un horizon commun. Cette erreur est la plus grande qu'on puisse commettre, lorsqu'on observe attentivement, et qu'on emploie un quart de cercle de trois pieds de rayon, vérifié avec le scrupule nécessaire, comme on peut le voir dans les Ouvrages que nous avons cités (293). Si le rayon de l'instrument n'est que d'un demi-pied, l'erreur peut aller jusqu'à $3'$, lorsque le nonius donne

la minute ; jusqu'à 6', lorsqu'il donne les deux minutes , et ainsi de suite. Puisqu'il est donc absolument impossible d'éviter toute erreur en relevant les angles , il devient essentiel de faire en sorte que cette erreur influe le moins qu'il se pourra sur les côtés , dont la détermination est le but de ces opérations. Or cela se réduit à chercher de quelle grandeur doivent être les angles , pour que l'erreur dans leur mesure influe le moins possible sur les côtés. Il est vrai que les circonstances locales permettent rarement de choisir les triangles conformément aux règles que nous trouverons. L'exposition de ces règles sera néanmoins très utile , soit parce qu'elle fournira les moyens de s'y conformer , au moins d'aussi près qu'il sera possible , soit parce que , quand on sera forcé de s'en éloigner beaucoup , on pourra encore évaluer à-peu-près l'incertitude des résultats.

332. On sait que dans un triangle rectiligne la mesure des angles ne suffit pas (236) pour qu'on puisse déterminer les côtés : il est donc nécessaire d'avoir dans chaque triangle un côté ou mesuré immédiatement , ou déterminé trigonométriquement par le moyen d'autres triangles dans le premier desquels il faudra toujours qu'on ait mesuré une base à la toise. Le choix de la base est donc l'opération fondamentale. Aussi nous allons chercher d'abord quelle doit être sa longueur et sa direction , en supposant qu'on soit libre de les établir l'une et l'autre à volonté.

Fig. 7. Dans un triangle quelconque ABC, on a (III. 1^e) , $AB \sin.A = BC \sin.C$. Soit AB la base, que nous supposerons mesurée sans erreur , parce que dans ces sortes de mesures , lorsqu'on y apporte quelque attention , l'erreur ne peut être sensible , et que d'ailleurs nous ne nous proposons ici que d'examiner l'erreur des angles. Faisant donc AB constant , et différentiant l'équation , on a $AB \cos.A \delta A = \sin.C \delta BC + BC \cos.C \delta C$. Comme on ne connoît pas la grandeur précise de chacune des erreurs δA et δC des angles A et C , (l'angle B n'entre pas dans le calcul de BC) , on supposera ces erreurs égales , d'autant plus qu'elles sont commises

avec un même instrument. Pour abréger, désignons par e chacune des erreurs; l'équation donnera $\delta BC = e \times \frac{AB \cos. A - BC \cos. C}{\sin. C}$; et en substituant $\frac{BC}{\sin. A}$ à $\frac{AB}{\sin. C}$, on aura

$$\delta BC = e \times BC (\cot. A - \cot. C),$$

Cette équation (dans le calcul de laquelle on se souviendra que e , pris en secondes, doit être divisé par R'') donne l'erreur δBC que produiroient dans le calcul de BC les erreurs des angles A et C . Pour que ces erreurs (supposées égales) n'influent point sur le côté BC , il suffit donc qu'on ait $A = C$; car il est évident qu'alors l'équation se réduit à zéro.

Mais comme les deux erreurs δA , δC , que la différentiation suppose dans un même sens, pourroient avoir été commises en sens opposés, et qu'alors on auroit $\delta BC = \pm e \times BC (\cot. A \pm \cot. C)$, il faut chercher de quelle grandeur doivent être les angles A et C , pour que la somme de leurs cotangentes ait la moindre valeur possible; il est clair, par l'équation, que ce sera le cas de la moindre valeur de δBC . Or (II. 21°), $\cot. A + \cot. C = \frac{\sin. (A + C)}{\sin. A \sin. C} = \frac{\sin. (A + C)}{\frac{1}{2} \cos. (A \frown C) - \frac{1}{2} \cos. (A + C)}$, (II. 16°), ou $\cot. A + \cot. C = \frac{2 \sin. B}{\cos. (A \frown C) + \cos. B}$, (III. 57°, 66°). Donc quelle que soit la grandeur de l'angle B , la valeur du second membre sera toujours la moindre possible, lorsque $\cos. (A \frown C)$ sera le plus grand possible, c'est-à-dire quand on aura $A = C$.

D'où nous concluons, pour règle générale, que *la condition la plus avantageuse d'un triangle, quand on veut déterminer un côté seulement, est que la base soit égale au côté cherché*. Telle est la condition essentielle. Quant à l'angle compris B , il est sans doute avantageux, dans le cas de $\cot. A + \cot. C$, qu'il soit le plus petit possible; mais sa grandeur est indifférente dans le cas de $\cot. A - \cot. C$, (en supposant l'égalité des deux erreurs); et il est inutile de s'imposer des restrictions générales, à moins d'une nécessité générale. On donnera donc à la base la direction qui

paraîtra la plus commode, en observant seulement que les angles A et C ne soient pas trop petits.

333. Puisque par la règle précédente la base doit être égale au côté cherché, il est évident que *la condition la plus avantageuse d'un triangle, quand on veut déterminer deux côtés, est que le triangle soit équilatère.*

334. Rarement il arrive que l'on puisse mesurer commodément une base qui soit aussi longue que les côtés cherchés. En supposant donc que la longueur de la base soit limitée, mais qu'au moins sa direction puisse être choisie à volonté, cherchons quelle doit être cette direction dans le cas où l'on veut déterminer l'un seulement des deux autres côtés du triangle.

Soit toujours AB la base, BC le côté cherché. Il faut trouver la moindre valeur de $\cot.A \mp \cot.C$, (332), lorsqu'on ne peut avoir $A = C$.

Or, 1°. dans le cas du signe négatif, on a (III. 51°, 104°),

$$\cot.A - \cot.C = \frac{AB - BC \cos.B}{BC \sin.B} \rightarrow \frac{BC - AB \cos.B}{AB \sin.B} = \frac{AB^2 - BC^2}{AB \times BC \sin.B}.$$
 On suppose que, par des circonstances locales, les grandeurs de BC et de AB ne soient pas arbitraires; autrement on accourciroit BC ou on allongeroit AB, jusqu'à ce qu'on eût $AB = BC$, (332). Donc, AB et BC étant constants, on voit clairement dans la dernière expression, que la moindre valeur de $\cot.A - \cot.C$ a lieu lorsque $B = 90^\circ$.

2°. Dans le cas du signe positif, on a (III. 101°), $\cot.A + \cot.C = \cot.A + \frac{\sqrt{(BC^2 - AB^2 \sin.^2 A)}}{AB \sin.A} = \cot.A + \sqrt{\frac{BC^2}{AB^2 \sin.^2 A} - 1}$. En raisonnant comme dans le cas précédent, on voit que la moindre valeur de la fraction sous le signe radical, aura lieu lorsqu'on aura $A = 90^\circ$. Mais alors aussi $\cot.A$ disparaît; donc la moindre valeur de $\cot.A + \cot.C$ a lieu lorsque $A = 90^\circ$. Telle est la règle générale que donne Bouguer, (*Fig. de la Terre*, p. 88). Mais nous avons trouvé que dans le cas de $\cot.A - \cot.C$, il faut qu'on ait $B = 90^\circ$. Donc comme les angles A et B ne peuvent

être tous deux droits , il est à propos , à ce qu'il nous semble , d'embrasser tous les cas en prenant un milieu , et faisant $A = B$.

Si l'on applique au côté AC tout ce que nous avons dit du côté BC , on aura des résultats semblables. Donc en général , *quand la base ne peut être égale au côté ou aux côtés cherchés , la condition la plus avantageuse du triangle est que la base soit la plus longue possible , et que les deux angles sur la base soient égaux.*

Je dis que *la base doit être la plus longue possible* , de peur que , de ce qu'on a trouvé qu'il seroit avantageux que chacun des angles sur la base fût de 90° , quelqu'un ne conclût qu'il est à propos que la base soit la plus courte possible. La règle fondamentale est que la base soit égale aux côtés cherchés , (332, 333) ; c'est une règle qu'il ne faut enfreindre que le moins qu'il se pourra , et c'est seulement pour diminuer les erreurs qui résulteroient d'une infraction forcée que nous disons qu'il est à propos de faire le triangle isoscele.

335. L'équation $\Delta BC = e \times BC$ ($\cot.A \mp \cot.C$) fait voir que la quantité e ($\cot.A \mp \cot.C$) que nous avons examinée jusqu'à présent , est proportionnelle à la grandeur de BC. En supposant donc qu'on ait le choix de déterminer une distance BC par le moyen d'un seul triangle équilatere ABC, ou bien, en la divisant en plusieurs parties, par le moyen de plusieurs triangles équilateres plus petits ; BDE , EDG , &c. , il convient de discuter auquel des deux partis on doit donner la préférence.

Soit donc BC divisé en trois parties égales BD , DF , FC , et soit BE la base au lieu de AB. En résolvant le triangle BDE , on trouve BD et DE. De-là prenant DE pour base , on résoudra le triangle DGE pour trouver DG. Connoissant DG , on résoudra le triangle DGF pour trouver DF , FG ; et poursuivant ainsi , on déterminera toutes les parties de BC. Or dans cette opération il faut observer qu'il y a deux causes d'erreur dans la résolution du second triangle DGE ; l'une est l'erreur commise dans l'observa-

Fig.37

tion de ses angles , erreur dont nous avons traité jusqu'à présent ; l'autre est l'erreur sur la base DE , produite par celles des angles dans la résolution du premier triangle BDE.

Pour savoir quelle erreur produit sur le côté cherché l'erreur de la base , supposons constants les angles opposés (285), et nous aurons (278) les erreurs proportionnelles à la grandeur des côtés. Soit supposée d'un pied l'erreur produite par celles des angles sur chacun des côtés BD , DE du premier triangle. Il s'ensuit que l'erreur de DG sera de deux pieds , un à raison du côté DE, et l'autre à raison des angles du triangle DGE. L'erreur de DF et de FG sera de trois pieds , savoir deux à cause de DG , et un à cause des angles du triangle DFG. En procédant ainsi on trouve cinq pieds pour l'erreur de CF. Si BC eût été divisé en quatre parties , l'erreur de la quatrième eût été de sept pieds , et les erreurs croîtroient ainsi toujours en progression arithmétique , si le nombre des parties de BC étoit plus considérable. Maintenant si l'on somme les erreurs 1 , 3 , 5 pour BD , DF , FC , on aura neuf pieds pour l'erreur totale de BC déterminée par le moyen de cinq triangles. Au contraire en n'employant qu'un seul triangle ABC , l'erreur ne seroit que de trois pieds , c'est-à-dire triple de l'erreur de BD , puisque $BC = 3BD$, et que l'erreur provenant des angles est proportionnelle au côté cherché , comme nous l'avons vu au commencement de cet article. Il semble donc qu'on devroit en conclure qu'il ne faut multiplier les triangles que le moins qu'il se pourra. Mais on doit réfléchir que l'erreur de neuf pieds sur BC est le résultat de l'accumulation de toutes les erreurs des cinq triangles ; ce qui suppose toutes ces erreurs commises dans le même sens. Or cette accumulation est non-seulement infiniment peu probable , mais elle est même démentie et réduite , pour ainsi dire , à zéro par l'expérience. Pour des déterminations importantes et délicates , on mesure deux bases , l'une au commencement , l'autre à la fin des triangles , comme , par exemple , BE , CH ; c'est le moyen le plus sûr pour vérifier la justesse des opérations trigono-

métriques intermédiaires. Or les Académiciens François ne trouverent, au Pérou, que deux pieds d'erreur entre la mesure et le calcul, sur la dernière base, à laquelle ils parvinrent par une série de 28 triangles qui servirent à déterminer une distance BC de 180 milles, ou à-peu-près de 75 lieues communes de France. De même l'erreur ne fut pas de cinq pieds sur la seconde base, après une chaîne de onze triangles, par lesquels M. l'Abbé Boscovich détermina une distance de 130 milles ou de 54 lieues environ. Et si les erreurs s'étoient accumulées, en les supposant de 15'' par chaque angle, l'erreur de la seconde base eût été à-peu-près de 28 toises au Pérou, et de 19 en Italie; en faisant les calculs d'après ma supposition des triangles équilatères. On ne peut desirer une preuve plus claire de ce que démontrent d'ailleurs les regles de probabilité, que les erreurs se compensent lorsqu'on multiplie les triangles. Il est évident, au surplus, que cette compensation a lieu d'autant plus sûrement, lorsqu'on observe chacun des trois angles de chaque triangle, et qu'on réduit leur somme à 180° , (331).

336. Peut-être pensera-t-on que les regles précédentes sont rarement utiles, parcequ'on ne trouve pas facilement des clochers et autres objets élevés et distincts, sur lesquels on puisse diriger les instruments, pour former des triangles avec les conditions les plus avantageuses. Mais on peut très souvent suppléer à ces objets par des signaux plantés exprès dans les positions où on les desire. M. l'Abbé Boscovich élevoit des especes de cabanes quarrées ou circulaires, de quatorze pieds de diametre, et d'une élévation quelquefois plus grande, et construites avec de longues branches enfoncées profondément en terre, inclinées entre elles vers le faite, et unies par des branches transversales assujetties avec des cordes et des clous. Ces cabanes, revêtues de feuillages, s'appercevoient, même avec de foibles lunettes, jusqu'à une distance de cinquante milles, lorsqu'elles étoient posées sur le sommet des hauteurs les plus élevées, de maniere à ce que leur image fût projetée sur le Ciel. Sans cette dernière condition, il faut, pour les

appercevoir, ou diminuer la distance, ou couvrir les signaux avec des draps ou autres matieres tirant sur le blanc. Dans une semblable circonstance, M. l'Abbé Boscovich se servit d'une toile de chanvre enduite de chaux, et alors il distinguoit le signal à 24 milles de distance. Picard employa des feux et avec succès. Un feu large de trois pieds étoit aperçu à une distance de 36 milles.

De la maniere de lever les Plans, et de dresser les Cartes topographiques et les Cartes géographiques de peu d'étendue.

337. On nomme *plan* d'un terrain, d'une ville, &c., un dessin où sont tracées les lignes qui représentent les contours du terrain et de ses principales parties, de sorte que ces lignes, prises ensemble, forment une figure parfaitement semblable à celle du terrain ou de la ville considérée sur un plan horizontal, abstraction faite des élévations. Supposons qu'un clocher soit rasé au niveau du sol; la figure que formeront les bords extérieurs et intérieurs des murs du clocher, vus sur la surface plane du terrain, sera ce qu'on appelle le plan du clocher. Quand on fait le plan d'un seul bâtiment, on peut désigner l'épaisseur des murs par un double trait; mais lorsque le plan contient un espace plus étendu, on ne peut ordinairement y tracer le périmetre des édifices que par de simples lignes.

Un plan est *topographique*, lorsqu'il présente toutes les particularités du terrain dessiné, par exemple les églises, les maisons ou les groupes de maisons, les moulins, les parcs, les jardins, les deux rives des rivières, les canaux, les torrents, les aqueducs, les chemins grands ou petits, &c. Les cartes *géographiques* désignent simplement la situation des villes, des bourgs, des forêts et des montagnes, et le cours des fleuves. Nous ne parlerons pour le moment que de celles de pays peu étendus; car la construction de la carte d'un Royaume, ou de plusieurs États, exige, comme nous le verrons, la connoissance de la Trigonométrie sphérique.

Nous

Nous avons vu (315) comment on forme avec la planchette le *Fig.32*
 quadrilatere *abdc*, exactement conforme au quadrilatere *ABDC*
 sur le terrain ; ou, ce qui revient au même, comment on déter-
 mine la position des deux objets *C* et *D*, relativement aux deux
 stations *A* et *B*. On déterminera absolument de même la position
 d'un nombre quelconque d'objets qu'on puisse appercevoir des
 stations *A* et *B*, au moyen de lignes tirées des points *a* et *b* dans
 la direction de chacun de ces objets, comme on a fait pour les
 lignes *ac*, *ad*, *bc*, *bd*. Ces lignes sont ordinairement tracées au
 crayon, et s'effacent avec la gomme élastique ou la mie de pain,
 lorsqu'on a marqué à l'encre les points *C*, *D*, &c. La base même
 s'efface aussi, lorsqu'on a déterminé les positions de tous les objets
 que doit renfermer le plan.

Si l'on veut de plus tracer sur le plan le contour d'un champ,
 d'un jardin, &c., on marquera à l'encre les lignes du périmetre,
 tirées successivement d'un angle à l'autre, telles que *AB*, *BD*,
CD, *AC*, en supposant que *ABDC* soit le contour du champ, du
 jardin, &c. Quant aux objets qu'on ne verroit des stations *A* et *B*
 que sous des angles trop inégaux (333, 334), on fera bien de se
 transporter, pour déterminer leurs positions par l'observation, aux
 extrémités de l'un des côtés (par exemple de *AC*, ou de *CD*, ou
 de *BD*, &c.) qu'on aura d'abord déterminés des stations *A* et *B*,
 et en choisissant celui de ces côtés qui donnera les angles les moins
 inégaux. Sur ce côté choisi, qu'on peut appeller une seconde base,
 on opérera de la même maniere que sur la premiere base *AB* ; et
 l'on passera ainsi de base en base, jusqu'à ce que l'on ait sur la
 carte la position de tous les objets qu'on veut relever.

La premiere chose que l'on doive faire est de former au bas du
 plan une échelle correspondante à la grandeur qu'on veut donner
 au dessin. Sur cette échelle on prendra la longueur que doit avoir
 la base qu'on aura mesurée à la toise. Je suppose que cette base
 soit longue de mille toises, et que l'échelle soit divisée en pouces
 et lignes ; si on prend sur cette échelle un intervalle de 8 pouces

4 lignes, ou de 100 lignes, pour représenter la base sur le papier, alors un espace d'une ligne sur le dessin, répondra à 10 toises sur le terrain. On fera ensorte que la base soit, autant qu'il sera possible, au milieu du terrain dont on levera le plan, et que les extrémités de cette base soient situées de manière que de ces points on puisse découvrir un grand nombre des objets à comprendre dans le plan. Selon la situation de la base sur le terrain, relativement à son périmètre, on décrira de même sur le papier la ligne qui représentera la base, en la plaçant soit au milieu, soit plus haut ou plus bas, plus à droite ou à gauche, et prenant la longueur de cette ligne, comme nous l'avons dit, sur l'échelle. Cela fait, les intersections des lignes tirées d'après l'observation de chaque objet, faite de deux stations différentes, donneront la position respective de chaque objet sur la carte, et le plan sera levé.

Pour éviter les méprises, il est à propos d'écrire à l'extrémité de chaque ligne le nom de l'objet dans la direction duquel elle a été menée. On ne notera que quelques points des chemins, pour ne pas multiplier confusément les lignes sur le dessin; on préférera les points extrêmes et ceux des points intermédiaires qui se trouvent aux angles les plus marqués des routes; s'il ne s'y trouvoit pas des objets distincts à pointer, on y feroit planter des piquets ou d'autres signaux. Tout ceci doit s'entendre aussi des rivières. Nous verrons (339) comment on peut représenter sur le dessin les routes entières et les fleuves avec leurs tortuosités et leur largeur; de même que les contours des églises, des maisons, &c., pour lesquels il faut employer les méthodes précédentes pour déterminer sur le plan les deux points extrêmes de la largeur d'une face quelconque, en préférant toujours celle qu'on peut observer le plus favorablement de deux points de station.

338. Si le plan qu'on veut lever est celui d'une ville, il faut établir les stations dans les carrefours, et mesurer exactement à la toise la distance de l'une à l'autre de ces stations, lorsque chacune

des distances ne sera pas déterminée sur le dessin par l'intersection des lignes tirées de deux diverses stations. Il est à propos de commencer par la place la plus grande ; et pour en lever le plan , d'établir à-peu-près au milieu le point de station. Du centre de l'alidade on tirera sur le papier une ligne vers chacun des angles des rues qui aboutissent à la place : on mesurera avec attention à la toise toutes les distances de chacun de ces angles , au point du terrain sur lequel répond à plomb le centre de l'alidade ; ensuite l'échelle donnera les longueurs des lignes du plan, correspondantes à celles du terrain. Ayant ainsi fixé les extrémités de ces lignes , on les joindra les unes aux autres , en laissant néanmoins en blanc les intervalles correspondants à la largeur des rues qui donnent dans la place. On aura de cette manière un assez grand nombre de points fixes qui serviront pour lier entre elles toutes les rues, à partir de la place. Mais il seroit trop long de détailler minutieusement tous les procédés de l'art de lever les plans ; on en apprendra plus en un jour d'exercice , que par la lecture de préceptes multipliés.

Lorsqu'un Ingénieur fait beaucoup d'usage de la planchette , sur-tout à la campagne , il peut , avec le temps , être en état d'estimer à l'œil simplement les angles et les distances : muni au plus d'un demi-cercle ou d'un rapporteur , quelque petit qu'il soit , avec une alidade quelconque pour diriger le rayon visuel , il relevera les angles , à un degré près , plus ou moins ; et s'il est exercé à mesurer les distances au pas , il pourra dessiner un terrain avec une exactitude très approchante de la vérité. C'est en cela que consiste surtout l'habileté des Ingénieurs-militaires , qui ont rarement le temps et la liberté d'employer la planchette ou autres instruments pour lever leurs plans. Les Géographes eux-mêmes n'ont souvent pas besoin d'une plus grande précision pour placer sur la carte les lieux de peu d'importance , quand ils ont déterminé avec exactitude les positions des villes et autres lieux remarquables. Rarement les cartes géographiques sont d'une échelle assez grande pour qu'un demi-mille y occupe un espace sensible.

339. La largeur des routes se mesure à la toise. Pour avoir celle des rivières, on peut mirer, de chacune de deux stations, comme à l'ordinaire, deux objets ou signaux posés l'un en face de l'autre sur les deux rives. Mais le moyen le plus expéditif pour relever les sinuosités des routes et des rivières, ainsi que leur largeur, c'est d'employer la *boussole*. Il faut qu'elle soit d'un grand diametre, autant qu'il sera possible, très sensible, et bien montée dans une boîte quarrée, dont les côtés doivent être paralleles aux lignes AB, CD, destinées à indiquer le nord, le sud, l'est et l'ouest. L'intérieur de la boîte doit être circulaire et divisé en 360 parties; ou même, pour avoir le demi-degré, en 720; la pointe de l'aiguille aimantée doit raser le bord de ces divisions sans les toucher, pour qu'on puisse voir avec plus de certitude et de précision à laquelle d'entre elles correspond cette pointe. En dehors de la boîte est une piece EF de forme prismatique, parallele au diametre AB ou à la ligne nord et sud, et qui porte sur ses extrémités deux pinnules que l'on n'a pas dessinées sur la figure, pour éviter la confusion. La vis V sert à fixer la piece EF, qui cependant doit pouvoir tourner à frottement dur sur la partie lisse de la vis, ensorte qu'on puisse diriger les pinnules vers les objets hauts ou bas, tandis que la boîte de la boussole reste toujours parallele à l'horizon, pour que les mouvements de l'aiguille s'exercent avec liberté et exactitude:

Fig. 1. Cela posé, soient K, H, deux objets dont on veut prendre la distance angulaire vue du point C. De ce point on observera par les pinnules l'un des objets, par exemple K. Je suppose que dans cette position de la boussole l'aiguille aimantée se trouve dans la direction CF. La direction CK des pinnules étant parallele au diametre AB (fig. 38) de la boussole, il s'ensuit que l'angle que fait l'aiguille aimantée avec ce diametre, est égal à l'angle FCK. On notera la grandeur de cet angle, indiquée par les divisions, et on tournera la boussole de maniere à observer par ses pinnules l'objet H: l'aiguille aimantée prendra encore la direction CF, et indiquera

dans ce cas l'angle FCH. La différence des deux angles observés sera l'angle cherché KCH.

Il est évident que si les deux objets étoient N, K, c'est-à-dire s'ils étoient situés l'un à la droite, l'autre à la gauche de la direction CF de l'aiguille aimantée, l'angle cherché NCK seroit la somme des deux angles observés NCF, FCK.

Actuellement il nous sera facile de dessiner les sinuosités du cours d'une rivière et sa largeur. On plantera des piquets aux points D, E, F, G, H, c'est-à-dire aux points où les courbures du rivage seront plus sensibles ; on mesurera à la toise les distances DE, EF, FG, GH, et, avec la boussole, les angles qu'elles font entre elles. Je suppose que la direction de l'aiguille aimantée soit successivement DN, EN, FN, GN, HN. Il est clair que, du point G par exemple, en observant l'objet H, on aura l'angle NGH, et en observant l'objet F, l'angle NGF ; la somme de ces deux angles retranchée de 360° , dans le cas de la figure, donnera l'angle cherché FGH. Fig. 39

Pour ne pas multiplier trop les stations ; en même temps qu'on mesurera les bases DE, EF, &c., on mesurera aussi leurs distances perpendiculaires au rivage, lorsque ces distances varieront notablement entre elles ; elles sont exprimées dans la figure par les lignes ponctuées qui tombent sur GH. On mesurera de même les distances des stations G, H, &c. au rivage. Ces perpendiculaires dispenseroient d'observer les angles, si l'on traçoit les bases GH, FG, &c., sur le plan, dans la direction et dans les proportions de grandeur qui leur conviennent, lors du relevement des objets au travers des pinnules ou de la planchette ou de la boussole.

On releveroit par les mêmes méthodes les contours irréguliers d'un terrain, d'un bois, &c., et les tortuosités des chemins.

Si on veut prendre la largeur d'une rivière par le moyen de la boussole, on observera de deux stations, comme F et G, un objet ou signal S placé sur la rive opposée. En retranchant des angles

Fig.39 NGS, NFS, les angles NGF, NFG, on aura les angles SGF, SFG. Ceux-ci, formés sur la base FG du plan, donneront le point S.

Il faut faire cette opération dans tous les points où la largeur de la rivière varie sensiblement.

Lorsque l'on a sur le plan l'une des faces (337) d'un édifice, d'un enclos, d'un groupe de maisons, &c., on mesure à la toise les longueurs des autres côtés, et on relève à la boussole les angles qu'ils font entre eux ; c'est ainsi qu'on peut porter tous leurs contours sur le plan.

On se sert aussi de la boussole pour relever les angles dans les mines, dans les souterrains. On mesure à la toise les longueurs des galeries du souterrain ; et on parvient ainsi à déterminer sur terre, à ciel découvert, les directions et les sinuosités des mines, et à trouver le point où il est avantageux d'ouvrir un nouveau puits qui puisse aboutir à un filon donné. Mais, dans cet usage de la boussole, la direction de l'aiguille magnétique est quelquefois troublée par la proximité de mines de fer, du voisinage desquelles il faut se défier.

Avec la boussole et le *loch*, on peut encore lever à-peu-près le dessin d'une plage, d'un port, &c. aperçus d'un navire. La boussole donne les distances angulaires entre les promontoires et autres objets situés le long de la côte ; le loch fait connoître le chemin parcouru par le bâtiment entre deux observations faites à des heures différentes, des distances angulaires des mêmes objets. Le chemin parcouru sert de base, et sa direction est donnée par la boussole. En formant sur le plan, aux deux extrémités de cette base, tous les angles relevés, les intersections des lignes tirées de ces extrémités donneront les positions de tous les points observés.

340. Enfin la boussole est sur-tout essentielle pour orienter les plans ; c'est à cet effet que les graphometres sont ordinairement garnis d'une boussole, (296). Sur un plan quelconque on indique par une croix les quatre points cardinaux, en distinguant le nord par une fleche ou par une fleur-de-lys. Cette croix fait connoître la

vraie position de tous les objets compris dans le plan, relativement aux points cardinaux. Il est à propos de fixer ces points avec exactitude, et de se souvenir, lors de cette opération, que l'aiguille aimantée n'indique pas précisément le vrai point du nord, et que sa déclinaison varie dans des temps et dans des lieux différents; à Paris elle est actuellement environ de 20° à l'ouest, quantité qui, comme l'on voit, ne peut pas être négligée. L'imperfection des petites boussoles dont se servent la plupart des Arpenteurs, le peu d'attention qu'ils font à la déclinaison, et la sécurité avec laquelle ils relevent les petits angles mêmes, donnent lieu à de grandes erreurs dans leurs plans. Le P. Maire assure qu'il a observé jusqu'à 10 milles d'erreur dans des cartes particulières de quelques provinces de l'État de l'Église, et que trois villages situés réellement sur une même ligne, ont plus d'une fois formé sur la carte un triangle équilatéral.

On peut rapporter à une ligne quelconque, dans un plan, l'indication des quatre parties du Monde : il est plus sûr de la rapporter à la base. On observera l'angle que l'aiguille aimantée fait avec cette base sur le terrain, comme on a fait ci-dessus (339) pour les bases DE, EF, &c. ; on tiendra compte de plus, dans cette opération, de la déclinaison de l'aiguille en telle année et en tel lieu. Cet angle ainsi corrigé se formera, dans le plan, en menant sur la base une ligne tracée au crayon, laquelle indiquera le nord, et servira de règle pour former la croix dans la partie du plan où il paroîtra plus commode de la placer. L'usage est de disposer les plans, de manière que la partie septentrionale occupe le haut de la carte.

341. Nous avons vu comment on se sert de la planchette et de la boussole pour relever les plans. Il ne faut pas employer la dernière lorsqu'on veut une grande précision. De même aussi on préférera le graphometre et le quart de cercle à la planchette, sur-tout quand il s'agira de grands triangles et de la carte géographique d'une province.

Lorsqu'avec ces instruments on a mesuré au moins deux angles dans chaque triangle, et qu'on a calculé toutes les réductions, de manière à avoir la grandeur définitive des angles sur un horizon commun, il faut les former sur la carte, en commençant par les angles sur la base. Mais en employant pour cette opération la méthode même la plus sûre (295), les lignes tirées à la main ne peuvent jamais avoir une exactitude mathématique, et les erreurs peuvent se multiplier jusqu'à rendre inconciliables les positions éloignées de la base. Pour éviter cet inconvénient et quelques autres, on a imaginé de rapporter chacun des points principaux de la carte à une seule ligne, qu'on appelle *méridienne* (416), et dont la direction est en effet précisément du septentrion au midi. Voici comme on s'y prend.

Fig. 40 Soient A, B, C, D, F, &c. les points que l'on veut placer convenablement sur la carte. Après avoir réduit tous les angles BAC, ACB, &c., il faut résoudre les triangles du polygone pour calculer toutes les distances ou les côtés AB, AC, CD, &c. On choisira un méridien qui passe à-peu-près par le milieu du polygone; telle est, par exemple, dans la figure, la ligne AN, qui représente le méridien du point A. Il faut connoître en premier lieu l'un des angles BAN, CAN. Soit ☉ le soleil couchant; on observera la distance angulaire entre le soleil et le point B, c'est-à-dire l'angle BA☉. L'Astronomie donne des règles pour connoître facilement et exactement l'angle NA☉ au moment où le soleil se couche. La différence de ces deux angles, dans le cas de la figure, est l'angle cherché BAN; en le retranchant de BAC, on a aussi CAN. Soient Be, Cm perpendiculaires sur la méridienne; connoissant AB et BAN, on résoudra le triangle rectangle AeB pour trouver Ae, Be; la première de ces lignes est la distance du point A à la perpendiculaire qui part du point B; la seconde est la distance du point B à la méridienne. De même connoissant AC et CAN, on trouvera Am, Cm, distances semblables à celles ci-dessus, relativement au point C. Retranchant ABe de ABC, on a CBe

CBe, qui, ajouté à FBC, donne l'angle FBu, par le moyen duquel et de FB, on trouvera Fu ou se, et Bu. Ajoutant se à Ae, on a As; retranchant Bu de Be, on a eu = Fs.

On calculera de même les distances du point A à la perpendiculaire de chacun des points qu'on veut mettre sur la carte, et la longueur de cette perpendiculaire elle-même, ou la distance de chacun de ces points à la ligne méridienne. En fixant sur la carte, avec ces deux seules données, la position de chaque point, il est évident que les erreurs ne peuvent plus se communiquer et se multiplier; puisque si l'on commet, par exemple, une erreur sur la position du point C, qu'on a déterminée par le moyen des distances Am, Cm, cette erreur ne peut influer sur la position du point D, qui se détermine sur la carte non par le moyen du point C, mais par celui des distances An, Dn. On voit donc qu'ayant une fois établi sur la carte le point A et le méridien AN, toutes les positions se marqueront indépendamment les unes des autres.

Il est clair que si au lieu de l'angle BAN qu'on déduit de l'observation du soleil couchant, on vouloit l'angle CAN, on le trouveroit de la même manière, en observant le soleil à son lever.

C'est par cette méthode exacte et ingénieuse, qu'on a levé le plan géométrique très étendu du Royaume de France, divisé en 180 cartes, et fondé sur la mesure de 19 bases qui confirment l'exactitude des opérations et des calculs trigonométriques sur un très grand nombre de triangles.

Problèmes.

342. Déterminer la position d'un lieu, duquel on apperçoit trois points dont la position est connue, tandis que de ces mêmes points on ne peut appercevoir ce lieu; ce qui arrive lorsque, par exemple, on ne voit que la pointe d'un clocher, à laquelle on ne pourroit s'élever pour appercevoir le lieu d'où on auroit observé cette pointe. *Voyez page 187.*

Fig. 41

Soient A, B, C les trois points dont la position est donnée, de sorte que l'on connoisse toutes les parties du triangle ABC; et soit D le lieu à déterminer; il s'agit de trouver, par l'observation des angles m, n , faite du point D, les distances BD, AD, CD.

Dans les triangles ABD, BCD, qui ont un côté commun BD, on a $BD = \frac{AB \sin.x}{\sin.m} = \frac{BC \sin.z}{\sin.(m+n)}$. Mais $z = 180^\circ - n - y = 180^\circ - n - (180^\circ - B - x) = x + B - n$; donc, (54), $\sin.z = \sin.x \cos.(B - n) + \cos.x \sin.(B - n) = \frac{AB \sin.(m+n)}{BC \sin.m} \times \sin.x$. En divisant la dernière équation par $\sin.x$, on en tire $\cot.x = \frac{AB \sin.(m+n)}{BC \sin.m \sin.(B-n)} - \cot.(B-n)$, ou, pour plus de commodité dans le calcul,

$$\cot.x = \cot.B - n \left(\frac{\sin.C \sin.(m+n)}{\sin.BAC \sin.m \cos.(B-n)} - 1 \right).$$

Par cette équation on aura le segment x de l'angle BAC; on connoîtra par conséquent l'autre segment CAD, et la résolution des triangles ABD, ACD donnera les distances cherchées.

Notre solution a cet avantage, que l'équation qui la donne satisfait à tous les cas, comme on va le voir.

En effet, si l'on avoit $B < n$, $\cot.(B - n)$ seroit négative, (154), et c'est le seul changement qu'éprouveroit l'équation.

Cependant si le point D étoit en dedans du triangle ABC, on auroit $(m+n) > 180^\circ$, et alors $\sin.(m+n)$ seroit aussi négatif. De plus, si un des angles A, B, C se trouvoit obtus, on chercheroit toujours le segment d'un des angles aigus, afin d'éviter tout embarras, toute incertitude sur l'espece de l'angle x .

Si B étoit égal à zéro, ce qui arrive quand les trois lieux B, A, C sont sur une même ligne droite, (il faut alors supposer le lieu A au point y , et l'angle x se change en ByD), on auroit $\cot.x = \cot.n \left(1 - \frac{AB \sin.(m+n)}{BC \sin.m \cos.n} \right) = \frac{AC \cot.n - AB \cot.m}{BC}$.

Enfin dans le cas où B seroit égal à n , le problème seroit indéterminé, $\cot.(B - n)$ étant infinie, et y ayant, pour le point D,

un nombre infini de positions qui satisferoient à la question , ainsi qu'on le reconnoîtra en pratiquant la construction dont nous allons parler.

343. Si l'on ne desire pas de connoître les distances AD , BD , CD , mais seulement la position convenable du point D sur une carte , on la trouve plus promptement par la construction suivante. Imaginez un cercle qui passe par les points A, B, D ; vous aurez $\frac{1}{2}AB = \sin. m$. Ce sinus est proportionnel au rayon du cercle supposé : il sera donc facile (25) de déterminer ce rayon, en divisant $\frac{1}{2}AB$ par $\sin. m$ pris dans les tables. De même $\frac{AC}{2 \sin. n}$ sera le rayon du cercle qui passeroit par les points A, C, D. Si donc on décrit les deux cercles, et d'un rayon tel, pour chacun d'eux respectivement, qu'on l'aura calculé, ils se couperont en A et en un autre point qui marquera sur la carte la position cherchée du point D.

344. *Du sommet d'une hauteur donnée, mesurer la distance horizontale de deux objets situés plus bas.*

Soit R un point élevé de la quantité donnée RE, sur l'horizon Fig. 34 commun aux objets A, P, et soit à déterminer, du point R, la distance AP. On prendra l'angle de distance ARP, et les angles de dépression, ou les compléments de PRE, ARE. Le premier, ARP, se réduira à AEP, au moyen de notre formule (323); et les deux autres, avec le côté RE, serviront à calculer AE, PE; et l'on aura ainsi toutes les données nécessaires pour trouver le côté AP, (IV. 3°).

Pour donner une idée des applications utiles de ce problème, il suffit de dire que comme il est facile de mesurer une hauteur avec une grande précision par le barometre (311), on peut, d'un point saillant, sur une montagne escarpée, déterminer les positions des bourgades dans l'enfoncement des vallées, sans qu'il soit besoin de mesurer une base.

345. *Déterminer la distance d'un objet A perpendiculaire- Fig. 32 ment à la distance CD de deux objets inaccessibles C et D ; et*

Bb ij

Fig.32 la longueur des segments de CD formés par la perpendiculaire.

Qu'on imagine une perpendiculaire du point A sur la ligne CD. En mesurant une base AB, et opérant comme on a dit (314), on connoîtra les valeurs des côtés AC, AD, et de l'angle compris CAD. Alors, par la formule (245), on trouvera les segments de cet angle, et l'on aura par conséquent deux données dans chacun des deux triangles rectangles formés par la perpendiculaire; et les formules ordinaires (213) donneront la valeur de cette ligne et celles des segments.

346. Par un point accessible A, mener une parallèle à une droite inaccessible CD.

Après avoir fait ce que nous avons enseigné (314) pour connoître AC, AD et CAD, on résoudra le triangle CAD, pour trouver la valeur de CDA. Alors pour avoir la parallèle cherchée, il ne reste plus qu'à former au point A, avec la ligne AD, un angle égal à CDA. Cet angle se formera au moyen des instruments; et en plantant des jallons dans la direction indiquée par la lunette ou par les pinnules, on aura la position de la parallèle, déterminée sur le terrain.

347. Continuer une ligne sur le terrain par-delà un obstacle qui ne permet pas de voir la direction de cette ligne.

Fig.42 Soit CD la ligne qu'on veut continuer en EF. On choisira un point A duquel on apperçoive les objets C et D, et d'où l'on puisse aussi découvrir le terrain où l'on cherche à déterminer la position de EF. On mesurera CD à la toise; et après avoir relevé les angles du triangle CDA, on calculera AC. On mesurera avec un instrument l'angle CAE, prenant pour AE la direction qu'on jugera la plus commode. Supposant CD prolongé jusqu'en E, on connoîtra dans le triangle CAE les angles et le côté AC, et l'on trouvera AE. Sur la direction AE donnée par l'instrument, on mesurera à la toise une distance AE égale à celle donnée par le calcul; et on connoîtra le point E par lequel passeroit la ligne CD prolongée. Alors on formera en E un angle AEF égal au supplé-

ment de l'angle connu AEC, et on aura la direction cherchée EF.

Si la distance CD étoit inaccessible, il faudroit mesurer une autre base AB; en opérant sur cette base, comme nous l'avons dit (314), on détermineroit AC et AD, ou bien BC et BD, et de-là l'angle DCA, ou l'angle DCB. Le reste est évident et conforme à la marche que nous venons de suivre pour arriver à EF.

Si l'on veut un grand nombre de problèmes de Trigonométrie et de Géométrie-pratique, on trouvera l'abondance à cet égard, réunie à la méthode et à la clarté, dans l'Ouvrage de M. Giannini, premier Professeur au College Militaire de Ségovie, intitulé : *Practicas de Geometria y Trigonometria, Segovia*, 1784.

CHAPITRE XII.

Résolution numérique de toutes les Équations du second et du troisieme degré, par le moyen de la Trigonométrie.

348. TOUTE équation du *second degré* est représentée par cette formule générale :

$$(A)..... x^2 + px = q.$$

D'où l'on tire

$$(B)..... x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 + q\right)}.$$

Si p et q sont des quantités ou grandes ou fractionnaires, le calcul de cette équation devient laborieux; mais la Trigonométrie donne des moyens aussi prompts que faciles pour en tirer la valeur de x , soit exacte soit approchée, suivant les cas. Car on sait que si la quantité sous le signe radical n'est pas un quarré parfait, il n'est pas possible d'avoir la valeur de x autrement que par approximation.

Si l'on examine le cas où le radical est positif, l'équation (B)

se peut alors exprimer ainsi : $x = -\frac{1}{2}p \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}\right)$, (14).
En faisant, (206),

$$(C)..... \text{tang.} A = \frac{2\sqrt{q}}{p},$$

et par conséquent $\frac{1}{2}p = \frac{\cos.A \sqrt{q}}{\sin.A}$, on aura $x = -\frac{\cos.A \sqrt{q}}{\sin.A}$
 $\left(1 - \frac{1}{\cos.A}\right) = \frac{\cos.A \sqrt{q}}{\sin.A} \times \frac{1 - \cos.A}{\cos.A} = \frac{1 - \cos.A}{\sin.A} \times \sqrt{q}$.
Donc (I. 40°)

$$(D)..... x = \text{tang.} \frac{1}{2}A \sqrt{q}.$$

Or on a déjà par l'équation (C) la valeur de A ; on aura donc celle de x par l'équation (D).

349. Supposons maintenant, dans l'équation (B), le radical négatif ; l'équation (C) sera la même, et on aura $x = -\frac{1}{2}p \times \left(1 + \frac{1}{\cos.A}\right) = -\frac{\cos.A \sqrt{q}}{\sin.A} \times \frac{1 + \cos.A}{\cos.A} = -\frac{1 + \cos.A}{\sin.A} \times \sqrt{q}$.
Donc la seconde valeur de x sera (II. 41°),

$$(E)..... x = -\cot. \frac{1}{2}A \sqrt{q}.$$

350. On trouvera, par la même méthode, que les formules précédentes s'appliquent aussi au cas où l'équation à résoudre (A) est de cette forme $x^2 - px = q$. La seule différence est que la valeur négative de x est donnée par l'équation (D), et sa valeur positive par l'équation (E).

351. Soit maintenant l'équation à résoudre (A) de cette forme $x^2 + px = -q$; on aura $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 - q\right)}$. Or on sait que, lorsque q est négatif, il faut qu'il ne soit pas plus grand que $\frac{1}{4}p^2$; autrement la quantité sous le signe radical seroit imaginaire, et il n'existeroit aucune valeur réelle de x qui satisfit à l'équation. Cela posé, en considérant d'abord le radical comme positif, on a $x = -\frac{1}{2}p \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right)$. Et en faisant, (208),

$$(F)..... \sin.A = \frac{2\sqrt{q}}{p},$$

ce qui donne $\frac{1}{2}p = \frac{\sqrt{q}}{\sin.A}$; on aura $x = -\frac{\sqrt{q}}{\sin.A} (1 - \cos.A) =$

— $\text{tang.} \frac{1}{2} A \sqrt{q}$, (II. 40°), c'est-à-dire qu'on aura l'équation (D) avec le signe négatif au second membre.

Considérons actuellement le radical comme négatif; ce qui n'altère pas l'équation (F); nous aurons $x = -\frac{1}{2} p (1 + \cos. A) = -\frac{\sqrt{q}}{\sin. A} (1 + \cos. A) = -\cot. \frac{1}{2} A \sqrt{q}$, (II. 41°); c'est-à-dire que, dans ce cas, nous aurons l'équation (E).

352. Si l'équation à résoudre (A) étoit de cette forme, $x^2 - px = -q$, ce qui n'altère pas l'équation (F), on trouveroit que dans le cas du radical négatif, la valeur de x est celle de l'équation (D); et dans le cas du radical positif, celle de l'équation (E), avec le signe positif pour le second membre.

353. Concluons que les équations (D), (E) donnent les deux valeurs de x dans tous les cas: q est-il positif? on aura l'arc A par la formule (C), et les deux valeurs de x seront toujours de signes contraires: q est-il négatif? on cherchera l'arc A par la formule (F), et les valeurs de x seront toutes deux négatives si p est positif, toutes deux positives si p est négatif.

354. EXEMPLE. Soit à résoudre l'équation $x^2 + \frac{7}{44} x = \frac{1695}{12716}$. On aura, (C), (D);

$$\begin{aligned} \text{tang. } A &= \frac{88}{7} \sqrt{\frac{1695}{12716}}, \\ x &= \text{tang.} \frac{1}{2} A \sqrt{\frac{1695}{12716}}, \end{aligned}$$

équations dont voici le calcul.

log. 1695	= 3,2291697
compl. log. 12716	= 5,8956495
somme	9,1248192
demi-somme	9,5624096
log. 88	= 1,94448267
compl. log. 7	= 9,15490196
somme ou log. tang. A	= 0,6617942 = log. tang. 77° 42' 31", 72
log. tang. $\frac{1}{2} A$	= 9,9061115
demi-somme ci-dessus	9,5624096
Somme ou log. x	= 9,4685211 = log. 0,2941176.

Pour savoir si cette valeur positive approchée de x peut être exprimée par une fraction exacte, dont les deux termes soient des nombres entiers de peu de chiffres; je prends le complément de $\log. x$, et le considérant comme un logarithme négatif (164), je trouve $-0,5314789 = \log. \frac{1}{3,4}$ exactement; et multipliant cette fraction par 5, j'ai $x = \frac{5}{17}$.

Ceux qui voudront calculer cette valeur de x par le moyen de la formule ordinaire (B), auront lieu de reconnoître combien la solution trigonométrique est plus prompte et plus facile.

355. Dans le calcul précédent, si au lieu de $\log. \tan. \frac{1}{2} A$, on emploie son complément, on aura $\log. -x = 9,6562981 = \log. -0,4532085$. C'est la valeur approchée négative de x , selon la formule (E). Si l'on prend le complément de $\log. -x$, on trouve $x = -\frac{1}{2,20649}$, ce qui n'est pas non plus une valeur exacte; de sorte qu'on ne peut, dans ce cas, la réduire en une fraction exacte et composée d'entiers dans ses deux termes. Mais d'ailleurs il suffit d'avoir trouvé la valeur exacte de $+x$: on sait que q est le produit de toutes les racines, et que dans le cas présent les deux valeurs de x doivent avoir des signes contraires (353); donc, en divisant $\frac{1695}{12716}$ par $\frac{5}{17}$, on aura $-\frac{339}{748}$ pour la seconde valeur exacte de x . On peut vérifier le calcul par le moyen de cette autre règle, que la somme des deux racines doit être égale à p .

356. Passons à la solution des équations du *troisième degré*. On sait qu'après avoir fait évanouir le second terme, on peut représenter toute équation du troisième degré par cette formule générale :

$$(G) \dots x^3 + px + q = 0.$$

La solution analytique de cette équation est

$$(H) \dots x = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}\right)}.$$

Je

Je l'écris sous la forme suivante (14) : $x = \dots\dots\dots$

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q \sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^3}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}q \sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^3}}\right)};$$

et faisant, (206), $\frac{4p^3}{27q^3} = \text{tang.}^2 B$, ou

$$(K) \dots\dots \text{tang.} B = \frac{p}{3q} \times 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}p},$$

il en résulte $x = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q \times 1 - \frac{1}{\cos. B}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q \times 1 + \frac{1}{\cos. B}\right)}$.

Soit, pour plus de simplicité, $2\sqrt[3]{\frac{1}{3}p} = R$, ce qui donne $p = \frac{1}{4}R^3$;

l'équation (K) deviendra $\text{tang.} B = \frac{R^3}{4q}$; d'où l'on tire $q = \frac{R^3}{4 \text{ tang.} B}$.

En substituant cette valeur de q , on a $x = \sqrt[3]{-\frac{R^3}{8 \text{ tang.} B} \times \frac{\cos. B - 1}{\cos. B}}$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{R^3}{8 \text{ tang.} B} \times \frac{\cos. B + 1}{\cos. B}} = \frac{1}{2}R \left(\sqrt[3]{\frac{1 - \cos. B}{\sin. B}} - \sqrt[3]{\frac{1 + \cos. B}{\sin. B}} \right) =$$

(I. 40°, 41°) $\frac{1}{2}R \left(\sqrt[3]{\text{tang.} \frac{1}{2} B} - \sqrt[3]{\cot. \frac{1}{2} B} \right)$ ou $x = -R \times$

$$\frac{\sqrt[3]{\cot. \frac{1}{2} B} - \sqrt[3]{\text{tang.} \frac{1}{2} B}}{2}; \text{ mais (I. 38°), } \cot. 2A = \frac{\cot. A - \text{tang.} A}{2}; \text{ en}$$

comparant les deux dernières équations, et faisant

$$(L) \dots\dots \text{tang.} A = \sqrt[3]{\text{tang.} \frac{1}{2} B};$$

et par conséquent $\cot. A = \sqrt[3]{\cot. \frac{1}{2} B}$, on aura $x = -R \times \cot. 2A$. Donc, en remettant la valeur de R , on a pour équation finale

$$(M) \dots\dots x = -\cot. 2A \times 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}p}.$$

Ainsi l'on parvient à trouver la valeur de x par le moyen de trois équations très simples: 1°. par l'équation (K) on trouve un arc B ; 2°. par l'équation (L) on trouve un arc A ; 3°. par l'équation (M) on a la valeur cherchée de x .

Si l'équation à résoudre (G) étoit de cette forme, $x^3 + px - q = 0$, alors dans la solution analytique (H), $-\frac{1}{2}q$ deviendrait positif. En procédant comme ci-dessus, on parviendrait aux mêmes équations (K), (L), (M), avec cette seule différence que le second membre de la dernière auroit le signe positif.

357. Supposons maintenant que l'équation à résoudre (G) soit de cette forme :

$$x^3 - px + q = 0;$$

ce qui rend $\frac{1}{27}p^3$ négatif dans la solution analytique (H). On aura $x = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q \sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^3}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}q \sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^3}}\right)}$.
Si on fait, (208), $\frac{4p^3}{27q^3} = \sin.^2 B$, ou

$$(N)..... \sin.B = \frac{p}{3q} \times 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}p},$$

il en résulte $x = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q \times 1 - \cos.B\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q \times 1 + \cos.B\right)}$.

Mais l'équation (N) donne $q = \frac{R^3}{4 \sin.B}$, en faisant toujours $R = 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}p}$, et par conséquent $p = \frac{3}{4}R^2$. Donc $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}R^3 \times \frac{1 - \cos.B}{\sin.B}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{8}R^3 \times \frac{1 + \cos.B}{\sin.B}} = -R \times \frac{\sqrt[3]{\tan.\frac{1}{2}B} + \sqrt[3]{\cot.\frac{1}{2}B}}{2}$.

Mais (L 9°), $\frac{\tan.A + \cot.A}{2} = \frac{1}{\sin.2A}$. Donc, en adoptant l'équation (L), on aura $x = -\frac{R}{\sin.2A}$, ou

$$(O)..... x = -\frac{2\sqrt[3]{\frac{1}{3}p}}{\sin.2A}.$$

On trouve donc ainsi la valeur de x par le moyen des trois équations (N), (L), (O).

On reconnoîtra que les mêmes équations servent encore, lorsque l'équation à résoudre (G) est de cette forme :

$$x^3 - px - q = 0.$$

Mais le second membre de l'équation (O) devient positif.

Cette solution exige que $\frac{4p^3}{27q^3}$ ne soit pas plus grand que 1 ; autrement on ne pourroit supposer $\frac{4p^3}{27q^3} = \sin.^2 B$, puisqu'un sinus ne peut jamais être plus grand que le rayon.

358. Si donc il arrive que p étant négatif, $4p^3$ soit $> 27q^3$, ou $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$, la quantité $\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^3}}$ se présente sous une forme imaginaire, et c'est ce qu'on a nommé le cas irréductible, *cas irréductible*.

parcequ'on n'a pu en trouver une solution analytique générale délivrée d'imaginaires, si ce n'est sous la forme de séries infinies. Pour juger de la difficulté, peut-être même de l'impossibilité de cette solution générale, on peut lire la Dissertation de M. le Chevalier Lorgna, savant Géometre, (*Memorie della Società Italiana*, Tom. I. Verona, 1782). On sait cependant que, dans le cas irréductible, l'équation a ses trois racines réelles, quoiqu'elle n'en ait qu'une dans tous les autres cas que nous venons d'examiner et de résoudre.

859. Pour trouver par la Trigonométrie les trois racines dans le cas irréductible, il faut abandonner la solution analytique embarrassée de quantités imaginaires, et, parmi les formules trigonométriques, en chercher une qui soit comparable à l'équation

$$x^3 - px \pm q = 0,$$

qu'il s'agit de résoudre.

Si on prend l'équation (125), $\sin.3A = 3\sin.A - 4\sin.^3A$, qui, rendue homogene (55), devient $R^3 \sin.3A = 3R^3 \sin.A - 4\sin.^3A$; en divisant par 4 et transposant, on aura

$$(P)..... \sin.^3A - \frac{3}{4}R^3 \sin.A + \frac{1}{4}R^3 \sin.3A = 0.$$

Comparant cette équation terme à terme avec la proposée, dans laquelle je prends d'abord q comme positif; si on fait $x = \sin.A$, on aura 1°. $p = \frac{3}{4}R^3$, ce qui donne $R^3 = \frac{4}{3}p$, et $R = 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}p}$; 2°. $q = \frac{1}{4}R^3 \sin.3A = \frac{1}{3}p \sin.3A$; d'où l'on tire $\sin.3A = \frac{3q}{p}$.

Ce sinus est proportionnel au rayon de l'équation, qui est, comme nous venons de le voir, $2\sqrt[3]{\frac{1}{3}p}$; pour le trouver dans les tables, il faut donc (25) le diviser par ce même rayon, et alors on aura

$$(Q)..... \sin.3A = \frac{3q}{p} \times \frac{1}{2\sqrt[3]{\frac{1}{3}p}}.$$

La valeur de $3A$ étant connue par cette équation, celle de A le sera aussi, et par conséquent celle de $x = \sin.A$. Mais comme

$\sin. A$ se prend dans les tables, où $R = 1$, il faut ensuite le multiplier par le rayon de l'équation. Donc

$$(S)..... x = \sin. A \times 2\sqrt{\frac{1}{3}}p.$$

360. Si dans l'équation (P) on met $120^\circ + A$ au lieu de A , il faudra mettre $360^\circ + 3A$ au lieu de $3A$. Mais $\sin.(360^\circ + 3A) = \sin.360^\circ \cos.3A + \cos.360^\circ \sin.3A = \sin.3A$, (42); l'équation (Q) est donc la même quand, au lieu de $x = \sin. A$, on fait $x = \sin.(120^\circ + A)$. C'est donc une seconde valeur de x qui satisfait à l'équation (P). Mais $\sin.(120^\circ + A) = \sin.(60^\circ - A)$. On aura donc

$$(T)..... x = \sin.(60^\circ - A) \times 2\sqrt{\frac{1}{3}}p.$$

De même si dans l'équation (P) on met $240^\circ + A$ au lieu de A , ce qui donne $720^\circ + 3A$ au lieu de $3A$, on aura aussi $\sin.(720^\circ + 3A) = \sin.(360^\circ + \overline{360^\circ + 3A}) = \sin.3A$, et l'équation (Q) subsistant toujours, on aura une troisième valeur de x , qui sera $x = \sin.(240^\circ + A)$. Mais $\sin.(240^\circ + A) = \sin.(180^\circ + \overline{60^\circ + A}) = -\sin.(60^\circ + A)$. Donc

$$(Z)..... x = -\sin.(60^\circ + A) \times 2\sqrt{\frac{1}{3}}p.$$

L'équation (Q) suppose évidemment que l'on n'ait pas $4p^3 < 27q^2$. Aussi ces solutions ne sont applicables aux cas résolus (357) que quand $4p^3 = 27q^2$ précisément : alors les formules (S), (T) donnent deux valeurs égales de x , et la formule (Z) une troisième valeur, tandis que la méthode (357) ne donne qu'une valeur de x , c'est-à-dire la dernière (Z).

Qu'on remarque le grand avantage des solutions trigonométriques pour le cas irréductible. Par le moyen de quatre équations seulement, (Q), (S), (T), (Z), dont le calcul est très court, puisqu'elles renferment toutes un facteur commun, $2\sqrt{\frac{1}{3}}p$, ces solutions font connoître les trois valeurs ou exactes ou approchées de x , valeurs que l'analyse ne trouve ordinairement que par des voies laborieuses, et le plus souvent sous la forme de séries infinies.

361. Ces mêmes équations, en changeant seulement le signe du second membre, donnent encore les valeurs cherchées, lorsque q est négatif, de sorte qu'on ait pour l'équation à résoudre, $x^3 - px - q = 0$. En effet, comme alors $-q = \frac{1}{4} R^2 \sin. 3A = \frac{1}{3} p \sin. 3A$, il s'ensuit que $\sin. 3A = -\frac{3q}{p}$; ce qui fait voir qu'au lieu de $3A$, on doit prendre $180^\circ + 3A$, (38), et par conséquent $60^\circ + A$ au lieu de A . Donc pour première valeur on a $x = \sin.(60^\circ + A)$, c'est-à-dire l'équation (Z) avec le signe positif au second membre. En ajoutant 360° à $180^\circ + 3A$, et prenant le tiers, on a pour seconde valeur $x = + \sin.(180^\circ + A) = - \sin.A$, c'est-à-dire l'équation (S) avec le changement de signe. De même en ajoutant 720° à $180^\circ + 3A$, et prenant le tiers, on a pour troisième valeur, $x = + \sin.(360^\circ + A) = - \sin.(360^\circ - 360^\circ + A) = - \sin.(60^\circ - A)$, c'est-à-dire l'équation (T) avec le changement de signe.

On reconnoîtra facilement qu'en ajoutant plus de deux fois la circonférence du cercle, on n'auroit jamais d'autres valeurs de x que les trois déjà trouvées; et que si l'on ajoutoit un arc plus grand ou moindre que la circonférence, on n'auroit plus un sinus égal à $\sin. 3A$: ce qui confirme la théorie des équations, suivant laquelle l'équation (P) ne peut avoir que trois racines.

Il y a donc trois sinus qui résolvent l'équation (P), savoir $\sin.A$, $\sin.(60^\circ - A)$, et $- \sin.(60^\circ + A)$. Et de même que nous avons eu ces trois racines, on trouvera facilement celles de chacune des équations des tables (125), et ces racines seront en aussi grand nombre qu'il y aura d'unités dans le facteur de A . *Voyez l'Errata.*

362. Si on fait $A = \frac{1}{3} a$, et qu'on appelle z la corde de l'arc $\frac{2}{3} a$, on a $\frac{1}{2} z = \sin.\frac{1}{3} a = \sin.A$; de sorte qu'en faisant $R = 1$, l'équation (P) donnera

$$(P') \dots \dots \frac{1}{8} z^3 - \frac{3}{8} z + \frac{1}{8} \text{cord}. 2a = 0.$$

À l'article 12 d'un Mémoire de M. d'Alembert, sur les quantités négatives (*Opusc. Math.* T. VIII, pag. 275, 276), article

que je crois n'avoir pas été relu par cet Auteur célèbre, puisqu'en peu de lignes il contient plusieurs erreurs, les quantités suivantes sont données comme racines de l'équation $\frac{1}{8}z^3 + \frac{1}{8}Az = \frac{1}{2}\text{cord}.2a$, laquelle, sous une forme peu différente, est la même que l'équation (P') : cependant le diviseur de $\text{cord}.2a$, dans celle-ci, est altéré dans celle-là ; mais nous le supposons le même, parce que cette altération est évidemment une erreur.

Racines : $\text{cord}.\frac{2}{3}a$, $\text{cord}.(60^\circ + \frac{2}{3}a)$, $\text{cord}.(120^\circ + \frac{2}{3}a)$, ou
 $2\sin.\frac{1}{3}a$, $2\sin.(30^\circ + \frac{1}{3}a)$, $2\sin.(60^\circ + \frac{1}{3}a)$.

Il est facile de démontrer l'inexactitude des deux dernières racines, en donnant une valeur déterminée à l'arc $\frac{1}{3}a$. Par exemple soit, pour plus de facilité, $\frac{1}{3}a = 30^\circ$; ce qui donne 1°. $z = 2\sin.30^\circ = 1$; 2°. $z = 2\sin.60^\circ = \sqrt{3}$, (43); 3°. $z = 2\sin.90^\circ = 2$; en substituant séparément ces trois valeurs de z dans l'équation (P'), qui, multipliée par 8, devient $z^3 - 3z + \text{cord}.2a = 0$, on a 1°. $1 - 3 + 2 = 0$, ce qui est vrai; 2°. $3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 2 = 0$, ce qui n'est pas juste; 3°. $8 - 6 + 2 = 0$, ce qui ne l'est pas davantage.

Les trois racines exactes de l'équation $z^3 - 3z + \text{cord}.2a = 0$, ou $\text{cord}.\frac{2}{3}a - 3\text{cord}.\frac{2}{3}a + 2\sin.a = 0$, se trouvent facilement par la méthode que nous avons suivie (360). La première racine est, comme nous venons de le voir, $\text{cord}.\frac{2}{3}a$. Si au lieu de a on écrit $360^\circ + a$, ce qui n'altère ni la valeur ni le signe de $\sin.a$, la seconde racine sera $\text{cord}.(240^\circ + \frac{2}{3}a)$, ou $2\sin.(120^\circ + \frac{1}{3}a)$. Enfin si l'on écrit $720^\circ + a$ au lieu de a , on aura pour troisième racine, $\text{cord}.(480^\circ + \frac{2}{3}a)$, ou $2\sin.(240^\circ + \frac{1}{3}a)$, racine négative (42).

Le but de cette petite digression étoit sur-tout de démontrer, en trouvant une racine négative, que les cordes peuvent avoir le signe négatif, quoiqu'il n'y ait pas deux cordes, dans un même cercle, dont les directions soient absolument opposées. C'est donc, ainsi que le pense l'illustre Auteur que nous venons de

citer, un principe sujet à erreur, que de regarder l'opposition des signes comme la suite de la direction diamétralement opposée des lignes de même espece. En général si on fait $360^\circ = c$, et $a < c$, les sinus positifs seront, d'après les regles et la formule élémentaires (42, 51), $\sin.\frac{1}{2}a$, $\sin.\frac{1}{2}(2c + a)$, $\sin.\frac{1}{2}(4c + a)$, &c.; et les négatifs, $\sin.\frac{1}{2}(c + a)$, $\sin.\frac{1}{2}(3c + a)$, $\sin.\frac{1}{2}(5c + a)$, &c. Donc les cordes positives sont $\text{cord}.a$, $\text{cord}.(2c + a)$, $\text{cord}.(4c + a)$, &c.; les négatives, $\text{cord}.(c + a)$, $\text{cord}.(3c + a)$, $\text{cord}.(5c + a)$, &c. Ce changement alternatif dans les signes est absolument conforme à la regle de M. de l'Hôpital, (*Analyse des Infinitement-petits*, art. 46), qui est celle que j'ai donnée (16). La corde de l'arc a croît en même temps que cet arc, et avec le signe positif, de 0° jusqu'à 180° , point où elle arrive à son *maximum*. L'arc continuant à croître, la corde diminue progressivement, sans qu'aucune cause ait dû altérer son signe positif, et enfin elle se réduit à zéro, lorsque l'arc parvient à 360° . Si l'arc croît encore dans le même sens, (car la circonférence du cercle rentrant en elle-même, on peut considérer cette courbe comme faisant sur elle-même une infinité de révolutions), $\text{cord}.(c + a)$ doit être négative, puisque cette corde a passé par zéro. En raisonnant ainsi, on trouvera que la corde doit changer de signe, chaque fois que l'arc a achevé de décrire en croissant une circonférence entière.

363. *EXEMPLES de la résolution des équations du troisieme degré, par la Trigonométrie.*

Soit à résoudre l'équation $x^3 + 2x + 33 = 0$. C'est le cas de la formule (G), (356). On aura donc

$$\text{tang}.B = \frac{2}{3 \times 33} \times 2\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{99} \times \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\text{tang}.A = \sqrt[3]{\text{tang}.\frac{1}{2}B}$$

$$x = -\cot.2A \times \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

Voici le calcul de ces équations.

63.

$$\begin{array}{rcl}
 \log. 8 & = & 0,90308999 \\
 \text{compl. log. } 3 & = & 9,52287875 \\
 \hline
 \text{somme} & & 0,42596874 \\
 \hline
 \text{demi-somme} & & 0,21298437 = \log. \sqrt{\frac{8}{3}} \\
 \log. 2 & = & 0,30103 \\
 \text{compl. log. } 99 & = & 8,00436481 \\
 \hline
 \log. \text{ tang. } B & = & 8,5183792 \\
 B & = & 1^\circ 53' 22'', 16 \\
 \log. \text{ tang. } \frac{1}{2} B & = & 8,2172311 \\
 \text{le tiers de } \log. \text{ tang. } \frac{1}{2} B, \text{ ou } \log. \text{ tang. } A & = & 9,4057437 \\
 A & = & 14^\circ 16' 49'', 49 \\
 \hline
 \log. \cot. 2 A & = & 0,2641368 \\
 \log. \sqrt{\frac{8}{3}} & = & 0,2129844 \\
 \hline
 \text{somme ou } \log. - x & = & 0,4771212 = \log. - 3.
 \end{array}$$

Proposons-nous maintenant de résoudre l'équation $x^3 - \frac{403}{441}x + \frac{46}{147} = 0$, dans laquelle p étant négatif, il faut d'abord reconnoître combien de racines réelles elle doit avoir. Or $4p^3 = 4 \times (\frac{403}{441})^3$, et $27q^2 = 27 \times (\frac{46}{147})^2$; et $\log. 4p^3 = 0,485$, $\log. 27q^2 = 0,422$. Donc $4p^3 > 27q^2$. C'est donc le cas que l'analyse regarde comme *irréductible*. Nous aurons par conséquent (359), (360),

$$\sin. 3A = \frac{3 \times 46}{147} \times \frac{441}{403} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{403}{3 \times 441}}} = \frac{414}{403} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1612}{1323}}}$$

Les trois valeurs de x seront donc

$$1^\circ. x = \sin. A \sqrt{\frac{1612}{1323}}$$

$$2^\circ. x = \sin. (60^\circ - A) \sqrt{\frac{1612}{1323}}$$

$$3^\circ. x = - \sin. (60^\circ + A) \sqrt{\frac{1612}{1323}}$$

Voici le calcul de ces quatre équations.

$$\log. 1612$$

log. 1612	=	3,2073650	
compl. log. 1323	=	6,8784402	
somme		<u>0,0858052</u>	
demi-somme		<u>0,0429026</u>	log. constant
compl. du log. constant		9,9570974	
log. 414	=	2,61700034	
compl. log. 403	=	<u>7,39469495</u>	
Donc log. sin. 3A	=	<u>9,9687927</u>	= log. sin. 68° 32' 18", 55
log. sin. A	=	9,5891206	
log. constant		<u>0,0429026</u>	
1°. log. x	=	<u>9,6320232</u>	= log. 0,4285714
log. sin. (60° — A)	=	9,7810061	
log. constant		<u>0,0429026</u>	
2°. log. x	=	<u>9,8239087</u>	= log. 0,6666666
log. sin. (60° + A)	=	9,9966060	
log. constant		<u>0,0429026</u>	
3°. log. — x	=	0,0395086	= log. —1,095238

On observera en premier lieu que la valeur négative est égale à la somme des deux positives, comme elle doit l'être; ce qui prouve l'exactitude du calcul. Ensuite il est facile de voir que la seconde valeur de x est $\frac{2}{3}$. Pour savoir si les deux autres valeurs peuvent être de même exprimées par des fractions exactes, on aura recours à l'expédient que j'ai suggéré (354), et on aura pour la première valeur, $\text{compl. log. } x = -0,3679768 = \text{log. } \frac{1}{2,333333}$; et il est aisé de voir qu'en multipliant par 3 la dernière fraction, on a $x = \frac{3}{7}$. En effet $\text{log. } \frac{3}{7}$ est 9,6320232, c'est-à-dire précisément le logarithme de la première valeur de x . Mais la valeur négative doit être égale à la somme des deux positives, prises avec un signe

contraire ; elle sera donc $-\frac{2}{3} - \frac{3}{7} = -\frac{23}{21}$. On aura donc, pour les trois valeurs de x dans l'équation donnée, $+\frac{2}{3}$, $+\frac{3}{7}$, $-\frac{23}{21}$. En substituant séparément chacune d'elles dans l'équation, on pourra s'assurer de leur justesse.

J'ai rassemblé, pour plus de commodité, dans la table V, à la fin de cet Ouvrage, les solutions de toutes les équations du second et du troisième degré.

CHAPITRE XIII.

De la Résolution numérique de toutes sortes d'Équations.

364. **AVANT** d'exposer la solution directe de certaines équations trigonométriques, soit finies soit infinies, qui peuvent se présenter plus fréquemment, je crois devoir donner une méthode générale indirecte, qui m'a paru très commode dans la pratique pour la résolution numérique d'une équation quelconque, et dont j'eus d'abord l'idée en cherchant la solution de l'équation suivante,

$$(A) \dots a \sin.x + b \tan.x = n,$$

par laquelle je voulois trouver l'arc x . Cet arc étant, dans ce cas, représenté par deux différentes lignes trigonométriques, il faudroit commencer par en éliminer une, si l'on vouloit résoudre l'équation directement. En substituant, par exemple, à $\tan.x$ sa valeur,

(I. 34°), on auroit $a \sin.x + \frac{b \sin.x}{\sqrt{1 - \sin.^2 x}} = n$, ou, en faisant disparaître, comme il seroit nécessaire, le signe radical, $a^2 \sin.^4 x - 2an \sin.^3 x + (b^2 + n^2 - a^2) \sin.^2 x + 2an \sin.x = n^2$, c'est-à-dire une équation du quatrième degré ; et l'on sait assez combien la solution d'une pareille équation est laborieuse ; tandis

qu'avec une ou deux fausses positions, on trouvera très facilement, comme il suit, la valeur cherchée.

En différenciant l'équation (A), on a (II. 37°, 39°), $a \cos. x \times \delta x + \frac{b \delta x}{\cos.^2 x} = \delta n$; d'où l'on tire

$$(B) \dots \delta x = \frac{\delta n}{a \cos. x + \frac{b}{\cos.^2 x}}.$$

Si on calcule l'équation (A) en supposant pour x une valeur quelconque, on aura une valeur fautive de n ; puis en appelant δn l'erreur de cette valeur, on aura, par le calcul de l'équation (B), la correction δx qu'il faut faire à la valeur supposée de x , pour avoir sa valeur exacte, ou du moins beaucoup plus approchée. En substituant de nouveau dans l'équation (A) cette nouvelle valeur de x , s'il reste une erreur δn , elle sera beaucoup moindre que la première; ensorte que par l'équation (B) on obtiendra une seconde correction beaucoup plus exacte de la valeur de x ; et en continuant d'opérer ainsi, on arrivera promptement à cette valeur avec autant de précision qu'il sera possible.

Comme il est rare que l'on n'ait pas d'avance quelque idée de la valeur approchée de l'inconnue, il suffira le plus souvent, pour la trouver, de calculer une fois seulement les deux équations. Au surplus la répétition de ces calculs n'est pas fatigante, attendu les quantités constantes et l'uniformité des opérations. Cette méthode a l'avantage d'être applicable avec une égale facilité aux équations les plus compliquées, soit algébriques soit trigonométriques, et même aux équations transcendantes; et elle se présente si naturellement, que je suis étonné qu'on n'ait pas pensé à en faire usage dans un grand nombre de problèmes, et spécialement dans celui de Kepler (769), qu'aucun autre moyen ne peut résoudre avec plus de promptitude et de simplicité. La seule condition nécessaire pour que cette méthode convienne dans tous les cas, c'est que δn soit notablement plus petit que n ; ce qu'on obtiendra en calculant l'équation proposée, avec une seconde supposition pour

Dd ij

la valeur de x , lorsque la première aura donné δn trop grande. La raison en est claire ; en différentiant, on néglige les puissances de δx , (133), et par conséquent les résultats seront d'autant plus loin de la vérité, que les différentielles seront plus éloignées d'être infiniment petites.

Démontrons, par quelques exemples, l'utilité de la méthode proposée.

365. Soit à résoudre l'équation

$$8 \sin.x + \operatorname{tang}.x \sqrt{7803} = 55 = n.$$

Je suppose $x = 35^\circ$, et j'ai $8 \sin.35^\circ = 4,58861$

$$\operatorname{tang}.35^\circ \sqrt{7803} = 61,85254$$

$$\text{somme ou valeur fausse de } n \quad \underline{66,44115}$$

$$\text{Donc } \delta n = 66,44115 - 55 = 11,44115.$$

Cette valeur de δn est trop grande pour qu'on puisse espérer, au moyen de l'équation différentielle (B), une valeur très approchée de δx . Mais pour avoir moins d'erreur, j'observe que δn égale à-peu-près un sixième de la valeur fausse trouvée pour n ; et faisant de même $\delta x = 6^\circ$, c'est-à-dire à-peu-près un sixième de la valeur supposée de x , j'emploie, dans le calcul de l'équation (B), $\cos.32^\circ$ au lieu de $\cos.35^\circ$; ce qui m'est indiqué par les différences finies du sinus et de la tangente (II. 30° , 32°), dans lesquelles je vois qu'au lieu de $\cos.x$, je dois à la rigueur employer, lorsqu'il s'agit du sinus, $\cos.(x - \frac{1}{2} \delta x)$, (nous verrons ci-dessous la raison de la différentielle négative), et lorsqu'il s'agit de la tangente, $\cos.x \cos.(x - \delta x)$, ce qui revient, à très peu près, à $\cos.^2(x - \frac{1}{2} \delta x)$. J'ai donc

$$8 \cos.32^\circ = 6,784$$

$$\frac{\sqrt{7803}}{\cos.^2 32^\circ} = 122,826$$

$$\text{somme} \quad \underline{129,61}$$

et divisant δn par cette somme, puis multipliant par R'' , (263), je trouve $\delta x = 5^\circ 3' 28''$.

Si dans ce calcul je n'avois pas eu l'attention d'employer $\cos. 32^\circ$ au lieu de $\cos. 35^\circ$, j'aurois trouvé $\delta x = 4^\circ 44' 36''$, et l'on verra bientôt combien cette valeur s'éloigne davantage de la valeur exacte de δx .

J'observe que, dans l'équation (B), δx et δn ont le même signe, et qu'ayant trouvé ci-dessus une valeur trop grande pour n , il en résulte que δn et par conséquent δx sont négatives. En retranchant donc $5^\circ 3'$ (la valeur de δx est, dans ce cas-ci, trop grande, et ne peut être assez exacte pour qu'on tienne compte des secondes) de 35° , première valeur supposée de x , j'ai, pour valeur très approchée, $x = 29^\circ 57'$. En calculant de nouveau avec cette valeur l'équation proposée, j'ai $8 \sin. 29^\circ 57' + \tan g. 29^\circ 57' \sqrt{7803} = 54,89122$, seconde valeur presque exacte de n ; d'où je tire $\delta n = 0,10878 = \frac{n}{550}$ environ. Donc, en supposant $\delta x = \frac{x}{550}$ ou, en nombres ronds, $\frac{30^\circ}{550}$ ou $3'$ à-peu-près, j'aurai $\delta x = \frac{0,10878}{8 \cos. 29^\circ 58' \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7803}}{\cos. 29^\circ 58' \frac{1}{2}}}$, ou, en effectuant le calcul

du dernier membre, et multipliant par R'' , $\delta x = 3'$ exactement. Ici δx est positif; donc il faut l'ajouter à la valeur approchée $29^\circ 57'$ déjà trouvée pour x , et l'on aura $x = 30^\circ$ dans l'équation proposée.

Nous venons de voir par quels artifices on peut abrégér le travail dans cette méthode : appliquons-la maintenant à un problème utile.

366. *Trouver la limite commune de la convergence des deux séries (U); (153), et (Z); (156).*

Le but de la solution de ce problème est de reconnoître quelle est la plus convergente de ces deux séries pour calculer la tangente d'un arc donné.

Si on veut calculer une tangente par le moyen de la série (Z) des cotangentes, il faut employer $90^\circ - A$ au lieu de A . Cette substitution faite, si l'on compare deux termes également distants

du premier dans les deux séries, la convergence sera la même lorsque ces deux termes auront des valeurs égales. Cette comparaison ne doit pas être faite entre les premiers termes, la série la plus convergente étant celle dans laquelle les termes diminuent le plus de valeur à mesure qu'ils s'éloignent du premier. Je prends donc le huitième terme de la série (U), qui est (155),

$\frac{929569 A^{13}}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}$, et de même le huitième terme de la série (Z), qui est $\frac{4(90^\circ - A)^{13}}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}$. En les mettant en équation, et multipliant les deux membres par $3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13$, j'ai $\frac{929569}{7 \times 5} \times A^{15} = 4(90^\circ - A)^{13}$ ou $\frac{929569}{140} \times A^{15} = (90^\circ - A)^{13}$, équation de laquelle il s'agit de tirer la valeur de A. Soit, pour plus de simplicité, $\frac{929569}{140} = a$. En tirant la racine 13^e, j'aurai $\sqrt[13]{a} A^{15} = 90^\circ - A$, et par conséquent $a^{\frac{1}{13}} A^{\frac{15}{13}} + A = 90^\circ = n$. Désignons par B une valeur de A supposée à volonté, et soit d'abord $B = 40^\circ$. Je fais le calcul suivant :

$$\begin{array}{rcl}
 \log. 40 & = & 1,60205999 \\
 (262), \text{ compl. log. } R^\circ & = & 8,24187737 \\
 \log. B & = & 9,84393736 \\
 \log. B^{15} \text{ ou } 15 \log. B & = & 7,6590604 \\
 \log. a = \begin{cases} \log. 929569 & = 5,9682816 \\ \text{compl. log. } 140 & = 7,8538720 \end{cases} \\
 \log. a B^{15} & = & 1,4812140 \\
 \frac{1}{13} \log. a B^{15} & = & 0,1139395 \\
 \text{Pour avoir } \sqrt[13]{a} B^{15} \text{ en degrés, j'ajoute log. } R^\circ & = & 1,7581226 \\
 \text{somme} & = & 1,8720621 \\
 \text{Donc } \sqrt[13]{a} B^{15} & = & 74^\circ, 48385 \\
 B & = & 40^\circ \\
 \text{Somme (que je désignerai par } n') & = & 114^\circ, 48385 \\
 \text{La véritable valeur de } n \text{ est} & = & 90^\circ \\
 \text{Erreur, ou } \delta n', (364) & = & 24^\circ, 48385
 \end{array}$$

Cette erreur est considérable et mériterait une seconde supposition

avant de faire usage du calcul différentiel. Mais nous nous en dispenserons, et nous obtiendrons une correction presque juste en employant, dans le calcul numérique de l'équation différentielle que nous allons former, une valeur $B - \frac{1}{2} \delta B$ au lieu de B , à l'imitation de ce que nous avons fait (365). En différentiant l'équation calculée, $a^{\frac{1}{3}} B^{\frac{13}{3}} + B = n'$, j'aurai $\delta n' = \frac{15}{13} a^{\frac{1}{3}} B^{\frac{13}{3}-1} \delta B + \delta B = \delta B \left(1 + \frac{15}{13} a^{\frac{1}{3}} B^{\frac{10}{3}}\right)$; d'où je tire $\delta B = \frac{\delta n'}{1 + \frac{15}{13} \sqrt[13]{a B^2}}$, et puisque $\delta n' = \frac{1}{2} n'$ à-peu-près, si je suppose de même $\delta B = \frac{1}{2} B = 8^\circ$, j'aurai $B - \frac{1}{2} \delta B = 36^\circ$ pour la valeur à employer dans l'équation différentielle, dont voici le calcul, dans lequel j'appelle D la quantité $B - \frac{1}{2} \delta B$:

$$\begin{array}{rcl}
 \log. 36 & = & 1,55630250 \\
 \text{compl. log. } R^\circ & = & 8,24187737 \\
 \log. D & = & 9,79817987 \\
 \text{Idem} & = & 9,79817987 \\
 \text{Je tire du calcul précédent } \log. a & = & 3,8221536 \\
 \log. a D^2 & = & 3,41851334 \\
 \frac{2}{13} \log. a D^2 & = & 0,26296256 \\
 \log. 15 & = & 1,17609126 \\
 \text{compl. log. } 13 & = & 8,88605665 \\
 \text{somme} & = & 0,3251105 \\
 \text{Donc } \frac{15}{13} \sqrt[13]{a D^2} & = & 2,11403 \\
 \text{compl. log. } 3,11403 & = & 9,5066776 \\
 \log. \delta n' = \log. - 24,48385 & = & 1,3888797 \\
 \text{somme ou log. } - \delta B & = & 0,895557
 \end{array}$$

Donc $\delta B = - 7,862 = - 7^\circ 52'$, et par conséquent je trouve pour la valeur cherchée de A , $32^\circ 8'$; ce qui ne diffère que de peu de secondes de la véritable valeur, comme on peut le reconnoître par une seconde opération. Mais dans la solution du problème dont il s'agit, plus d'exactitude seroit inutile, et nous pouvons conclure que pour calculer une tangente, la plus conver-

gente des séries (U) et (Z) est la première quand l'arc est moindre que 32° , et la seconde quand l'arc est de plus de 32° .

Si dans les deux problèmes que nous venons de résoudre, on essaye d'employer les règles ordinaires pour la correction des fausses positions, on reconnoîtra que la méthode que nous proposons est, dans bien des cas, préférable à ces règles : pour le prouver d'autant mieux, nous allons appliquer cette même méthode à divers problèmes relatifs à la quadrature du cercle, qu'Euler a résolus au moyen d'un grand nombre de fausses positions, (*Anal. infinit.* Lib. II, cap. XXII).

367. Dans le premier de ces problèmes, il s'agit de trouver quel est l'arc égal à son cosinus. L'équation à résoudre est donc $A = \cos.A$.

Je suppose d'abord pour A une valeur quelconque, que je nomme P; j'appelle Q la valeur que j'aurai pour A dans le second membre, lorsque j'aurai mis P dans le premier; ce qui me donnera

$$(C)..... P = \cos.Q.$$

En différentiant, j'ai $\delta P = -\delta Q \sin.Q$. Je fais $\delta P = A \curvearrowright P$; d'où il suit que $\delta Q = A \curvearrowright Q$, et que par conséquent $A = P + \delta P = Q + \delta Q$. Donc

$$(D)..... \delta P = Q - P + \delta Q.$$

Donc aussi $Q - P + \delta Q = -\delta Q \sin.Q$, ou $Q - P = -\delta Q (1 + \sin.Q) = -\delta Q \times 2 \sin.^2 (45^\circ + \frac{1}{2}Q)$, (I. 11°). D'où je déduis

$$(E)..... \delta Q = \frac{-\frac{1}{2}(Q - P)}{\sin.^2 (45^\circ + \frac{1}{2}Q)}.$$

Les équations (C), (E) nous donneront promptement la valeur cherchée de A.

En effet supposons d'abord, avec Euler, $P = 30^\circ$.

$$\begin{aligned} \log. 30 &= 1,477121 \\ (262), \text{ compl. log. } R^\circ &= 8,241877 \\ \log. P = \log. \cos.Q &= 9,718998 \end{aligned}$$

ce qui donne $Q = 58^{\circ} 26'$: donc $\frac{1}{2}(Q - P) = 14^{\circ} 13' = 14^{\circ}, 2$ à-peu-près; et $45^{\circ} + \frac{1}{2}Q = 74^{\circ} 13'$. En calculant l'équation (E), on aura par conséquent

$$\begin{aligned}\log. 14, 2 &= 1, 15229 \\ \text{compl. log. sin. } 74^{\circ} 13' &= 0, 01669 \\ &\quad 0, 01669 \\ \log. - \delta Q &= 1, 18567;\end{aligned}$$

ce qui donne $\delta Q = - 15^{\circ}, 33 = - 15^{\circ} 20'$. Pour avoir cette valeur plus approchée, je corrige l'erreur la plus grave (260) de la formule (E), en employant $Q + \frac{1}{2}\delta Q$ au lieu de Q dans l'expression $\sin.(45^{\circ} + \frac{1}{2}Q)$, comme l'enseignent les différentielles finies des lignes trigonométriques; et j'ai $Q + \frac{1}{2}\delta Q = 58^{\circ} 26' - 7^{\circ} 40' = 50^{\circ} 46'$, et $45^{\circ} + \frac{1}{2}(Q + \frac{1}{2}\delta Q) = 70^{\circ} 23'$. Alors l'équation (E) donne $\delta Q = - \frac{14^{\circ}, 2}{\sin.^2 70^{\circ} 23'} = - 16^{\circ}$; donc A ou $Q + \delta Q = 58^{\circ} 26' - 16^{\circ} = 42^{\circ} 26'$.

Cette valeur de A ne peut être exacte, parceque l'erreur δQ est trop grande; mais elle est assez approchée pour qu'en faisant encore une autre supposition seulement, on parvienne à la valeur cherchée. Soit donc, pour seconde supposition, et en prenant pour les minutes un nombre qui puisse se réduire exactement en dixièmes de degrés, $P = 42^{\circ} 24' = 42^{\circ}, 4$. En calculant l'équation (C), on a

$$\begin{aligned}\log. 42, 4 &= 1, 62736586 \\ \text{compl. log. R}^{\circ} &= 8, 24187737 \\ \log. \cos. Q &= 9, 8692432\end{aligned}$$

Donc $Q = 42^{\circ} 16' 0''$, 89, et $\frac{1}{2}(Q - P) = - 3' 59''$, 555.

Alors l'équation (E) donne $\delta Q = \frac{239'', 555}{\sin.^2 66^{\circ} 8'} = 286'', 5$; et en employant $Q + \frac{1}{2}\delta Q$ au lieu de Q dans le dénominateur, on aura, avec toute la précision que peuvent donner les logarithmes à sept décimales, $\delta Q = \frac{239'', 555}{\sin.^2 66^{\circ} 9' 12''} = 286'', 36$. Donc A ou $Q + \delta Q = 42^{\circ} 16' 0''$, 89 + $4' 46''$, 36 = $42^{\circ} 20' 47''$, 25. Euler fait sept suppositions et calcule trois règles de trois pour

arriver à cette valeur. Au lieu de $15''' = 0''$, 25, il trouve $14'''$ par une erreur dans la dernière des proportions qu'il emploie : mais au surplus les logarithmes à sept décimales ne peuvent donner exactement les tierces ; et si je tiens compte des centièmes de secondes, c'est dans la seule vue d'avoir les dixièmes avec précision.

Ce problème est utile pour trouver le sinus qui divise en deux parties égales l'aire du quart de cercle, et pour trouver la corde qui divise en deux parties égales l'aire du demi-cercle, comme on peut le voir dans le troisième et le quatrième problème d'Euler.

Dans le second problème qu'il se propose, il s'agit de trouver le secteur que la corde divise en deux également ; dans ce cas on a à résoudre l'équation $A = \sin.2A$. Je fais $P = \sin.2Q$, et j'ai $\delta P = 2 \delta Q \cos.2Q = Q - P + \delta Q$, suivant la formule (D). Donc $Q - P = 2 \delta Q (\cos.2Q - \frac{1}{2}) = 2 \delta Q (\cos.2Q - \cos.60^\circ) = 4 \delta Q \sin.(30^\circ - Q) \sin.(30^\circ + Q)$, (II. 23°) ; et par conséquent

$$\delta Q = \frac{\frac{1}{4}(Q - P)}{\sin.(30^\circ - Q) \sin.(30^\circ + Q)}.$$

Faisons maintenant, avec Euler, $P = 50^\circ$; nous aurons $\frac{50}{R} = \sin.2Q = \sin.60^\circ 46' = \sin.119^\circ 14'$, (19). Cette dernière valeur est celle qu'il convient d'employer, puisqu'elle donne pour Q une valeur plus approchée de celle de P ; cette valeur sera $59^\circ 37' = Q$. Donc $\frac{1}{4}(Q - P) = 2^\circ 24'$ à-peu-près, et (154), $\delta Q = \frac{2^\circ, 4}{\sin.29^\circ 37' \sin.89^\circ 37'} = -4^\circ, 8$; puis, en employant $Q + \frac{1}{2}\delta Q$ au lieu de Q , ce dont nous n'avertirons plus, $\delta Q = \frac{2^\circ, 4}{\sin.27^\circ 13' \sin.87^\circ 13'} = -5^\circ, 25$. Par conséquent A ou $Q + \delta Q = 59^\circ 37' - 5^\circ 15' = 54^\circ 22'$.

Soit donc pour seconde hypothèse $P = 54^\circ 21' = \frac{54,35}{R} = \sin.2Q$: alors $Q = 54^\circ 13' 34''$, 5 ; et par conséquent $\frac{1}{4}(Q - P) = -1' 51'', 375$; ce qui donne $\delta Q = \frac{-111'', 375}{\sin.24^\circ 14' \sin.84^\circ 14'} =$

273''; et enfin, avec toute la précision qu'on peut desirer, $\delta Q = \frac{-111'', 375}{\sin. 24^\circ 15' 50'' \sin. 84^\circ 15' 50''} = 272'', 39$. Donc $A = Q + \delta Q = 54^\circ 13' 34'', 5 + 4' 32'', 4 = 54^\circ 18' 6'', 9$.

La solution de ce problème a coûté à Euler six hypotheses et deux regles de trois.

Dans le cinquieme problème Euler propose de tirer d'un point de la circonférence deux cordes qui coupent l'aire du cercle en trois parties égales. On a à résoudre l'équation $A = \sin.(60^\circ - A)$. Je fais $P = \sin.(60^\circ - Q)$, et j'ai $\delta P = -\delta Q \cos.(60^\circ - Q) = Q - P + \delta Q$; d'où je tire $Q - P = -\delta Q (1 + \cos. 60^\circ - Q) = -2\delta Q \cos.^2(30^\circ - \frac{1}{2}Q)$, (I. 24°); et par conséquent

$$\delta Q = \frac{-\frac{1}{2}(Q - P)}{\cos.^2(30^\circ - \frac{1}{2}Q)}.$$

Faisons actuellement, comme Euler, $P = 20^\circ$. Nous aurons $\frac{20}{R^\circ} = \sin.(60^\circ - Q) = \sin. 20^\circ 26'$; ce qui donne $Q = 39^\circ 34'$, et $\frac{1}{2}(Q - P) = 9^\circ 47' = 9^\circ, 8$ à-peu-près. Donc $\delta Q = \frac{-9^\circ, 8}{\cos.^2 10^\circ 13'} = -10^\circ, 1$; et, plus exactement, $\delta Q = \frac{-9^\circ, 8}{\cos.^2 12^\circ 45'} = -10^\circ, 3$. Donc $A = Q + \delta Q = 39^\circ 34' - 10^\circ 18' = 29^\circ 16'$.

Soit donc, pour seconde supposition, $P = 29^\circ 15' = \frac{29, 25}{R^\circ} = \sin.(60^\circ - Q)$; ce qui donne $Q = 29^\circ 18' 8'', 17$. Alors $\frac{1}{2}(Q - P) = 1' 34'', 085$; et $\delta Q = \frac{-94'', 085}{\cos.^2 15^\circ 21'} = -101''$; et plus exactement, $\delta Q = \frac{-94'', 085}{\cos.^2 15^\circ 21' 20''} = -101''$, 18. Donc $Q + \delta Q$ ou $A = 29^\circ 16' 27''$, comme le trouve Euler au moyen de six suppositions et de deux regles de trois.

L'objet du sixieme problème d'Euler est de trouver un arc qui soit égal à la somme du rayon, du cosinus et du sinus. On a à résoudre l'équation $180^\circ - A = 1 + \cos.A + \sin.A$. A l'unité je substitue la valeur du rayon en degrés, laquelle est $57^\circ, 29578$, comme on peut le déduire de $\log.R^\circ$, (262); et j'ai $122^\circ, 70422 -$

$\Lambda = \cos.A + \sin.A = \sin.(45^\circ + A) \sqrt{2}$, (II. 7°). Soit, pour abréger, $122^\circ, 70422 = C$; nous aurons, toujours par la même méthode, $C - P = \sin.(45^\circ + Q) \sqrt{2}$, et $-\delta P = \delta Q \cos.(45^\circ + Q) \sqrt{2} = P - Q - \delta Q$: d'où l'on tire $P - Q = \delta Q \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \cos.45^\circ + Q \right) \sqrt{2} = \delta Q \left(\cos.45^\circ + \cos.45^\circ + Q \right) \sqrt{2} = 2 \delta Q \cos.(45^\circ + \frac{1}{2}Q) \cos.\frac{1}{2}Q \sqrt{2}$, (II. 19°). Et par conséquent

$$\delta Q = \frac{\frac{1}{2}(P - Q)}{\cos.\frac{1}{2}Q \cos.(45^\circ + \frac{1}{2}Q) \sqrt{2}}.$$

Soit, avec Euler, $P = 40^\circ$; alors $C - P = 82^\circ, 70422$. Mais $\frac{82, 70422}{R^\circ \sqrt{2}}$ est > 1 , tandis que cette quantité doit être égale à $\sin.(45^\circ + Q)$; donc la valeur supposée pour P est trop petite.

Par la seconde supposition d'Euler, $P = 42^\circ$; ce qui donne $\frac{80, 70422}{R^\circ \sqrt{2}} = \sin.(45^\circ + Q) = \sin.84^\circ 52'$, et par conséquent $Q = 39^\circ 52'$, $\frac{1}{2}(P - Q) = 1^\circ 4' = 1^\circ, 07$ à très peu près, et $\delta Q = \frac{1^\circ, 07}{\cos.19^\circ 56' \cos.64^\circ 56' \sqrt{2}} = 1^\circ, 9 = 1^\circ 54'$; et, plus exactement, $\delta Q = \frac{1^\circ, 07}{\cos.20^\circ 24' \cos.65^\circ 24' \sqrt{2}} = 1^\circ, 94 = 1^\circ 56'$. Donc $Q + \delta Q$ ou $A = 39^\circ 52' + 1^\circ 56' = 41^\circ 48'$.

Soit donc, pour dernière hypothèse, $P = 41^\circ 48' = 41^\circ, 8$. Alors $C - P = 80^\circ, 90422$; et $\frac{80, 90422}{R^\circ \sqrt{2}} = \sin.86^\circ 49' 36'', 4$; ce qui donne $Q = 41^\circ 49' 36'', 4$, et $\frac{1}{2}(P - Q) = -48'', 2$. Donc $\delta Q = \frac{-48'', 2}{\cos.20^\circ 55' \cos.65^\circ 55' \sqrt{2}} = -89'', 4$. Cette quantité est si petite, qu'il est inutile d'appliquer au dénominateur la correction ordinaire. On a donc $\Lambda = Q + \delta Q = 41^\circ 48' 7'', 0$, valeur qu'Euler obtient par quatre suppositions et deux règles de trois.

Dans le septième problème, Euler cherche un secteur qui soit égal à la moitié du triangle formé par le rayon, par la tangente et par la sécante. L'équation à résoudre est $2\Lambda = \text{tang}.A$. Je fais $2P = \text{tang}.Q$, et j'ai $2\delta P = \frac{\delta Q}{\cos.^2 Q} = 2(Q - P + \delta Q)$.

et $Q - P = \delta Q \left(\frac{1}{2 \cos.^2 Q} - 1 \right) = \delta Q \times \frac{1 - 2 \cos.^2 Q}{2 \cos.^2 Q} = -\delta Q \times \frac{\cos. 2 Q}{2 \cos.^2 Q}$, (I. 23^e). Donc

$$\delta Q = \frac{2(P - Q) \cos.^2 Q}{\cos. 2 Q}$$

Actuellement faisons, avec Euler, $P = 60^\circ$: nous aurons $\frac{120}{R} = \text{tang. } Q$; $Q = 64^\circ 29'$; $2(P - Q) = -8^\circ 58' = -8^\circ, 95$ à-peu-près; $\delta Q = -\frac{8^\circ, 95 \cos.^2 64^\circ 29'}{\cos. 128^\circ 58'} = 2^\circ, 64 = 2^\circ, 38'$; et, plus exactement, $\delta Q = -\frac{8^\circ, 95 \cos.^2 65^\circ 48'}{\cos. 131^\circ 36'} = 2^\circ, 265$. Donc A ou $Q + \delta Q = 66^\circ 45'$.

Soit donc, pour seconde supposition, $P = 66^\circ, 75$; et par conséquent $\frac{133,5}{R} = \text{tang. } Q$. Alors $Q = 66^\circ 46' 18'', 72$; $2(P - Q) = -157'', 44$; $\delta Q = -\frac{157'', 44 \cos.^2 66^\circ 46'}{\cos. 133^\circ 33'} = 35'' \frac{1}{2}$, et, scrupuleusement, $\delta Q = -\frac{157'', 44 \cos.^2 66^\circ 46' 54''}{\cos. 133^\circ 33' 48''} = 35'', 51$. Donc $A = Q + \delta Q = 66^\circ 46' 54'', 23$.

Euler parvient à ce résultat au moyen de six suppositions dont le P. Fontana a aussi fait usage récemment (Tom. II *des Mémoires de la Société Italienne*) : ce qui me donne lieu de croire qu'on n'avoit point encore eu l'idée d'abrégier la méthode de fausse position, à l'aide du calcul différentiel.

Enfin, dans le huitième problème, Euler se propose de déterminer un arc qui soit égal à sa corde continuée jusqu'à la rencontre du prolongement du rayon qui passe à 90° de l'origine de cet arc. L'équation à résoudre est $A \sin. \frac{1}{2} A = 1$. Je l'écris ainsi, $A = \text{coséc.} \frac{1}{2} A$, expression qui conduit plus promptement à l'équation différentielle ci-après. Je fais ensuite, comme dans les opérations précédentes, $P = \text{coséc.} \frac{1}{2} Q$, et réduisant à la forme infinitésimale la différentielle finie de la cosécante (712), j'ai $\delta P = -\frac{1}{2} \delta Q \times \frac{\cos. \frac{1}{2} Q}{\sin.^2 \frac{1}{2} Q} = Q - P + \delta Q$, et $Q - P = -\delta Q \left(1 + \frac{\cot. \frac{1}{2} Q}{2 \sin. \frac{1}{2} Q} \right)$.

Maintenant faisons avec Euler $P = 70^\circ$. On a $\frac{R^\circ}{R} = \text{cosec.} \frac{1}{2}Q$, ou $\frac{R^\circ}{70} = \sin. \frac{1}{2}Q = \sin. 54^\circ 56'$: donc $Q = 109^\circ 52'$, et $Q - P = 39^\circ 52' = 39^\circ, 87$ à-peu-près. Mais $\frac{\cot. 54^\circ 56'}{2 \sin. 54^\circ 56'} = 0,4288$: donc $\delta Q = -\frac{39^\circ, 87}{1,4288} = -27^\circ, 9$. Plus exactement, $\frac{\cot. 47^\circ 57'}{2 \sin. 47^\circ 57'} = 0,60735$, et $\delta Q = -\frac{39^\circ, 87}{1,60735} = -24^\circ, 8$. Donc A ou $Q + \delta Q = 85^\circ 4'$.

Soit donc, pour seconde supposition, $P = 85^\circ 3' = 85^\circ, 05$. Nous aurons $\frac{R^\circ}{85,05} = \sin. \frac{1}{2}Q = \sin. 42^\circ 21' 3''$, 9 ; et par conséquent $Q = 84^\circ 42' 7''$, 8 ; et $Q - P = -20' 52''$, 2 = $-1252''$, 2. Mais $\frac{\cot. 42^\circ 21'}{2 \sin. 42^\circ 21'} = 0,81426$: donc $\delta Q = \frac{1252'', 2}{1,81426} = 690''$, 2 = $11' 30''$, 2. Plus rigoureusement, $\frac{\cot. 42^\circ 23' 56'', 4}{2 \sin. 42^\circ 23' 56'', 4} = 0,812098$; donc $\delta Q = \frac{1252'', 2}{1,812098} = 691''$, 02 = $11' 31''$, 02. Donc $A = Q + \delta Q = 84^\circ 53' 38''$, 82. Euler trouve une valeur un peu moins approchée : il y parvient après six suppositions.

Les équations résolues dans cet article sont du genre des équations *transcendantes*, parce qu'elles contiennent l'arc A sous deux formes hétérogènes (129), c'est-à-dire parce que l'arc y est comparé et égalé à des lignes droites, telles que les lignes trigonométriques de cet arc ou de ses multiples.

368. Il est facile de résoudre par notre méthode l'équation de cette forme, $\sin. nA = m \sin. A$, que propose M. d'Alembert, (*Opusc. Math.* Tom. V, p. 222), et de laquelle il s'agit de tirer la valeur de l'arc A . Je fais $\sin. nP = m \sin. Q$, et j'ai $n\delta P \cos. nP = m\delta Q \cos. Q$. Substituant la valeur de δP , (367), (D), je trouve $\delta Q = \frac{(Q - P) \cos. nP}{\frac{m}{n} \cos. Q - \cos. nP}$. Deux suppositions donneront la valeur

de A , pourvu que l'on observe, dans l'une et dans l'autre de ces suppositions, de faire deux calculs pour avoir la valeur de δQ , en employant dans le second de ces calculs $\cos. n(P + \frac{1}{2}\delta P)$

et $\cos.(Q + \frac{1}{2}\delta Q)$ au lieu de $\cos.nP$ et de $\cos.Q$, conformément à ce que nous avons fait (367).

Au reste ce problème et ceux de l'article précédent peuvent se résoudre directement par les séries infinies. Par exemple, l'équation de M. d'Alembert se transforme en celle-ci, (149), (W),
 $nA - \frac{1}{6}n^3 A^3 + \frac{1}{120}n^5 A^5 - \&c. = m(A - \frac{1}{6}A^3 + \frac{1}{120}A^5 - \&c.)$.
 Donc $(n - m)A - \frac{1}{6}(n^3 - m)A^3 + \frac{1}{120}(n^5 - m)A^5 - \&c. = 0$. Divisant par A et transposant, on a

$$n - m = \frac{1}{6}(n^3 - m)A^2 - \frac{1}{120}(n^5 - m)A^4 + \&c.$$

Qu'on fasse $A^2 = y$, et cette équation comparée à l'équation (P), (148), en observant qu'ici $n - m$ tient lieu de m dans l'équation (P), donnera une autre équation de la forme (Q), de laquelle on tirera la valeur de y , et par conséquent celle de A .

369. Nous avons donné une méthode indirecte pour résoudre une équation quelconque. Il nous reste à faire voir combien la Trigonométrie donne de facilité pour arriver à de certaines solutions qu'on n'obtient qu'avec peine par la voie de l'analyse.

Soit l'équation générale

$$(F)..... a \cos.A + b \sin.A = n,$$

de laquelle on veut tirer la valeur de l'arc A . Je fais $n = m \times \cos.(A \curvearrowright B)$, et par conséquent $a \cos.A + b \sin.A = m \cos.A \cos.B + m \sin.A \sin.B$: m étant indéterminée, je puis supposer $a = m \cos.B$; substituant cette valeur de a , réduisant et divisant par $\sin.A$, j'ai $b = m \sin.B$. Cette équation et la précédente, $a = m \cos.B$, donnent $m = \frac{a}{\cos.B} = \frac{b}{\sin.B}$, et par conséquent

$$(G)..... \text{tang}.B = \frac{b}{a}.$$

Et puisque, par la supposition, $\cos.(A \curvearrowright B) = \frac{n}{m}$, substituant la première valeur de m , j'aurai

$$(H)..... \cos.(A \curvearrowright B) = \frac{n \cos.B}{a}.$$

La solution des équations de la forme (F) se réduit donc à chercher par l'équation (G) un arc B, et par l'équation (H) un arc $A \propto B$: la différence de ces deux arcs est l'arc cherché A. *v. p. 109.*

Si quelqu'un des termes du premier membre de l'équation (F) étoit négatif, on donneroit, dans les équations (G), (H), le signe négatif à celui des coefficients a et b qui, dans l'équation (F), se trouveroit précédé de ce signe; et on observeroit les règles des signes (42).

Cette méthode donne toujours la valeur de A moindre que 90° . Lorsqu'on aura lieu de croire que cette valeur doit être plus grande, on calculera avec la valeur trouvée l'équation (F); et si le calcul ne donne pas pour n sa valeur connue, il s'ensuivra que A est en effet obtus. Alors on changera le signe de $a \cos. A$ dans la formule (F), ou le signe de a dans les formules (G), (H): ces formules donneront alors le supplément de la véritable valeur de A .

370. Soit maintenant à résoudre l'équation

$$a \operatorname{tang}.x + b \cot.x = n.$$

En multipliant l'équation par $\frac{\operatorname{tang}.x}{a}$, et transposant, on a $\operatorname{tang}.^2 x - \frac{n}{a} \operatorname{tang}.x = -\frac{b}{a}$, équation facile à résoudre par la méthode (352).

Si dans la proposée les signes étoient différents, on l'ameneroit toujours de même à une équation du second degré, dont on auroit la solution dans la table V.

371. Soit enfin proposée l'équation suivante, finie ou infinie :

$$(K) \dots z = u + a \sin.u + b \sin.2u + c \sin.3u + \&c.,$$

dans laquelle on cherche la valeur de u . Cette équation est du genre des *transcendantes* (367). La solution la plus facile, dans les cas particuliers, est celle que j'ai donnée (364). Mais si l'on veut

veut une formule générale infinie, dans laquelle la série soit convertie analytiquement comme il suit,

$$(L)... u = z + A \sin.z + B \sin.2z + C \sin.3z + \&c.,$$

les méthodes trigonométriques que nous avons vues jusqu'à présent sont extrêmement laborieuses; ce qui m'a donné lieu de chercher la méthode beaucoup plus simple que je vais exposer.

Si dans la série (K) on substitue les valeurs de $\sin.u$, $\sin.2u$, $\sin.3u$, $\&c.$, données par la série (W), (149), on aura, en réunissant les coefficients de chaque puissance de u ,

$$(M)... z = (1 + a + 2b + 3c + \&c.) u - \frac{1}{6}(a + 2^3b + 3^3c + \&c.) u^3 + \frac{1}{120}(a + 2^5b + 3^5c + \&c.) u^5 - \&c.$$

En traitant de même la série (L), elle deviendra

$$(N)... u = (1 + A + 2B + 3C + \&c.) z - \frac{1}{2.3}(A + 2^3B + 3^3C + \&c.) z^3 + \frac{1}{2.3.4.5}(A + 2^5B + 3^5C + \&c.) z^5 - \&c.$$

Pour plus de simplicité exprimons ces deux séries comme il suit:

$$z = mu - nu^3 + pu^5 - qu^7 + ru^9 - \&c.$$

$$u = Mz - Nz^3 + Pz^5 - Qz^7 + Rz^9 - \&c.$$

Substituons ensuite dans la dernière les valeurs de z , z^3 , z^5 , $\&c.$, prises de la précédente; et ordonnant les termes relativement aux puissances de u , (148), nous aurons

$$u = \left\{ \begin{array}{l} Mz = Mmu - Mnu^3 + Mp u^5 - Mqu^7 + Mr u^9 - \&c. \\ - Nz^3 = - Nm^3 + 3Nm^2n - 3Nm^2p + 3Nm^2q - \&c. \\ - 3Nmn^2 + 6Nmnp - \&c. \\ + Nn^3 - \&c. \\ + Pz^5 = Pm^5 - 5Pm^4n + 5Pm^4p - \&c. \\ + 10Pm^3n^2 - \&c. \\ - Qz^7 = - Qm^7 + 7Qm^6n - \&c. \\ + Rz^9 = + Rm^9 - \&c. \\ - \&c. \end{array} \right.$$

D'où nous tirerons par la méthode exposée (148),

$$M = \frac{1}{m}$$

$$N = -\frac{n}{m^4}$$

$$P = \frac{3n^2 - pm}{m^7}$$

$$Q = -\frac{12n^3 - 8mnp + qm^2}{m^{10}}$$

$$R = \frac{55n^4 - 55mn^2p + 10m^2nq + 5m^2p^2 - rm^3}{m^{13}}$$

Ce sont les équations finales du problème, puisqu'en substituant dans ces équations les valeurs de M , N , P , &c., m , n , p , &c., prises dans les séries (N), (M), il ne reste plus qu'à les résoudre par les méthodes ordinaires, pour en tirer les valeurs des indéterminées A , B , C , &c. Nous en allons faire un essai sur le problème de Kepler, en nous bornant à la quatrième indéterminée D .

372. Au lieu de $M = \frac{1}{m}$, on a par les séries (N), (M),
 $1 + A + 2B + 3C + 4D = \frac{1}{1 + a + 2b + 3c + 4d}$, ou
 (O)... $A + 2B + 3C + 4D = -\frac{a + 2b + 3c + 4d}{1 + a + 2b + 3c + 4d}$.

Au lieu de $N = -\frac{n}{m^4}$, on a $\frac{1}{6}(A + 8B + 27C + 64D)$
 $= -\frac{a + 8b + 27c + 64d}{6(1 + a + 2b + 3c + 4d)^4}$, ou
 (P)... $A + 8B + 27C + 64D = -\frac{a + 8b + 27c + 64d}{(1 + a + 2b + 3c + 4d)^4}$.

Or, dans le problème de Kepler, $a = 2e$, $b = \frac{3}{9}e^2 + \frac{1}{8}e^4$,
 $c = \frac{1}{3}e^3$, $d = \frac{5}{32}e^4$, (en désignant par e l'excentricité de l'orbite d'une planète). Substituant ces valeurs dans l'équation (O), et réduisant, on a

$$A + 2B + 3C + 4D = -\frac{2e + \frac{3}{2}e^2 + e^3 + \frac{7}{8}e^4}{1 + 2e + \frac{1}{2}e^2 + e^3 + \frac{5}{8}e^4}.$$

Qu'on effectue la division, en négligeant les puissances de e supérieures à la quatrième que nous avons prise pour limite, et on aura

$$(Q)... A + 2B + 3C + 4D = -2e + \frac{5}{2}e^2 - 3e^3 + \frac{27}{8}e^4.$$

Pour simplifier de la même manière l'équation (P), il faut premièrement élever à la quatrième puissance la valeur $(1 + 2e + \frac{1}{2}e^2 + e^3 + \frac{7}{8}e^4)$ de $1 + a + 2b + 3c + 4d$. Dans cette opération on peut négliger même la quatrième puissance de e , parceque dans la division elle n'influe que sur la cinquième. Alors on a facilement $(1 + 2e + \frac{1}{2}e^2 + e^3)^4 = 1 + 8e + 30e^2 + 72e^3$. En divisant par le second membre de cette équation la valeur de $a + 8b + 27c + 64d$, qui est $2e + 6e^2 + 9e^3 + 11e^4$, l'équation (P) deviendra

$$(R)... A + 8B + 27C + 64D = -2e + 10e^2 - 29e^3 + 65e^4.$$

Dans le problème de Kepler, la série (K) a cette propriété, que les coefficients a, c , &c., correspondants aux multiples impairs de u , contiennent seulement les puissances impaires de e , c'est-à-dire, de l'excentricité, et que les coefficients b, d , &c., correspondants aux multiples pairs de u , renferment seulement les puissances paires de e . La même loi doit avoir lieu par analogie dans la série (L) composée sur le modèle de la série (K), et on en a la preuve par l'équation de la forme (L) déjà calculée par plusieurs Mathématiciens, d'après d'autres méthodes. Si donc on admet pour principe que la valeur des indéterminées A, C , doit être exprimée par les puissances impaires de e , et celles de B, D par les puissances paires, on pourra tirer la valeur de ces quatre inconnues des deux seules équations (Q), (R), en les décomposant en quatre autres, comme il suit :

$$\begin{aligned} A + 3C &= -2e - 3e^3; & 2B + 4D &= \frac{5}{2}e^2 + \frac{27}{8}e^4; \\ A + 27C &= -2e - 29e^3; & 8B + 64D &= 10e^2 + 65e^4. \end{aligned}$$

C'est par cet artifice que des cinq équations finales seulement (371), j'ai tiré la valeur de 9 indéterminées, en poussant l'approximation de la série (L) jusqu'à $\sin.9z$ et à la 9^e puissance de l'excentricité, comme on le verra (771).

373. Dans l'analyse trigonométrique on a quelquefois besoin

de développer les valeurs approchées de $\sin.(n \sin.a)$, $\sin.(n \cos.a)$, $\cos.(n \sin.a)$, $\cos.(n \cos.a)$. En considérant $n \sin.a$ comme un arc, on a par la série (W), (149),

$$\sin.(n \sin.a) = n \sin.a - \frac{n^3 \sin.^3 a}{2.3} + \frac{n^5 \sin.^5 a}{2.3.4.5} - \&c.$$

Si l'on veut cette valeur exprimée non par les puissances du sinus de a , mais par les sinus des multiples de a , on substituera les valeurs de $\sin.^3 a$, $\sin.^5 a$, &c.; prises dans la table (127), et l'on aura

$$\begin{aligned} \sin.(n \sin.a) = & \left(n - \frac{n^3}{8} + \frac{n^5}{192} - \&c. \right) \sin.a + \left(\frac{n^3}{24} - \frac{n^5}{384} + \&c. \right) \sin.3a \\ & + \left(\frac{n^5}{1920} - \&c. \right) \sin.5a + \&c. \end{aligned}$$

On développeroit de même les autres sinus et cosinus proposés, en se servant, pour les cosinus, de la série (Y), (154).

Il est facile de voir que l'utilité de ces opérations dépend de la convergence des séries formées comme ci-dessus, et que cette convergence sera d'autant plus grande, que la quantité n sera plus petite.

CHAPITRE XIV.

Définitions, Notions et Propositions préliminaires, particulières à la Trigonométrie sphérique.

374. LA Trigonométrie *sphérique* enseigne à résoudre les triangles formés par trois arcs de grands cercles sur la surface d'une sphere. Les côtés de ces triangles sont par conséquent des arcs, et s'évaluent comme les angles, en degrés, minutes, &c. Trois parties étant connues dans un *triangle sphérique*, la Trigonométrie sphérique donne les moyens de trouver toutes les autres dans la plupart des cas.

375. Si l'on prend pour centre un point à volonté dans l'univers, tous les points situés à une même distance de ce centre appartiendront à la surface d'une sphere ayant cette distance pour rayon. Il est donc indifférent que le globe sur lequel s'exerce la Trigonométrie sphérique, soit réel ou seulement imaginé, petit ou grand, plein ou vuide intérieurement en totalité ou en partie : les propositions trigonométriques sont générales pour une sphere quelconque ; il suffit que dans une même démonstration, dans une même formule, on n'emploie pas en même-temps des spheres de diverses grandeurs, des arcs de rayons différents.

376. On appelle *grands cercles* ceux qui ont pour centre et pour rayon le centre et le rayon de la sphere. Tous les grands cercles sont donc égaux entre eux. Si on conçoit que le demi-cercle AEDB fasse une révolution entiere autour du diametre AB, Fig. 43 le point D, que je suppose à égale distance des points A et B, décrira dans cette révolution la circonférence d'un grand cercle, dont le rayon est celui CD de la sphere, et le centre celui C de la sphere. Mais chaque autre point, comme E, de la demi-circonférence AEDB décrira un *petit cercle* ayant pour rayon une ordonnée EF, et pour centre un point F différent du centre C de la sphere. Il est évident 1°. que les petits cercles sont égaux entre eux, lorsqu'ils ont leurs centres à une même distance du centre de la sphere ; 2°. que les petits cercles sont d'autant plus petits que leur centre est plus distant de celui de la sphere.

377. Si on divise une sphere en deux parties égales, le plan coupant passera par le centre, et par conséquent la section de la surface de la sphere sera un grand cercle. Mais par chaque point de la surface on peut faire une section qui passe par le centre de la sphere et qui la divise par le milieu : donc le nombre des grands cercles de la sphere est infini.

378. On sait par la Géométrie élémentaire, que trois points qui ne sont pas en ligne droite déterminent la position d'un plan. Si donc le plan coupant passe par le centre de la sphere et par

Fig. 43 deux points donnés sur sa surface, la direction du plan coupant, et par conséquent la section de la superficie, seront déterminées. Donc d'un point à un autre sur la surface de la sphere, on peut toujours tracer ou concevoir un arc de grand cercle, et il ne peut y en avoir qu'un seul.

379. Puisque le centre de la sphere est commun à tous les grands cercles, toute ligne d'intersection de leurs plans passera par le centre commun, et sera par conséquent un diamètre commun à la sphere et aux cercles coupés. Ainsi AB est le diamètre de la sphere, du cercle ADBL et du cercle AGB (duquel la moitié seulement se voit obliquement dans la figure). Mais tout diamètre divise la circonférence en deux parties égales ; donc 1°. *les grands cercles se coupent mutuellement en deux parties égales ;* 2°. *les points d'intersection des circonférences, comme A et B, sont toujours distants de 180° l'un de l'autre.*

380. On peut donc renfermer avec deux arcs seulement une portion de surface de la sphere, pourvu qu'ils soient chacun de 180°. Alors la superficie comprise, comme AEDBKGA, se nomme *fuseau*.

381. On appelle *axe* d'un grand cercle celui des diamètres de la sphere, qui est perpendiculaire au plan ou à un diamètre quelconque de ce cercle. Si on conçoit que dans la fig. 43 le rayon CD de la sphere soit élevé perpendiculairement au-dessus du plan sur lequel est décrit le grand cercle AEDBL, CD sera le demi-axe de ce cercle. De même AB est l'axe du grand cercle dont la circonférence passeroit par les points D et L, et dont le plan seroit perpendiculaire au cercle ADBL.

382. Les points extrêmes de l'axe, tels que A et B, se nomment les *pôles* du grand cercle dont AB est l'axe. L'arc $AD = 90^\circ = BD$ mesure sur la superficie de la sphere la distance des pôles à la circonférence ; et par conséquent *chaque point de la circonférence est distant de 90° de chacun des pôles*. Deux grands cercles ne peuvent donc avoir les mêmes pôles.

383. On peut concevoir une infinité de petits cercles parallèles à chaque grand cercle. Si EF est parallèle à CD, le petit cercle qui a pour rayon EF se nomme et est en effet *parallèle* au grand cercle décrit par le rayon CD dans la révolution du demi-cercle ADB autour de la droite AB. Or entre les pôles A et B de ce grand cercle, on peut concevoir une infinité d'ordonnées à l'axe AB, parallèles à CD, comme EF. Donc, &c.

Il s'ensuit que toute section de la sphere est un cercle, même lorsqu'elle ne passe pas par le centre, puisqu'on peut toujours imaginer une section parallèle qui passe par le centre, (377).

384. Les pôles d'un grand cercle sont aussi ceux de tous ses parallèles, et tous les points de chaque circonférence sont à une même distance de l'un ou de l'autre des pôles. Il est évident, par exemple, que la révolution du rayon FE autour de l'axe AB n'altère en aucun point les distances EA, EB.

D'après ces principes il est aisé de déterminer, avec des compas sphériques, sur la surface d'un globe, les pôles d'un cercle donné, ou de décrire d'un pôle donné un grand ou un petit cercle.

385. Soit DAE un arc de grand cercle décrit d'un rayon CD Fig. 44 de la sphere; et soit DBE un arc terminé aux mêmes points D, E, mais décrit d'un rayon plus petit FE. On voit, par l'opération même du compas, que l'arc décrit d'un rayon plus petit a une courbure plus grande. Donc *l'arc du grand cercle est le plus court qu'on puisse mener d'un point à un autre sur une surface sphérique.*

L'arc de grand cercle est la mesure naturelle et unique de toute distance sphérique, parceque c'est une mesure constante. Les petits cercles (376) étant au contraire inégaux, la Trigonométrie n'en fait aucun usage. Aussi quand nous parlerons simplement de cercles ou d'arcs, nous entendrons toujours les grands cercles ou les arcs de grands cercles.

386. Considérons dans la fig. 45 le fuseau AEDBKGA de la fig. 43; et cherchons à évaluer l'angle formé sur la surface de la

Fig. 45 sphere par la rencontre de deux arcs, par exemple l'angle DAM.

Il est clair que l'angle DAM est le même que l'angle EAG : la grandeur d'un angle sphérique, de même que la grandeur d'un angle rectiligne, est indépendante de celle des côtés ; puisqu'un angle sphérique n'est que l'ouverture ou l'inclinaison mutuelle de deux arcs, considérée dans les points immédiatement contigus à celui dans lequel ils se rencontrent. Mais l'arc infiniment petit se confond avec sa tangente, puisqu'ils ont leur origine au même point, et qu'ils sont l'un et l'autre perpendiculaires au rayon qui aboutit à ce point. Donc un angle sphérique quelconque, EAG, formé par le concours de deux arcs AE, AG, est le même que l'angle formé par le concours des tangentes de ces deux arcs. Or les tangentes des arcs AE, AG, sont respectivement parallèles aux rayons CD, CM, qui sont perpendiculaires à AC, en supposant $AD = 90^\circ = AM$. Par conséquent l'angle formé par ces tangentes sera égal à DCM. Mais cet angle ayant son sommet au centre de la sphere, il a pour mesure l'arc DM. Donc 1°. *un angle sphérique a pour mesure l'arc compris entre ses côtés, à 90° de distance de leur intersection.*

387. L'angle DCM est aussi celui qui sert de mesure à l'inclinaison mutuelle des deux plans AEDB, AGKB. Si, pour mesurer cette inclinaison, on prenoit un angle quelconque formé par des lignes non perpendiculaires à la commune section AB, les lignes diversement inclinées donneraient des angles différents, qui par conséquent ne seroient pas propres à fixer une quantité déterminée pour l'inclinaison des deux plans. Et en effet, quand deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre, leur angle d'inclinaison est nécessairement droit ; or il est facile de voir qu'il ne seroit pas droit, si on le considéroit formé par des lignes qui ne seroient pas perpendiculaires l'une et l'autre à la commune section. Donc 2°. *un angle sphérique a pour mesure l'inclinaison des plans des deux arcs qui le forment.*

388. En appliquant à l'angle DBM tout ce que nous venons de

de dire (386, 387), on démontrera de même qu'il a aussi pour mesure l'arc DM. Donc 1°. *les circonférences de deux cercles forment deux angles égaux, aux deux points de leur intersection*; 2°. *ces deux points sont les pôles* (379, 382) *de l'arc qui sert de mesure commune à ces deux angles.*

389. Pour qu'un angle sphérique soit de 90° , il faut donc que ses côtés, prolongés s'il est nécessaire, passent par les pôles l'un de l'autre. En effet l'inclinaison des plans est visiblement égale à celle de leurs axes (381); si donc deux plans sont perpendiculaires entre eux, l'axe de l'un sera nécessairement dans le plan de l'autre.

Ainsi, dans la pratique, si l'on veut former un angle droit à l'extrémité D d'un arc DE, on prendra sur DE, prolongé s'il le faut, un arc $DA = 90^\circ$. Ensuite du point A pour pôle et de l'intervalle AD, on décrira un arc DM; et on aura $ADM = 90^\circ$, puisque DE prolongé passe par le pôle A de l'arc DM, et que DM prolongé jusqu'à ce qu'il fût de 90° , se termineroit à un point distant, par la construction, de 90° des points A et D, et qui par conséquent (382, 378) seroit le pôle de l'arc DE.

390. On peut donc, d'un point quelconque de la surface de la sphere, mener un arc perpendiculaire sur un arc donné, prolongé s'il est nécessaire; puisqu'il suffit pour cela de tracer un arc qui passe par le point donné et par le pôle de l'arc donné. D'où il suit que tous les arcs perpendiculaires à un cercle vont se couper aux pôles de ce cercle; et réciproquement qu'un arc qui coupe deux ou plusieurs arcs à 90° de distance de leur commune intersection, les coupe tous perpendiculairement. Par exemple $ADM = 90^\circ = AMD$.

391. L'arc mené du pôle d'un cercle au pôle d'un autre cercle, mesure évidemment l'inclinaison réciproque des axes de ces cercles: mais l'inclinaison des axes est la même que celle des plans de leurs cercles respectifs (381); donc *la distance des pôles de deux cercles est égale à l'inclinaison de leurs plans.*

Fig.45 392. Lorsque des petits cercles se trouvent dans un problème, on peut les éliminer de deux manières. Soit EG un arc de parallèle; au lieu de cet arc on peut introduire soit l'arc de grand cercle compris entre les mêmes points E, G, soit l'arc parallèle de grand cercle, DM, ou, ce qui revient au même (386), l'angle au pôle, EAG, opposé à l'arc EG de petit cercle qu'on veut éliminer. Pour parvenir à l'une ou à l'autre de ces substitutions, il faut d'abord établir le théorème suivant.

Fig.43 On sait que les circonférences ou leurs parties homologues, c'est-à-dire les arcs d'un même nombre de degrés, sont proportionnelles aux rayons; il s'ensuit qu'un arc de grand cercle est à l'arc homologue d'un petit cercle dont le rayon est, par exemple, EF, comme CE est à EF :: 1 : sin. AE. C'est-à-dire qu'un arc de grand cercle est à un arc de même nombre de degrés d'un petit cercle, comme le rayon de la sphere est au sinus de la distance du petit cercle à son pôle; analogie qui donne la longueur d'un arc de petit cercle en parties de grand cercle.

Fig.44 393. Cela posé, 1°. soit DBE un arc de petit cercle, au lieu duquel on veuille employer l'arc DAE de grand cercle (385). Menant la corde commune DE, on aura (247), $\frac{1}{2}DE = CE \times \sin. \frac{1}{2}C = EF \times \sin. \frac{1}{2}F$. Mais EF est égal (392) au rayon de la sphere, multiplié par le sinus de la distance du pôle au petit cercle dont EF est le rayon; substituant dans la dernière équation cette valeur de EF, on en tire la suivante : $\sin. \frac{1}{2} \text{arc cherché de grand cercle} = \sin. \frac{1}{2} \text{arc de petit cercle, sous-tendu par la même corde} \times \sin. \text{de la distance de ce petit cercle à son pôle}$.

Fig.45 394. 2°. Les rayons FE, FG, de l'arc de parallèle EG, étant perpendiculaires (376) sur AB, et par conséquent respectivement parallèles à CD, CM, l'angle EFG que forment ces rayons est égal à l'angle DCM. Il s'ensuit qu'un arc DM de grand cercle est du même nombre de degrés qu'un arc quelconque EG parallèle et compris entre les mêmes arcs AD et AM qui se réunissent à leur pôle commun A. On a donc (392), $DM : EG :: 1 : \sin. AE$:

mais $DM = DAM$, (386); donc *un arc de petit cercle égale l'angle au pôle qui lui est opposé, multiplié par le sinus de la distance de cet arc au pôle.* Au moyen de cette équation, on pourra substituer l'angle au pôle au lieu de l'arc opposé de petit cercle.

395. Si dans l'analogie (394) on écrit (42), $\sin. 90^\circ$ ou $\sin. AD$, au lieu de 1, on pourra l'exprimer généralement comme il suit : *les arcs homologues parallèles sont entre eux comme les sinus des distances respectives au pôle commun.*

396. *La plus grande distance entre deux cercles ADB, AMB, (ou la plus grande largeur d'un fuseau quelconque AEDBKGA) est à 90° des points d'intersection de ces deux cercles.* Car la proportion $DM : EG :: 1 : \sin. AE$, (394), fait voir que comme aucun sinus n'est plus grand que le rayon, de même l'arc EG de parallèle, quelle que soit sa distance du pôle, ne sera jamais plus grand que DM. Il en seroit de même, et à plus forte raison (385), si EG étoit un arc de grand cercle.

Nous n'en dirons pas plus sur la comparaison des petits et des grands cercles.

397. Si l'on entend bien les principes que nous venons de développer avec quelque étendue, il ne restera aucune difficulté dans la Trigonométrie sphérique; tout ce qui suit est appuyé sur ces principes.

Puisque l'angle rectiligne que font ensemble les tangentes de deux arcs au point de leur intersection, est égal à l'angle sphérique formé par ces mêmes arcs (386), les propriétés suivantes des angles rectilignes conviennent nécessairement aux angles sphériques.

1°. Un angle sphérique est toujours moindre que de 180° .

2°. Un arc qui tombe sur un autre arc forme deux angles, égaux ensemble à deux droits.

3°. Les angles opposés au sommet que forment deux arcs qui se coupent, sont égaux.

4°. La somme des angles formés par l'intersection de deux arcs est de 360° .

Fig.45 398. Pour enfermer avec trois arcs une portion de surface de la sphere, c'est-à-dire pour former un triangle sphérique, il est nécessaire que deux arcs, par exemple AN, AK, soient coupés par un troisième comme NK, avant que les deux premiers se réunissent (380) au point B, à 180° de l'autre point A d'intersection. Ce que nous disons de AN et AK est également vrai de AN et NK, ainsi que de AK et NK. Donc *un côté quelconque de triangle sphérique est nécessairement moindre que de 180° .*

Cette règle et la suivante expriment deux conditions sans lesquelles il n'est pas possible de construire un triangle sphérique avec trois arcs donnés.

399. Puisque l'arc qui passe d'un point à un autre est sur la sphere la mesure la plus courte de la distance de ces deux points (385), *un côté quelconque d'un triangle sphérique est nécessairement moindre que la somme des deux autres côtés.*

400. Donc NK est $< (BN + BK)$. Mais $BN + BK = 360^\circ - AN - AK$; donc $(NK + AN + AK)$ est $< 360^\circ$, ou *la somme des trois côtés d'un triangle sphérique est toujours moindre que de 360° .*

401. *La somme des trois angles est toujours moindre que de 540° , (397, 1°) : nous allons prouver qu'elle surpasse toujours 180° ; ce qui forme une différence essentielle entre les triangles sphériques et les rectilignes.*

Fig.46 402. Dans un triangle sphérique quelconque ABC, si on prend successivement pour pôle les sommets des trois angles A, B, C, et qu'on décrive à 90° de distance les arcs DE, EF, DF, ces arcs formeront par leur rencontre un triangle comme DFE.

Par cette construction le point E est à 90° des points A et B; donc E est le pôle (382, 378) de l'arc AB. Par la même raison, D est le pôle de AC, et F le pôle de BC.

Du pôle E prolongez AB jusqu'en G, et du pôle D prolongez

AC jusqu'en H; vous aurez par la construction $GE = 90^\circ = DH$. Donc $GE + DH = 180^\circ = GE + DG + GH = DE + GH$. Mais GH est la mesure de l'angle A, (386); donc DE est le supplément de A.

On trouvera de même que EF est le supplément de B, et DF de C.

Maintenant si du pôle E on prolonge GA jusqu'en L, GL sera la mesure de l'angle E. Mais $GA = 90^\circ = BL$, et par conséquent $GA + BL$, ou $GL + AB = 180^\circ$. Donc l'angle E est supplément de l'arc AB.

On trouvera de même que D est supplément de AC, et F de BC.

Donc les angles et les côtés du triangle DEF sont les suppléments des côtés et des angles respectivement opposés dans le triangle ABC, et *vice versa*. On doit faire attention à cette propriété des triangles DEF, ABC, (dont l'un se nomme, relativement à l'autre, *triangle polaire* ou *supplémentaire*), parcequ'elle est d'un grand usage dans la Trigonométrie sphérique. Nous allons dans ce moment déterminer sans peine, par le moyen de cette propriété, quelle est la limite en moins de la somme des trois angles d'un triangle sphérique.

403. Puisque les trois côtés DE, EF, DF sont suppléments des trois angles A, B, C, il en résulte que $DE + EF + DF + A + B + C = 540^\circ$. Mais $(DE + EF + DF)$ est $< 360^\circ$, (400). Donc 1°. *la somme des trois angles d'un triangle sphérique surpasse toujours 180°* . Et il en résulte 2°. *que, si le triangle est équilatère, l'angle formé par la rencontre de deux arcs est plus grand que l'angle rectiligne formé par leurs cordes.*

404. Lorsque chacun des côtés AB, AC, BC est moindre que 90° , chacun des angles du triangle supplémentaire DEF est plus grand que 90° . Et si les angles A, B, C sont tous aigus, chacun des côtés du triangle DEF sera de même plus grand que 90° . Enfin lorsque chacun des côtés AB, AC, BC sera de 90° , le triangle ABC

se confondra avec le triangle supplémentaire. Donc *un triangle sphérique peut avoir ses angles et ses côtés tous égaux à 90° , ou tous plus petits ou tous plus grands que 90° .*

405. Donc (403, 401) *la somme des trois angles d'un triangle sphérique peut varier de 180° jusqu'à 540° exclusivement.* Par conséquent de la connoissance de deux angles on ne peut pas déduire la valeur du troisieme, comme dans la Trigonométrie rectiligne : mais en échange on a cet avantage, que les trois angles étant donnés, on peut trouver la valeur d'un côté quelconque, comme nous le verrons en son lieu.

406. Qu'on observe combien les variations des angles différent de celles des côtés. Si les côtés sont infiniment petits, ils ne surpassent leurs cordes respectives que de quantités infiniment petites du troisieme ordre, du cinquieme ordre, &c. (152). Le triangle peut donc alors être considéré comme rectiligne, et par conséquent la somme des angles est de 180° . C'est-là le cas de la moindre grandeur possible tant des côtés que des angles. Supposons maintenant que le triangle infiniment petit croisse jusqu'à ce que chacun des côtés soit de 90° . Alors chacun des angles sera droit (404); ensorte que la somme des angles sera accrue de 90° , tandis que celle des côtés sera augmentée à très peu près trois fois autant : le contraire arrive si l'accroissement des côtés continue, puisque, quel qu'il soit, jamais il ne sera de 90° pour les trois côtés à la fois (400); tandis que celui des angles peut être à très peu près de trois fois 90° , (405).

407. *Deux triangles sphériques sont égaux, lorsque les trois côtés de l'un sont respectivement égaux aux trois côtés de l'autre.* Car en posant les côtés égaux l'un sur l'autre, il est aisé de se convaincre qu'ils coïncideront dans tous leurs points. D'où il suit que les angles seront respectivement égaux.

408. Si dans deux triangles sphériques les angles sont respectivement égaux, leurs triangles polaires auront les côtés respectivement égaux, comme suppléments d'angles égaux. Donc les deux

triangles polaires auront leurs angles respectivement égaux (407). Par conséquent les suppléments de ces angles, qui sont les côtés des triangles donnés, seront respectivement égaux. Donc (407) *deux triangles sphériques sont égaux, si les trois angles de l'un sont respectivement égaux aux trois angles de l'autre.* C'est encore une différence essentielle entre les triangles sphériques et les triangles rectilignes.

409. *Deux triangles sphériques sont de même égaux 1°. lorsqu'ils ont deux côtés et l'angle compris respectivement égaux ; 2°. lorsqu'ils ont deux angles et le côté compris respectivement égaux ; 3°. lorsqu'ils ont deux côtés et les deux angles opposés respectivement égaux.*

Ces trois propositions se démontrent par la superposition, comme dans les triangles rectilignes.

410. *On peut toujours, par trois points donnés sur la surface d'un globe, faire passer un cercle, lequel sera un grand cercle dans le cas seulement où les trois points donnés seront tous trois dans un même plan passant par le centre de la sphere (378).*

En effet soient A, B, C les trois points donnés. Menez les arcs de grand cercle AB, BC ; par les points du milieu de chacun de ces arcs, c'est-à-dire par E et par D, élevez les arcs perpendiculaires EP, DP qui se rencontreront en un point quelconque P ; et menez les arcs AP, BP, CP. Fig-47

Les deux triangles APE, BPE, rectangles en E, seront égaux (409, 1°.) ; donc $AP = BP$. On a de même $BP = CP$. Donc si, de l'intervalle $AP = BP = CP$, et du point P pour pôle, on décrit un cercle, il passera par les points A, B, C.

On peut donc toujours circonscrire un cercle à un triangle sphérique quelconque.

411. *Les angles à la base d'un triangle isoscele sont égaux.*

En effet si $AB = AC$, qu'on prenne à volonté $AD = AE$, Fig-48
et que l'on mene les arcs BD, CE. Les triangles ABD, ACE sont égaux (409, 1°.). Donc $BD = CE$. Par conséquent les triangles

BCE, BCD sont égaux (407). Donc les angles homologues sont égaux; et par conséquent $EBC = DCB$, ou $ABC = ACB$.

Au moyen du triangle supplémentaire, on démontre facilement la proposition inverse; c'est-à-dire que *si un triangle sphérique a deux angles égaux, les deux côtés opposés sont égaux entre eux*.

412. De-là il suit que dans tout triangle sphérique les côtés égaux sont opposés à des angles égaux, et réciproquement; en sorte que *tout triangle sphérique équiangle est aussi équilatère, et réciproquement*.

413. *Dans tout triangle sphérique le plus grand côté est opposé au plus grand angle, et le plus petit côté au plus petit angle*.

Fig.49 Soit $BAC > B$: menez un arc AD, de sorte que $A = B$; vous aurez $AD = BD$, (411). Donc $BC = AD + DC$. Mais $(AD + DC)$ est $> AC$, (399); donc BC est $> AC$. C'est ce que nous avions à démontrer.

414. *Dans tout triangle sphérique l'angle extérieur est plus petit que les deux intérieurs opposés*.

$D + ADC = 180^\circ$, (397, 2°). Mais $(A + B + D)$ est $> 180^\circ$, (403): donc $(A + B + D)$ est $> (D + ADC)$, ou $(A + B)$ est $> ADC$; ce qu'il s'agissoit de démontrer.

Fig.45 415. Si A et B sont les pôles d'un arc DM, chacun des arcs AD, AM, BD, BM est de 90° , et par conséquent (407) les triangles ADM, BDM sont égaux, et chacun d'eux est la moitié du fuseau AEDBMGA. Si on imagine un arc qui, partant du point A, vienne partager par le milieu l'arc DM, le demi-fuseau ou le triangle ADM sera divisé en deux triangles égaux (407). Il en sera de même du triangle BDM, si on prolonge jusqu'au point B l'arc supposé. Donc un demi-cercle qui partage également l'arc DM, et qui se termine aux pôles A et B de cet arc, divise en deux fuseaux égaux le fuseau AEDBMGA. Donc les fuseaux sont entre eux comme les arcs DM qui mesurent leur plus grande largeur (396). Si l'arc DM croît jusqu'à 360° , le fuseau AEDBMGA devient évidemment égal à toute la surface de la sphere. Donc la
surface

surface de la sphere est à 360° comme un fuseau quelconque est à l'arc DM qui mesure la plus grande largeur de ce fuseau. Mais DM est aussi la mesure (386) de l'angle DAM ou DBM d'un fuseau quelconque AEDBMGA. Donc la surface d'un fuseau quelconque pourra toujours se trouver par l'analogie suivante : 360° sont à la surface de la sphere comme l'angle d'un fuseau à la surface de ce fuseau. Cette analogie sera encore utile pour déterminer facilement la surface d'un triangle sphérique quelconque (499).

416. Si A et B sont les pôles du globe terrestre, ensorte que AB soit l'axe autour duquel se fait la rotation diurne de la Terre, le cercle auquel appartient l'arc DM se nomme *l'équateur*; tous les cercles qui passent par les pôles, comme ADB, AMB, se nomment *méridiens* ou *cercles horaires*, et la position géographique d'un lieu se fixe de la maniere suivante. Soit A le pôle arctique, B l'antarctique, le point G la ville de Paris sur le globe terrestre, et ADB le méridien qui passe par l'isle de Fer, lequel a été adopté pour premier méridien par un grand nombre de Géographes. L'arc GM qui mesure la distance du point G à l'équateur, est ce qu'on appelle *la hauteur du pôle* ou *la latitude géographique boréale* de Paris, laquelle est de $48^\circ 50'$; et l'arc DM qui mesure la distance du méridien AGMB du lieu G au premier méridien, se nomme *la longitude géographique* de Paris, et elle est de 20° . La latitude des lieux situés, comme le point K, entre l'équateur et le pôle antarctique, se nomme *latitude australe*. Ce sont ces deux données, la longitude et la latitude, qui déterminent la position exacte d'un lieu quelconque sur une carte géographique.

De-là vient que *les distances à la perpendiculaire* (341) réduites en degrés, minutes, &c. (290), s'appellent encore *différences de latitude*; et *les distances à la méridienne* (341), *différences de longitude*. Ces dénominations sont à la vérité impropres et inexactes, et nous donnerons (533) un exemple des corrections convenables pour obvier à ce défaut d'exactitude.

C H A P I T R E X V.

Résolution des Triangles sphériques rectangles.

417. **U**N triangle sphérique peut avoir deux de ses angles et même ses trois angles (406) de 90° .

Or 1°. si chacun des trois angles est droit, chacun des côtés est aussi de 90° , et réciproquement, (404). Dans ce cas on n'a point de solution à chercher; toutes les parties du triangle sont évidemment connues. 2°. Si deux angles sont droits, les côtés opposés sont aussi de 90° , et réciproquement, (389, 390). Mais ces données ne suffisent pas pour faire connoître le troisième côté et l'angle opposé : on sait seulement (386) qu'alors cet angle et ce côté sont égaux entre eux.

418. Enfin si le triangle sphérique n'a qu'un angle droit, sa résolution dépend de deux théorèmes fondamentaux, dont le second donne ordinairement beaucoup de peine aux Comménçants. Je prends la démonstration du premier dans *les Éléments de Mathématiques* de M. l'Abbé Marie, et j'espère avoir réduit celle du second au même degré de clarté et de simplicité.

Fig. 50 Soit E le centre de la sphere, et soient sur la surface trois arcs AB, AC, BC, qui forment un triangle rectangle en A. Qu'on prolonge chacun des arcs BA, BC jusqu'à ce qu'on ait $BH = 90^\circ = BF$. On aura 1°. $BEF = 90^\circ = BEH$, puisque ces angles sont mesurés par les arcs de 90° , BF, BH; par conséquent FE, HE sont perpendiculaires à BE : 2°. $FE = HE = CE = AE = BE$, puisque toutes ces lignes sont rayons de la sphere : 3°. FH sera la mesure (386) de l'angle ABC que je nommerai B. Qu'on abaisse les perpendiculaires FG sur EH, CL sur AE, CD sur BE; qu'on mène la ligne DL, à laquelle CL sera perpendiculaire, puisque DL est dans le même plan que AE. Les triangles rectangles CLD, FGE seront semblables et leurs plans paralleles, CD et FE étant

parallèles entre elles, et FG, CL perpendiculaires sur le même plan BAHE; d'où il suit que DL est aussi parallèle à GE, et perpendiculaire à BE.

Cela posé, $DC : CL :: FE : FG$. Mais DC est le sinus de BC, CL le sinus de AC, FG le sinus de FH ou de B. Donc

$$\sin. BC : \sin. AC :: 1 : \sin. B.$$

En prolongeant CA, CB, du point C jusqu'à 90° , on trouveroit par la même méthode que

$$\sin. BC : \sin. AB :: 1 : \sin. C.$$

Donc, premier théorème; *dans tout triangle sphérique rectangle le sinus de l'hypothénuse est au sinus d'un côté, comme le rayon est au sinus de l'angle opposé au même côté.*

419. Les triangles rectangles EDL, ELC donnent (211, 210)

$EL = \frac{DL}{\sin. DEL} = \frac{CL}{\tan. CEL}$. Mais $DL : CL :: GE : FG :: 1 : \tan. FEH :: 1 : \tan. B$. Donc $\frac{1}{\sin. DEL} = \frac{\tan. B}{\tan. CEL}$. Mais $DEL = AB$ et $CEL = AC$. Donc

$$1 : \tan. B :: \sin. AB : \tan. AC.$$

Et par conséquent, second théorème; *dans tout triangle sphérique rectangle le rayon est à la tangente d'un angle, comme le sinus du côté adjacent est à la tangente du côté opposé.*

420. Ce théorème fait voir que dans les triangles sphériques rectangles, un côté quelconque est de la même espèce que l'angle opposé; puisque $\tan. B$ et $\tan. AC$ ont un même signe dans l'analogie, et que par conséquent l'une ne peut devenir négative que l'autre ne le devienne aussi.

Les règles ordinaires des signes suffisent pour déterminer l'espèce de la chose cherchée dans tous les cas non douteux, et pour dispenser de former des règles particulières et d'indiquer l'espèce dans chaque cas, comme on le fait ordinairement.

421. Pour qu'on puisse connoître d'un coup-d'œil tous les cas douteux; supposons KN perpendiculaire sur ADB: les triangles

Hh ij

Fig.45 ANK, BNK rectangles en N auront le côté NK commun et $KAN = KBN$, (388). On voit qu'alors la connoissance des valeurs de NK et de l'angle opposé ne détermine pas auquel des deux triangles ces données appartiennent; de manière que lorsque les circonstances du problème ne levent pas l'incertitude, on ne peut savoir par la Trigonométrie si l'hypothénuse est moindre que de 90° , comme BK, ou plus grande comme AK, et de même si le côté et l'angle inconnus sont BN et BKN, ou leurs suppléments AN et AKN. Concluons qu'un angle et le côté opposé étant donnés, l'espece de chacune des autres parties d'un triangle sphérique rectangle est douteuse.

Fig.50 422. Comme un sinus ne peut jamais être plus grand que le rayon, on ne peut jamais avoir, dans l'analogie (419), $\text{tang.AC} > \text{tang.B}$. Mais AC et B sont toujours de la même espece (420). Donc dans les triangles sphériques rectangles un angle oblique ne peut jamais être plus petit s'il est aigu, plus grand s'il est obtus, que le côté qui lui est opposé.

423. La regle (420) fait voir que l'arc perpendiculaire, s'il est moindre que de 90° , est le plus court, et s'il est plus grand que de 90° , le plus long qu'on puisse mener sur la sphere d'un point donné à un cercle. En effet, dans le premier cas il sera opposé à un angle aigu, et par conséquent il sera moindre (413) que tout autre arc mené du point donné au même cercle, lequel arc sera l'hypothénuse du triangle résultant de cette construction. Dans le second cas, il sera opposé à un angle obtus, et dès-lors plus grand qu'une hypothénuse quelconque. Donc dans un triangle sphérique rectangle tout côté moindre que de 90° est plus petit que l'hypothénuse, et tout côté plus grand que de 90° est plus grand que l'hypothénuse.

424. Puisque (418), $FG : CL :: FE : DC :: \sin.BF : \sin.BC$, il s'ensuit que les distances FG, CL de deux cercles en divers points, mesurées par des lignes perpendiculaires au plan de l'un BH des deux, sont proportionnelles aux sinus des distances

BF, BC entre ces points et le point B de l'intersection des deux cercles, mesurées sur l'autre BF de ces cercles.

425. Si les trois côtés du triangle sont infiniment petits, les arcs se confondront avec leurs sinus et tangentes (152, 153), et le triangle sera rectiligne. En effet, en mettant dans les analogies (418, 419) les côtés au lieu de leurs sinus et tangentes, on a $BC : AC :: 1 : \sin.B$, et $1 : \tan.B :: AB : AC$, c'est-à-dire précisément les proportions d'un triangle rectiligne ABC rectangle en A, (213; 10° , 1°). C'est ainsi qu'on applique en général les formules des triangles sphériques aux triangles rectilignes. Jusqu'à présent on n'avoit pas cru susceptibles de cette application les formules dans lesquelles entrent les cosinus des côtés. Quelques Auteurs ont encore refusé cet avantage aux formules dans lesquelles entrent les cotangentes des côtés. La Caille (*Élé. Astr. Traité prélim.* art. 218) paroît être de leur avis. D'autres substituent l'infini au cosinus du côté; ce qui n'est ni utile ni trop intelligible. Pour nous, il nous semble que la difficulté n'est qu'apparente : car $\cot. \text{ du côté} = \frac{1}{\tan. \text{ du côté}}$, et on peut, au lieu de $\frac{1}{\tan. \text{ du côté}}$, écrire $\frac{1}{\text{le côté}}$, et l'unité au lieu de $\cos. \text{ du côté}$ (*), valeurs qui résultent de la considération du triangle infiniment-petit (153 et 154). Mais avec cette règle seulement, on ne peut traduire qu'une partie des formules sphériques dans lesquelles entrent des cosinus de côtés; dans le cas où une même formule renfermera plusieurs de ces cosinus, on aura recours aux infiniment-petits du second ordre, et on substituera au cosinus de chaque côté les deux premiers termes de la série (Y), (154), c'est-à-dire la différence entre l'unité et la moitié du carré du côté respectif. Et quand deux cosinus de côtés se trouveront multipliés l'un par l'autre, on négligera le rectangle

(*) C'est ce qu'a fait M. l'Abbé Boscovich pour les formules différentielles qu'il a données dans un Opuscule que ce célèbre Mathématicien m'a envoyé pendant l'impression de cette Trigonométrie, et qui est le quinzième du Tom. IV de ses Ouvrages imprimés récemment à Bassano.

des deux quarrés de ces mêmes côtés, qui n'est qu'un infiniment-petit du quatrieme ordre. Enfin on fera chaque cosinus de côté égal à l'unité seulement, s'il se trouve multiplié par une ligne trigonométrique quelconque, à moins que cette ligne ne soit le cosinus d'un autre côté.

De toutes les formules sphériques que contient ce Traité, je n'en connois jusqu'ici que ^{une} ~~deux~~ (en exceptant néanmoins celles auxquelles les triangles rectilignes se refusent par leur nature) qui ne puissent pas se transporter des triangles sphériques aux triangles rectilignes, au moyen des regles que nous venons d'indiquer. Nous donnerons plusieurs exemples de l'application de ces regles; et nous ferons voir (727) quelle utilité résulte de cette généralité des formules sphériques.

En transférant ces formules à la Trigonométrie rectiligne, nous supposons les triangles rectilignes *infiniment petits*: mais elles leur conviendroient de même, de quelque grandeur qu'ils fussent, puisque la grandeur de ces triangles n'altère pas leur nature. On ne peut tirer les formules de la Trigonométrie sphérique de celles de la Trigonométrie rectiligne, parce que jamais un triangle rectiligne ne peut être sphérique, tandis qu'un triangle sphérique ne peut devenir infiniment petit qu'il ne devienne rectiligne.

426. Des deux théorèmes (418, 419) on en déduit quatre autres, comme nous allons le voir.

Fig. 51. Soit le triangle ABC rectangle en A, dont les côtés et l'hypothénuse prolongés jusqu'à 90° seront BE, BF, AD. D étant le pôle de l'arc BF, (389), l'arc décrit du point B comme pôle passera par les points D, E, F, (382), et les angles E, F seront droits (390).

Par cette construction on voit que DE est le complément de EF = B, CE le complément de l'hypothénuse BC, AF = D le complément du côté AB, et CD le complément de l'autre côté AC. Aussi DCE se nomme-t-il *triangle complémentaire* de ABC. C'est en appliquant au triangle DCE rectangle en E les deux théorèmes (418, 419) qu'on en tire les quatre qui suivent.

1°. Le théorème (418) donne $\sin.CD : \sin.CE :: 1 : \sin.D$. Prenant les compléments dans le triangle donné ABC, l'analogie devient

$$\cos.AC : \cos.BC :: 1 : \cos.AB.$$

Et par conséquent dans tout triangle sphérique rectangle le cosinus d'un côté est au cosinus de l'hypothénuse, comme le rayon au cosinus de l'autre côté.

427. 2°. Le théorème (418) donne aussi $\sin.CD : \sin.DE :: 1 : \sin.C$. Donc

$$\cos.AC : \cos.B :: 1 : \sin.C.$$

Et par conséquent dans tout triangle sphérique rectangle le cosinus d'un côté est au cosinus de l'angle opposé, comme le rayon au sinus de l'autre angle.

428. 3°. Le théorème (419) donne $1 : \tan.D :: \sin.DE : \tan.CE$. Donc $1 : \cot.AB :: \cos.B : \cot.BC$, ou, pour employer les tangentes,

$$1 : \cos.B :: \tan.BC : \tan.AB.$$

Et par conséquent dans tout triangle sphérique rectangle la tangente de l'hypothénuse est à la tangente d'un côté, comme le rayon au cosinus de l'angle adjacent.

429. 4°. Le théorème (419) donne aussi $1 : \tan.C :: \sin.CE : \tan.DE$. Donc $1 : \tan.C :: \cos.BC : \cot.B$, ou

$$1 : \cos.BC :: \tan.C : \cot.B :: \tan.B : \cot.C.$$

Et par conséquent dans tout triangle sphérique rectangle le rayon est au cosinus de l'hypothénuse, comme la tangente d'un angle est à la cotangente de l'autre.

430. Deux choses étant données dans un triangle sphérique rectangle; au moyen des six théorèmes démontrés, on trouvera toujours toutes les autres, si ce n'est dans les cas douteux (417, 2°; 421). Les solutions fournies par ces théorèmes sont toutes rassemblées dans la table suivante ainsi que dans la table VI rejetée à la fin de cet Ouvrage.

Table pour la résolution d'un Triangle sphérique
ABC rectangle en A.

DONNÉES.	CHERCHÉES.	FORMULES.
BC, B	AC	1° $\sin.AC^* = \sin.BC \sin.B^*$
	AB	2° $\text{tang}.AB = \text{tang}.BC \cos.B$
	C	3° $\cot.C = \cos.BC \text{tang}.B$
BC, C	AB	4° $\sin.AB^* = \sin.BC \sin.C^*$
	AC	5° $\text{tang}.AC = \text{tang}.BC \cos.C$
	B	6° $\cot.B = \cos.BC \text{tang}.C$
BC, AB	AC	7° $\cos.AC = \frac{\cos.BC}{\cos.AB}$
	B	8° $\cos.B = \text{tang}.AB \cot.BC$
	C	9° $\sin.C^* = \frac{\sin.AB^*}{\sin.BC}$
BC, AC	AB	10° $\cos.AB = \frac{\cos.BC}{\cos.AC}$
	C	11° $\cos.C = \text{tang}.AC \cot.BC$
	B	12° $\sin.B^* = \frac{\sin.AC^*}{\sin.BC}$
AB, C cas douteux.	BC	13° $\sin.BC = \frac{\sin.AB}{\sin.C}$
	AC	14° $\sin.AC = \text{tang}.AB \cot.C$
	B	15° $\sin.B = \frac{\cos.C}{\cos.AB}$
AC, B cas douteux.	BC	16° $\sin.BC = \frac{\sin.AC}{\sin.B}$
	AB	17° $\sin.AB = \text{tang}.AC \cot.B$
	C	18° $\sin.C = \frac{\cos.B}{\cos.AC}$

AB, B

DONNÉES. CHERCHÉES.

FORMULES.

AB, B	{	BC	19°	$\cot.BC = \cos.B \cot.AB$
		AC	20°	$\text{tang.AC} = \text{tang.B} \sin.AB$
		C	21°	$\cos.C = \sin.B \cos.AB$
AC, C	{	BC	22°	$\cot.BC = \cos.C \cot.AC$
		AB	23°	$\text{tang.AB} = \text{tang.C} \sin.AC$
		B	24°	$\cos.B = \sin.C \cos.AC$
AB, AC	{	BC	25°	$\cos.BC = \cos.AB \cos.AC$
		B	26°	$\cot.B = \sin.AB \cot.AC$
		C	27°	$\cot.C = \cot.AB \sin.AC$
B, C	{	BC	28°	$\cos.BC = \cot.B \cot.C$
		AB	29°	$\cos.AB = \frac{\cos.C}{\sin.B}$
		AC	30°	$\cos.AC = \frac{\cos.B}{\sin.C}$

Les arcs marqués d'un astérisque sont de même espèce (420). L'espèce de tous les autres, si ce n'est dans les cas douteux (13°... 18°), est déterminée par le signe (42).

431. Cinq des formules de la table précédente peuvent se calculer par addition ou par soustraction, au moyen des tables des sinus en nombres naturels, en les transformant comme il suit, (II. 16°, 15°, 17°).

$$\begin{aligned}
 1^\circ \sin.AC &= \frac{1}{2} \cos.(BC \frown B) - \frac{1}{2} \cos.(BC + B) \\
 4^\circ \sin.AB &= \frac{1}{2} \cos.(BC \frown C) - \frac{1}{2} \cos.(BC + C) \\
 21^\circ \cos.C &= \frac{1}{2} \sin.(AB + B) - \frac{1}{2} \sin.(AB - B) \\
 24^\circ \cos.B &= \frac{1}{2} \sin.(AC + C) - \frac{1}{2} \sin.(AC - C) \\
 25^\circ \cos.BC &= \frac{1}{2} \cos.(AB + AC) + \frac{1}{2} \cos.(AB \frown AC)
 \end{aligned}$$

Dans la formule 21°, si B est > AB, $\frac{1}{2} \sin.(AB - B)$ devient positif en vertu de la règle (154). Il en est de même de $\frac{1}{2} \sin.(AC - C)$

quand $C > AC$ dans la formule 24°. La Caille (*Eléments d'Astronomie, Traité préliminaire*, art. 242) se trompe en prescrivant le signe positif dans tous les cas.

432. Cherchons maintenant les moyens d'avoir avec exactitude les secondes et même les dixièmes de seconde, lorsque les sinus et cosinus des arcs cherchés sont fort grands.

Les cinq formules précédentes (431) suffiront entre de certaines limites, comme nous l'avons dit (193). Mais si les tables en nombres naturels se trouvoient insuffisantes, ou qu'on ne voulût pas s'en servir, alors dans les cinq cas que présentent ces formules, on procéderoit comme il suit. Lorsque, par exemple, étant donnés BC et B , on ne pourra avoir AC exactement par le moyen de la formule 1°, on aura recours à une autre formule qui puisse donner une tangente. Par exemple on cherchera AB par la 2°, et ensuite, ayant AB et B , on aura AC avec toute la précision possible par la 20°.

433. De la 7° on tire $1 : \cos.AC :: \cos.AB : \cos.BC$. Donc (10), $1 + \cos.AC : 1 - \cos.AC :: \cos.AB + \cos.BC : \cos.AB - \cos.BC$. Et par conséquent (I. 42°), (II. 13°), $1 : \text{tang.}^{\frac{1}{2}}AC :: \cot.^{\frac{1}{2}}(BC + AB) : \text{tang.}^{\frac{1}{2}}(BC - AB)$. On aura donc AC avec la plus grande précision, en transformant la 7° comme il suit :

$$7^\circ \dots \text{tang.}^{\frac{1}{2}}AC = \sqrt{\text{tang.}^{\frac{1}{2}}(BC - AB) \text{ tang.}^{\frac{1}{2}}(BC + AB)}.$$

434. La 8° donne $1 : \cos.B :: \text{tang.}BC : \text{tang.}AB$. Et par conséquent $1 + \cos.B : 1 - \cos.B :: \text{tang.}BC + \text{tang.}AB : \text{tang.}BC - \text{tang.}AB$. D'où l'on tire (II. 10°)

$$8^\circ \dots \text{tang.}^{\frac{1}{2}}B = \sqrt{\frac{\sin.(BC - AB)}{\sin.(BC + AB)}}.$$

435. La 9° donne $1 : \sin.C :: \sin.BC : \sin.AB$. Donc $1 +$



$\sin.C : 1 - \sin.C :: \sin.BC + \sin.AB : \sin.BC - \sin.AB$.
Et par conséquent (II. 9°, 12°)

$$9^\circ \dots \text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}C) = \pm \sqrt{\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(BC + AB)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(BC - AB)}}.$$

Dans les deux formules qui précèdent celle-ci, le signe du radical ne peut être que positif (398), (397, 1°); et dans celle-ci on discernera facilement, par le moyen de la règle (420), quel est le signe qui convient.

En changeant dans les trois dernières formules C en B et B en C, on aura les transformées qui correspondent aux 10°, 11° et 12°.

436. Par les méthodes employées (435, 434, 433), on aura les formules suivantes, dans lesquelles l'espece de la chose cherchée est douteuse (421).

$$13^\circ \dots \text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}BC) = \pm \sqrt{\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(C + AB)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(C - AB)}}.$$

$$14^\circ \dots \text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}AC) = \pm \sqrt{\frac{\sin.(C + AB)}{\sin.(C - AB)}}.$$

$$15^\circ \dots \text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}B) = \pm \sqrt{\frac{\cot \frac{1}{2}(C + AB)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(C - AB)}}.$$

En changeant dans ces trois formules B en C et C en B, on aura les transformées correspondantes aux 16°, 17° et 18°.

Ces formules ne peuvent se transférer aux triangles rectilignes, dans lesquels on ne peut prendre la somme ou la différence d'un côté et d'un angle, puisque ce sont deux quantités hétérogènes. Il en faut dire autant des quatre premières formules (431).

437. La 28° donne $\cos.BC : 1 :: \cot.B : \text{tang.}C :: \cot.C : \text{tang.}B$. Et par conséquent $\cos.BC + 1 : \cos.BC - 1 :: \cot.B + \text{tang.}C : \cot.B - \text{tang.}C$. Donc aussi (I. 42°), (II. 11°), $1 : -\text{tang.}\frac{1}{2}BC :: \cos.(B \frown C) : \cos.(B + C)$. D'où l'on tire

$$28^\circ \dots \text{tang.}\frac{1}{2}BC = \sqrt{-\frac{\cos.(B + C)}{\cos.(B \frown C)}}.$$

Ii ij

Observons que $-\frac{\cos(B+C)}{\cos(B \infty C)}$ se trouve toujours être une quantité positive, attendu que $\cos.(B+C)$ est toujours une quantité négative, puisque dans tout triangle sphérique rectangle la somme des deux angles obliques est nécessairement plus grande que 90° , ($403, 1^\circ$).

Et comme dans un triangle réel la tangente de la moitié de l'hypothénuse ne peut jamais avoir une valeur imaginaire, je conclus de la dernière équation, que *dans tout triangle sphérique rectangle la différence entre les deux angles obliques est toujours moindre que de 90° .*

Quant aux formules 29° et 30° , lorsque AB ou AC seront petits, on cherchera d'abord BC par la 28° ; ensuite on aura les côtés exactement par le moyen de la 2° ou de la 5° .

438. Les formules construites (431 et suiv.) donnent encore, pour un triangle sphérique rectangle, des solutions différentes de celles de la table (430), comme on le voit dans la table ci-après, où l'on reconnoîtra facilement que les formules 4° , 6° , 10° , 12° sont formées en multipliant ou divisant l'une par l'autre les deux formules (433, 435).

Pour l'usage de la table qui suit, il faut toujours observer les règles des signes (42, 154), et faire attention qu'on ne peut jamais avoir $(BC - AB) > 180^\circ$, (398); ensorte que quand les formules donneront $\text{tang.} \frac{1}{2}(BC - AB)$ ou $\sin.(BC - AB)$ négatifs, il en faudra conclure que AB est $> BC$, (154). D'où il résulte que lorsque la quantité $(BC - AB)$ est donnée, il faut connoître en outre lequel des deux arcs est le plus grand, excepté dans la 12° formule, où $\text{tang.} \frac{1}{2}AC$ ne peut jamais être négative, (398). Enfin dans la 13° et la 14° , il faut savoir, avant de les calculer, lequel des deux angles est le plus grand.

Table pour la résolution d'un Triangle sphérique rectangle, dans certains cas.

DONNÉES.	CHERCHÉES.	FORMULES.
(AB + AC), BC. Som. côtés, hyp.	AB ou AC. Les deux côtés.	1 ^e FORMULE... $\cos.(AB \cap AC) = 2 \cos.BC - \cos.(AB + AC)$ 1 ^e $\cos.\text{différence des côtés} = 2 \cos.\text{hypothénuse} - \cos.\text{somme des côtés}$
(AB $\cap$ AC), BC. Diff. des côtés, hyp.	AB ou AC. Les deux côtés.	2 ^e $\cos.(AB + AC) = 2 \cos.BC - \cos.(AB \cap AC)$ 2 ^e $\cos.\text{somme des côtés} = 2 \cos.\text{hypothénuse} - \cos.\text{différence des côtés}$
(BC + AB), AC. {	BC ou AB. C.	3 ^e $\text{tang.} \frac{1}{2}(BC - AB) = \text{tang.}^2 \frac{1}{2} AC \cot. \frac{1}{2}(BC + AB)$ 4 ^e $\cot.(45^\circ + \frac{1}{2} C) = \text{tang.} \frac{1}{2} AC \cot. \frac{1}{2}(BC + AB)$
Un côté et la som. de l'hypothénuse et de l'autre côté. {	L'hyp. et le côté incon. L'ang. op. au côté inc.	3 ^e $\text{tang.} \frac{1}{2} \text{diff. hyp. au côté} = \text{tang.}^2 \frac{1}{2} \text{côté donné} \times \cot. \frac{1}{2} \text{somme donnée}$ 4 ^e $\cot.(45^\circ + \frac{1}{2} \text{angle cherché}) = \text{tang.} \frac{1}{2} \text{côté donné} \times \cot. \frac{1}{2} \text{som. don.}$
(BC $\cap$ AB), AC. {	BC ou AB. C.	5 ^e $\text{tang.} \frac{1}{2}(BC + AB) = \text{tang.}^2 \frac{1}{2} AC \cot. \frac{1}{2}(BC - AB)$ 6 ^e $\text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2} C) = \text{tang.} \frac{1}{2} AC \cot. \frac{1}{2}(BC - AB)$
Un côté et la diffé- rence de l'hypoth. et de l'autre côté. {	L'hyp. et le côté incon. L'ang. op. au côté inc.	5 ^e $\text{tang.} \frac{1}{2} \text{som. hypoth. et côté} = \text{tang.}^2 \frac{1}{2} \text{côté donné} \times \cot. \frac{1}{2} \text{diff. donnée}$ 6 ^e $\text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2} \text{ang. cherché}) = \text{tang.} \frac{1}{2} \text{côté don.} \times \cot. \frac{1}{2} \text{diff. donnée}$
(BC + AB), B. Un angle et la som. du côté adjacent et de l'hypothénuse. {	BC ou AB. L'hyp. et le même côté.	7 ^e $\sin.(BC - AB) = \text{tang.}^2 \frac{1}{2} B \sin.(BC + AB)$ 7 ^e $\sin.\text{différ. hyp. au côté} = \text{tang.}^2 \frac{1}{2} \text{angle donné} \times \sin.\text{somme donnée}$
(BC $\cap$ AB), B. Un ang. et la diff. du côté adjacent et de l'hypothénuse. {	BC ou AB. L'hyp. et le même côté.	8 ^e $\sin.(BC + AB) = \cot.^2 \frac{1}{2} B \sin.(BC - AB)$ 8 ^e $\sin.\text{somme hypoth. et côté} = \cot.^2 \frac{1}{2} \text{angle donné} \times \sin.\text{diff. donnée}$
(BC + AB), C. {	BC ou AB. AC.	9 ^e $\text{tang.} \frac{1}{2}(BC - AB) = \cot.^2(45^\circ + \frac{1}{2} C) \text{tang.} \frac{1}{2}(BC + AB)$ 10 ^e $\text{tang.} \frac{1}{2} AC = \cot.(45^\circ + \frac{1}{2} C) \text{tang.} \frac{1}{2}(BC + AB)$
Un angle et la som. du côté opposé et de l'hypothénuse. {	L'hyp. et le même côté. L'autre côté.	9 ^e $\text{tang.} \frac{1}{2} \text{diff. hyp. au côté} = \cot.^2(45^\circ + \frac{1}{2} \text{ang. don.}) \times \text{tang.} \frac{1}{2} \text{som. don.}$ 10 ^e $\text{tang.} \frac{1}{2} \text{côté cherché} = \cot.(45^\circ + \frac{1}{2} \text{ang. don.}) \times \text{tang.} \frac{1}{2} \text{som. donnée}$
(BC $\cap$ AB), C. {	BC ou AB. AC.	11 ^e $\text{tang.} \frac{1}{2}(BC + AB) = \text{tang.}^2(45^\circ + \frac{1}{2} C) \text{tang.} \frac{1}{2}(BC - AB)$ 12 ^e $\text{tang.} \frac{1}{2} AC = \text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2} C) \text{tang.} \frac{1}{2}(BC - AB)$
Un ang. et la diffé- rence entre le côté opposé et l'hypoth.	L'hyp. et le même côté. L'autre côté.	11 ^e $\text{tang.} \frac{1}{2} \text{som. hyp. et côté} = \text{tang.}^2(45^\circ + \frac{1}{2} \text{ang. don.}) \times \text{tang.} \frac{1}{2} \text{diff. don.}$ 12 ^e $\text{tang.} \frac{1}{2} \text{côté cherché} = \text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2} \text{ang. don.}) \times \text{tang.} \frac{1}{2} \text{diff. don.}$
(B + C), BC. La somme des ang. et l'hypothénuse. {	B ou C. Les deux angles.	13 ^e $\cos.(B \cap C) = - \cos.(B + C) \cot.^2 \frac{1}{2} BC$ 13 ^e $\cos.\text{diff. des angles} = - \cos.\text{somme donnée} \times \cot.^2 \frac{1}{2} \text{hypothénuse}$
(B $\cap$ C), BC. La différ. des ang. et l'hypothénuse. {	B ou C. Les deux angles.	14 ^e $\cos.(B + C) = - \cos.(B \cap C) \text{tang.}^2 \frac{1}{2} BC$ 14 ^e $\cos.\text{somme des angles} = - \cos.\text{diff. donnée} \times \text{tang.}^2 \frac{1}{2} \text{hypothénuse}$

439. Après avoir achevé la construction des formules pour la résolution d'un triangle sphérique rectangle, il est à propos de dire deux mots de leur translation aux triangles rectilignes; ce sera une première preuve de la vérité de ce que nous avons avancé (425). Reprenons les formules de la table (430). Si on fait $\cos.BC = 1$, la 3^e et la 6^e donneront $\cot.C = \tan.B$, et $\cot.B = \tan.C$; ce qui est précisément la propriété d'un triangle rectiligne ABC rectangle en A. Traduisez de la même manière les formules 15^e, 18^e, et celles qui en sont déduites. Dans la 8^e, en mettant $\frac{1}{\tan.BC}$ au lieu de $\cot.BC$, et ensuite les côtés au lieu des tangentes, on a la proportion (213, 13^e). Il en est de même des autres formules où se trouvent les cotangentes des côtés. La traduction de la 25^e (à laquelle se réduisent la 7^e et la 10^e) se fait comme il suit : $1 - \frac{1}{2}BC^2 = (1 - \frac{1}{2}AB^2)(1 - \frac{1}{2}AC^2) = 1 - \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{2}AC^2$ en négligeant le produit des deux quarrés; réduisant, transposant et multipliant par 2, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$, c'est-à-dire l'équation si connue de l'hypothénuse.

Les trois premières formules et la 5^e de la table (438) donnent de même l'équation de l'hypothénuse. La 13^e et la 14^e ne peuvent se transférer aux triangles rectilignes, parcequ'il répugne à la nature de ces triangles que l'hypothénuse puisse être déterminée par les angles et *vice versa*. Toutes les autres formules de cette table se réduisent aux formules correspondantes (217, 218).

Résolution des Triangles sphériques rectilateres.

440. J'appelle *rectilater* le triangle qui a un côté de 90°. Ce triangle doit se ranger dans la classe des triangles rectangles, parceque son supplémentaire est rectangle, et que c'est celui-ci qu'on résout et auquel se réduisent les données.

Fig.48 EXEMPLE. Soit A le pôle arctique, BC l'équateur, B la ville de Quito, D celle de Paris. Connoissant $AB = 90^\circ$, $AD = 41^\circ 10'$, (416), et la différence $BC = \Lambda = 80^\circ 15'$ de longitude entre les

deux villes, il s'agit de déterminer la plus courte distance entre elles, c'est-à-dire l'arc BD.

Puisque $AB = 90^\circ$, il faut réduire les données au triangle supplémentaire. Mais sans recourir à une autre figure, je me servirai pour cet effet du même triangle ABD, en prenant, comme il suit, les parties opposées aux choses connues. Je suppose que D est le supplément de AB, et dès-lors j'écris $D = 90^\circ$; de même je prends B pour supplément de AD, et j'écris $B = 138^\circ 50'$; BD pour supplément de A, et j'écris $BD = 99^\circ 45'$: l'angle A devient ainsi la chose cherchée, comme supplément de BD. Or dans le triangle ABD rectangle en D, on connoît le côté BD et l'angle adjacent B; et l'autre angle A étant l'inconnue cherchée, c'est le cas de la formule 12^e de la table VI, qui donne $\cos.A = \cos.BD \sin.B = -\cos.99^\circ 45' \times \sin.138^\circ 50' = -\sin.9^\circ 45' \times \cos.48^\circ 50'$.

$$\log.\cos.48^\circ 50' = 9,818392$$

$$\log.\sin.9^\circ 45' = 9,228784$$

$$\log.\cos.A = 9,047176$$

Donc $A = 96^\circ 24'$, et son supplément $83^\circ 36'$ est la distance cherchée BD qui correspond à 5016 milles géographiques, à 60 milles par degré.

Résolution de deux Triangles sphériques rectangles ayant un angle commun.

441. Des triangles sphériques BAC, BED, rectangles en A et en E, et ayant un angle commun B, on déduit les proportions suivantes entre les lignes trigonométriques de leurs parties homologues. Fig. 52

Puisque (418), $\sin.BC : \sin.AC :: 1 : \sin.B$, et que par la même raison $\sin.BD : \sin.DE :: 1 : \sin.B$, il en résulte que $\sin.BC : \sin.BD :: \sin.AC : \sin.DE$; et par conséquent

les sinus des hypoténuses sont proportionnels aux sinus des côtés respectivement opposés à l'angle commun.

442. Puisque (419), $1 : \text{tang.} B :: \sin. AB : \text{tang.} AC :: \sin. BE : \text{tang.} DE$,

les sinus des côtés adjacents à l'angle commun, sont comme les tangentes des côtés opposés à cet angle.

443. On a (427), $\cos. AC : \cos. B :: 1 : \sin. C$, et
 $\cos. DE : \cos. B :: 1 : \sin. D$. Donc

les sinus des angles non communs sont en raison inverse des cosinus des côtés opposés à l'angle commun.

444. Le même théorème (427) donne $1 : \sin. B :: \cos. AB : \cos. C :: \cos. BE : \cos. D$. Donc

les cosinus des angles non communs sont comme les cosinus des côtés opposés.

445. Par le théorème (428), $1 : \cos. B :: \text{tang.} BC : \text{tang.} AB :: \text{tang.} BD : \text{tang.} BE$. Donc

les tangentes des hypoténuses sont proportionnelles aux tangentes des côtés adjacents à l'angle commun.

446. On a (429), $1 : \text{tang.} B :: \cos. BC : \cot. C :: \cos. BD : \cot. D$. Donc

les cosinus des hypoténuses sont en raison inverse des tangentes des angles non communs.

On reconnoîtra l'utilité des proportions précédentes dans la résolution des problèmes.

Si on transfère ces proportions aux triangles rectilignes (425), on aura les proportions qui conviennent à deux triangles rectangles semblables, et les trois analogies (443, 444, 446) donneront $C = D$, comme cela doit être.

Résolution de deux Triangles sphériques rectangles ayant un côté commun.

Fig. 53 et 54. 447. Soient les triangles ABD, ACD rectangles en D, et qui ont un côté commun AD. On aura (418), $\sin. AD = \sin. AB \times \sin. B$

$\sin.B = \sin.AC \sin.C$. Donc $\sin.AB : \sin.AC :: \sin.C : \sin.B$.
Et par conséquent

les sinus des hypothénuses sont en raison inverse des sinus des angles respectivement opposés au côté commun.

448. Comme ABC peut représenter tout triangle sphérique obliquangle, la proportion peut s'énoncer encore comme il suit :
Dans tout triangle sphérique les sinus des côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.

449. Par le théorème (419), $1 : \sin.AD :: \text{tang}.BAD : \text{tang}.BD :: \text{tang}.CAD : \text{tang}.CD$. Donc
les tangentes des angles adjacents au côté commun sont comme les tangentes des côtés opposés.

450. Par le même théorème $\text{tang}.AD = \sin.BD \text{ tang}.B = \sin.CD \text{ tang}.C$. D'où il suit que $\sin.BD : \sin.CD :: \text{tang}.C : \text{tang}.B$. Et par conséquent
les sinus des côtés non communs sont en raison inverse des tangentes des angles adjacents.

451. Par le théorème (426), $1 : \cos.AD :: \cos.BD : \cos.AB :: \cos.CD : \cos.AC$. Donc
les cosinus des hypothénuses sont proportionnels aux cosinus des côtés non communs.

452. Par le théorème (427), $1 : \cos.AD :: \sin.BAD : \cos.B :: \sin.CAD : \cos.C$. Donc
les sinus des angles adjacents au côté commun sont proportionnels aux cosinus des angles opposés.

453. Par le théorème (428), $\text{tang}.AD = \cos.BAD \text{ tang}.AB = \cos.CAD \text{ tang}.AC$. Il s'ensuit que $\cos.BAD : \cos.CAD :: \text{tang}.AC : \text{tang}.AB$. Et par conséquent
les cosinus des angles adjacents au côté commun sont en raison inverse des tangentes des hypothénuses.

Des six proportions (448 et suiv.) dépend la solution des triangles obliquangles.

Résolution de deux Triangles sphériques rectangles ayant l'hypothénuse commune.

Fig.55 454. Soient les triangles ABC, DBC, rectangles en A et en D, et ayant l'hypothénuse commune BC.

Le théorème (418) donne $\sin.BC : 1 :: \sin.AB : \sin.ACB :: \sin.BD : \sin.BCD :: \sin.AC : \sin.ABC :: \sin.CD : \sin.CBD$. Donc les sinus de deux côtés quelconques sont proportionnels aux sinus des angles opposés.

455. Le théorème (426) donne $\cos.BC = \cos.AB \cos.AC = \cos.CD \cos.BD$. Donc

le rectangle des cosinus des côtés d'un triangle est égal au rectangle des cosinus des côtés de l'autre triangle.

456. Par le théorème (428), $1 : \tan.BC :: \cos.ABC : \tan.AB :: \cos.ACB : \tan.AC :: \cos.BCD : \tan.CD :: \cos.CBD : \tan.BD$. Donc

les tangentes de deux côtés quelconques sont proportionnelles aux cosinus des angles adjacents.

457. Par le théorème (429), $1 : \cos.BC :: \tan.ACB \tan.ABC : 1 :: \tan.BCD \tan.CBD : 1$. Et par conséquent

le rectangle des tangentes des angles d'un triangle est égal au rectangle des tangentes des angles de l'autre.

Dans les cas auxquels les analogies précédentes (441 et suiv.) seront applicables ; si, au lieu de connoître les parties mêmes des triangles, on en connoissoit les sommes ou les différences, il seroit facile de rapporter à ces données les mêmes analogies par les méthodes que nous avons employées tant de fois dans le cours de cet Ouvrage, et dont nous ferons encore usage dans le Chapitre suivant, pour construire les analogies de Neper.

CHAPITRE XVI.

Résolution des Triangles sphériques obliquangles.

458. Pour résoudre un triangle sphérique obliquangle, on le divise en deux rectangles au moyen d'un arc perpendiculaire qui devient un côté commun à chacun d'eux. Les solutions se trouvent ensuite facilement par les analogies (447 à 453).

Mais la perpendiculaire peut tomber ou en dedans ou en dehors du triangle; ce qui donne des résultats très différents. Par exemple, dans le triangle ABC, où l'on ne peut avoir la valeur de BC que médiatement, c'est-à-dire en déterminant celle des deux segments BD, CD, il est clair qu'il faut prendre leur somme, si la perpendiculaire tombe en dedans comme dans la fig. 53, et au contraire leur différence, si elle tombe en dehors comme dans la fig. 54. Fig. 53
et 54.

459. Il paroît dès-lors, au premier aspect, que pour résoudre un triangle sphérique obliquangle, il est nécessaire de savoir si la perpendiculaire tombe en dedans ou en dehors. Il est arrivé de-là que plusieurs Auteurs célèbres voulant aider le Calculateur par des règles particulieres pour chaque cas, ont rendu l'exécution difficile en multipliant les préceptes, ou même ont prescrit des règles peu exactes; tandis que la plupart se sont tirés d'embarras, en laissant au Calculateur le soin pénible de chercher dans chaque cas la situation de la perpendiculaire. Il me semble que les inconvénients disparaissent, si l'on adopte le système suivant, aussi simple que général.

Les formules doivent se construire dans l'hypothese que la perpendiculaire tombe en dedans, et que les angles et les côtés soient moindres chacun que de 90° . En les construisant ainsi, je dis qu'il ne sera nullement nécessaire, dans l'usage des formules, de faire attention à la position de la perpendiculaire, et qu'en observant

seulement les regles des signes (42, 154), on aura toujours (dans les cas qui ne seront pas douteux de leur nature) la juste valeur des choses cherchées.

La vérité de cette regle se reconnoîtra par l'usage : la proposition suivante sera utile pour la vérifier.

460. Si les angles sur la base sont de même espece entre eux, la perpendiculaire tombe en dedans du triangle ; elle tombe en dehors, s'ils sont d'espece différente.

Fig.53 En effet, 1°. si la perpendiculaire AD tombe en dedans du triangle, son espece est la même (420) que celle des angles sur la base (242), B et C, lesquels par conséquent sont de même espece entre eux.

Fig.56 2°. Si la perpendiculaire tombe en dehors, le prolongement de la base peut se faire ou se considérer soit d'un côté soit de l'autre. Soit DAE un demi-cercle perpendiculaire au demi-cercle DCBE, (379). La perpendiculaire menée de l'angle A d'un triangle ABC sur la base BC prolongée, sera à volonté ou AD ou AE. Si on considere AD, le triangle ABC se convertit en deux triangles rectangles ADC, ADB, dans lesquels la perpendiculaire AD étant de la même espece (420) que les angles B et ACD, il s'ensuit (397, 2°.) que les angles B et C sur la base du triangle donné, sont d'espece différente entre eux. Si on considere AE, cette perpendiculaire sera de même espece que les angles C et ABE ; d'où il résulte encore que B et C sont entre eux d'espece différente.

Passons maintenant à la résolution des douze cas que présentent les triangles sphériques obliquangles, en prenant les données trois à trois.

461. Connoissant les trois côtés, déterminer un des angles.

Fig.53 SOLUTION I. Dans un triangle quelconque ABC, soit B l'angle cherché, et de l'un des deux autres soit abaissée une perpendiculaire comme AD. On aura (451), $\cos.AB : \cos.AC :: \cos.BD : \cos.CD :: \cos.BD : \cos.(BC - BD) :: \cos.BD : \cos.BC \cos.BD + \sin.BC \sin.BD :: (9) 1 : \cos.BC + \sin.BC \tan.BD :: 1 :$

$\cos.BC + \sin.BC \cos.B \text{ tang}.AB$, (VI. 2°). Du premier et du dernier rapport on tire

$$\cos.B = \frac{\cos.AC - \cos.BC \cos.AB}{\sin.BC \sin.AB}.$$

Si par les regles (425) on transfere cette formule aux triangles rectilignes, on aura l'expression (III. 70°).

462. Si l'angle cherché étoit A ; en abaissant la perpendiculaire ou de l'angle B ou de l'angle C, on trouveroit par la même méthode

$$\cos.A = \frac{\cos.BC - \cos.AB \cos.AC}{\sin.AB \sin.AC}.$$

Mais on a cette formule par la précédente, en y changeant B en A, et A en B.

On trouvera de même, de l'une ou de l'autre manière, la valeur analytique de $\cos.C$.

Il est inutile d'avertir qu'on peut traiter ainsi toutes les formules qui suivent.

463. SOLUTION II. On a (461), $1 - \cos.B = \dots$

$$\frac{\sin.BC \sin.AB + \cos.BC \cos.AB - \cos.AC}{\sin.BC \sin.AB} = \frac{\cos.(BC \cap AB) - \cos.AC}{\sin.BC \sin.AB} =$$

$$\frac{2 \sin. \frac{1}{2} (AC - BC \cap AB) \times \sin. \frac{1}{2} (AC + BC \cap AB)}{\sin.BC \sin.AB}, \text{ (II. 23°). Donc, soit}$$

qu'on suppose $BC > AB$ ou $AB > BC$, on aura toujours, (I. 7°),

$$2 \sin. \frac{1}{2} B = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} (AC + AB - BC) \sin. \frac{1}{2} (AC + BC - AB)}{\sin.BC \sin.AB}; \text{ et par conséquent}$$

$$\sin. \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (AC + AB - BC) \sin. \frac{1}{2} (AC + BC - AB)}{\sin.BC \sin.AB}}.$$

Dans les formules qui donnent la valeur de la moitié de l'arc cherché, l'espece de l'arc n'est jamais incertaine ; sa valeur est toujours moindre que de 90°, (397, 1°), (398).

Cette formule (ainsi que les formules que donneront les secondes solutions dans les problèmes suivants) est celle dont on fait ordinairement usage dans le calcul numérique.

Fig. 53 464. SOLUTION III. On a, (461), $1 + \cos.B = \dots$

$$\frac{\sin.BC \sin.AB - \cos.BC \cos.AB + \cos.AC}{\sin.BC \sin.AB} = (\text{II. } 3^e) \frac{\cos.AC - \cos.(BC + AB)}{\sin.BC \sin.AB} =$$

$$\frac{2 \sin.\frac{1}{2}(BC + AB - AC) \times \sin.\frac{1}{2}(BC + AB + AC)}{\sin.BC \sin.AB}, (\text{II. } 23^e). \text{ Donc (I. } 24^e),$$

$$\cos.\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(BC + AB + AC) \sin.\frac{1}{2}(BC + AB - AC)}{\sin.BC \sin.AB}}.$$

Par les raisons déduites (233), cette formule est moins en usage que la précédente, quoique le calcul en soit un peu plus court.

465. SOLUTION IV. Puisque (451), $\cos.AB : \cos.AC :: \cos.BD : \cos.CD$, on a aussi $\cos.AB + \cos.AC : \cos.AB \oslash \cos.AC :: \cos.BD + \cos.CD : \cos.BD \oslash \cos.CD$. Par conséquent (II. 13^e), $\cot.\frac{1}{2}(AB + AC) : \text{tang}.\frac{1}{2}(AB \oslash AC) :: \cot.\frac{1}{2}(BD + CD) : \text{tang}.\frac{1}{2}(BD \oslash CD)$. En mettant les tangentes au lieu des cotangentes, et BC au lieu de BD + CD, on a

$$\text{tang}.\frac{1}{2}(BD \oslash CD) = \text{tang}.\frac{1}{2}(AB + AC) \text{ tang}.\frac{1}{2}(AB \oslash AC) \cot.\frac{1}{2}BC.$$

Cette formule est due à Neper; mais il y est parvenu par des voies plus laborieuses; il en est de même des formules que nous donnerons pour les dernières dans les problèmes qui suivent, desquelles il est aussi l'Auteur.

De celle que nous venons de trouver on tire la valeur des segments de la base ou côté BC divisé par la perpendiculaire. Si cette perpendiculaire tombe en dehors du triangle, la formule donne à la vérité la valeur de $\frac{1}{2}(BD + CD)$, et non celle de $\frac{1}{2}(BD \oslash CD)$; mais alors aussi $BC = (BD \oslash CD)$, et non $BD + CD$; il est donc inutile de s'arrêter à cette considération, puisqu'en adoptant l'expression $\text{tang}.\frac{1}{2}(BD \oslash CD)$ pour la valeur donnée par la formule dans tous les cas, on a toujours

$$\begin{aligned} \text{grand segment} &= \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}(BD \oslash CD), \text{ et} \\ \text{petit segment} &= \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}(BD \oslash CD), \end{aligned}$$

Si $(AB + AC)$ est $> 180^\circ$, $\text{tang}.\frac{1}{2}(BD \oslash CD)$ étant négative,

on prendra le supplément de l'arc $\frac{1}{2}(BD \cap CD)$ donné par les tables, et on emploiera ce supplément dans ces deux équations.

Dans tous les cas, on trouvera pour le grand segment celui qui est adjacent au plus grand des deux côtés, et pour le petit segment celui qui est adjacent au plus petit de ces côtés, comme on peut le conclure facilement d'après l'analogie (451).

Connoissant les segments de la base, on prendra celui qui est adjacent à l'angle cherché, comme BD dans le cas présent, et on aura (VI. 5°)

$$\cos.B = \text{tang}.BD \cot.AB.$$

Si c'est le petit segment qu'on emploie dans cette équation, on fera sa tangente négative (154) toutes les fois que l'équation précédente donnera le petit segment négatif. La justesse de cette règle est évidente dans l'application, puisque quand la perpendiculaire tombe en dehors, comme dans la fig. 54, la dernière équation, si on ne changeoit pas le signe de tang.BD, donneroit la valeur de ABD, tandis que l'angle cherché est ABC. Or la quantité que nous appellons $(BD \cap CD)$ ne peut être plus grande que BC, si ce n'est quand la perpendiculaire tombe en dehors. *(N'est pas toujours le cas.)*

Cette solution n'est pas la plus courte ; mais elle s'applique à deux problèmes, puisqu'elle fait aussi connoître les segments de la base.

466. *Les trois angles étant donnés, déterminer un des côtés.*

SOLUTION I. Soit AB le côté cherché ; de l'une A de ses extrémités abaissez la perpendiculaire AD. Vous aurez (452), $\cos.B : \cos.C :: \sin.BAD : \sin.CAD :: \sin.BAD : \sin.(BAC - BAD)$. En procédant comme nous avons fait (461), et mettant $\cos.AB \text{ tang}.B$ au lieu de $\cot.BAD$, (VI. 3°), vous trouverez

$$\cos.AB = \frac{\cos.C + \cos.A \cos.B}{\sin.A \sin.B}.$$

Si on écrit 1 au lieu de $\cos.AB$, (425), on aura la formule (III. 94°) des triangles rectilignes.

Si les trois angles sont aigus, le signe de $\cos.AB$ est positif. Mais AB peut représenter généralement chacun des côtés d'un triangle sphérique. Donc dans tout triangle sphérique, si tous les angles sont aigus, chacun des côtés est moindre que de 90° . Je ne m'arrêterai point à ces conséquences, lorsqu'elles ne meneront pas à quelque application utile; elles se tirent des formules analytiques à la première inspection, quoiqu'elles coûtassent de longues démonstrations à la Géométrie des Anciens. On peut voir un grand nombre de propositions de ce genre dans les Ouvrages intitulés (*Menelaï sphericorum* et *Regiomontani de Triangulis*).

$$467. \text{ SOLUTION II. (466), } 1 - \cos.AB = \frac{\sin.A \sin.B - \cos.A \cos.B - \cos.C}{\sin.A \sin.B} \\ = \frac{-\cos.(A+B) - \cos.C}{\sin.A \sin.B} = - \frac{2 \cos.\frac{1}{2}(A+B+C) \times \cos.\frac{1}{2}(A+B \oslash C)}{\sin.A \sin.B}$$

(II. 19°). Donc (I. 7°)

$$\sin.\frac{1}{2}AB = \sqrt{- \frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B+C) \cos.\frac{1}{2}(A+B \oslash C)}{\sin.A \sin.B}}.$$

Le signe $-$ devient positif dans tous les cas, parceque $\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)$ est toujours négatif (405, 42), et qu'il seroit aisé de prouver que l'autre cosinus est toujours positif.

Cette formule est une de celles qui par leur nature ne peuvent se transférer aux triangles rectilignes, dans lesquels un côté ne peut être déterminé par la seule connoissance des angles.

$$468. \text{ SOLUTION III. (466), } 1 + \cos.AB = \frac{\cos.C + \cos.A \cos.B + \sin.A \sin.B}{\sin.A \sin.B} \\ = \frac{\cos.C + \cos.(A \oslash B)}{\sin.A \sin.B} = \frac{2 \cos.\frac{1}{2}(C + A \oslash B) \cos.\frac{1}{2}(C \oslash A \oslash B)}{\sin.A \sin.B}, \text{ (II. 19°).}$$

Donc (I. 24°)

$$\cos.\frac{1}{2}AB = \sqrt{\frac{\cos.\frac{1}{2}(C + A \oslash B) \cos.\frac{1}{2}(C \oslash A \oslash B)}{\sin.A \sin.B}}.$$

469. SOLUTION IV. En opérant sur la proportion (452), $\cos.B : \cos.C :: \sin.BAD : \sin.CAD$, comme nous avons fait (465), on aura (II. 13°, 12°), $\cot.\frac{1}{2}(B+C) : \text{tang.}\frac{1}{2}(C \oslash B) ::$
tang.

$\text{tang.} \frac{1}{2}(\text{BAD} + \text{CAD}) : \text{tang.} \frac{1}{2}(\text{BAD} \oslash \text{CAD})$, ou, en écrivant A au lieu de sa valeur $\text{BAD} + \text{CAD}$,

$$\text{tang.} \frac{1}{2}(\text{BAD} \oslash \text{CAD}) = \text{tang.} \frac{1}{2}A \text{ tang.} \frac{1}{2}(C \oslash B) \text{ tang.} \frac{1}{2}(C + B).$$

Par cette formule on a la valeur des segments de *l'angle vertical* (242). Et en adoptant l'expression du premier membre pour tous les cas, comme nous avons fait (465), on aura toujours

$$\text{grand segment} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(\text{BAD} \oslash \text{CAD});$$

$$\text{petit segment} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}(\text{BAD} \oslash \text{CAD}).$$

Puisque le plus grand de deux arcs correspond à un plus petit cosinus et à un plus grand sinus (en formant toujours les règles (459) comme pour des arcs moindres que de 90°), on peut conclure de la proportion (452) que le moindre des deux angles sur la base et le grand segment de l'angle vertical se trouveront toujours adjacents à un même côté, et que par conséquent le plus grand des deux angles et le petit segment seront adjacents à l'autre côté; en supposant toujours que dans le calcul de la formule donnée ci-dessus, on ait égard au signe de $\text{tang.} \frac{1}{2}(C + B)$. Ainsi en prenant le segment adjacent au côté cherché, on aura (VI. 15°)

$$\cos.AB = \cot.B \cot.BAD.$$

Et quand on aura le petit segment négatif et $< 90^\circ$, sa cotangente s'emploiera dans cette formule avec le signe négatif (154).

470. *Connoissant deux côtés et l'angle compris, déterminer un des deux autres angles.*

SOLUTION I. Appellons BC, AC, et C les choses connues, B l'angle cherché; et du troisieme, A, abaissons la perpendiculaire AD. Nous aurons (450), $\text{tang.} B : \text{tang.} C :: \sin.CD : \sin.BD :: \sin.CD : \sin.(BC - CD) :: 1 : \sin.BC \cot.CD - \cos.BC :: 1 : \sin.BC \times \frac{\cot.AC}{\cos.C} - \cos.BC$, (VI. 2°). Du premier et du dernier rapport on tire

$$\text{tang.} B = \frac{\sin.C}{\sin.BC \cot.AC - \cos.BC \cos.C}.$$

Fig. 53 Cette formule, qui renferme la cotangente d'un côté et le cosinus d'un autre, se transfere aux triangles rectilignes par les regles données (425), et se réduit à la formule (III. 78°). Il en est de même de la formule ci-après, qui se réduit à la 77°.

471. Si les données étoient AB, AC et BAC; en changeant dans cette formule C en A et A en C, ou bien en abaissant la perpendiculaire sur le côté AB, et procédant comme nous venons de le faire, on trouveroit une autre valeur de tang.B, et cette valeur seroit

$$\text{tang.B} = \frac{\sin.A}{\sin.AB \cot.AC - \cos.AB \cos.A}.$$

472. SOLUTION II. Soient toujours BC, AC et C les choses connues, B la cherchée, et AD la perpendiculaire. On aura

$$1^{\circ}. \text{tang.CD} = \cos.C \text{ tang.AC}, (\text{VI. } 2^{\circ});$$

$$2^{\circ}. BD = BC - CD;$$

$$3^{\circ}. \text{tang.B} = \frac{\text{tang.C} \sin.CD}{\sin.BD}, (450).$$

Le segment CD de la base qui se trouve par la premiere équation, se nomme *premier* segment; l'autre, BD, que donne la seconde, se nomme *second* segment. Si l'on a celui-ci négatif, c'est-à-dire si l'on a $CD > BC$, sin.BD dans la troisieme formule s'emploiera avec le signe négatif (154).

On a établi, comme une regle, qu'il faut prendre la somme de BC et de CD pour avoir BD lorsque l'angle donné C est obtus: mais 1°. si l'angle cherché B est aussi obtus, la perpendiculaire tombe en dedans du triangle, (460), et l'on voit, par la fig. 53, qu'alors cette regle n'est pas juste: 2°. elle n'aura jamais lieu si on a égard aux signes (459) dans le calcul des équations ci-dessus.

473. SOLUTION III. Soient les choses connues AB, AC, BAC, et par conséquent B ou C la chose cherchée. En abaissant de l'angle connu A la perpendiculaire AD, on aura (453), $\text{tang.AB} : \text{tang.AC} :: \cos.CAD : \cos.BAD$; et par conséquent (II. 10°, 13°), $\sin.(AB + AC) : \sin.(AB \cap AC) :: \cot.\frac{1}{2}(CAD + BAD) :$

$\text{tang. } \frac{1}{2}(\text{BAD} \frown \text{CAD})$. En mettant BAC ou A au lieu de CAD + BAD, on a

$$\text{tang. } \frac{1}{2}(\text{BAD} \frown \text{CAD}) = \cot. \frac{1}{2}A \times \frac{\sin.(\text{AB} \frown \text{AC})}{\sin.(\text{AB} + \text{AC})}.$$

De cette formule on déduit la valeur des segments de l'angle donné A; car en se servant d'une même expression (465) pour tous les cas, on a toujours

$$\text{grand segment} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(\text{BAD} \frown \text{CAD});$$

$$\text{petit segment} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}(\text{BAD} \frown \text{CAD}).$$

L'analogie (453) fait voir que le grand segment est adjacent au grand côté, le petit segment au petit côté; en supposant toujours qu'on ait égard dans la formule précédente au signe de $\sin.(\text{AB} + \text{AC})$. On a donc (VI. 3°)

$$\cot. B = \text{tang. BAD} \cos. AB, \text{ et}$$

$$\cot. C = \text{tang. CAD} \cos. AC.$$

Dans ces formules la tangente du petit segment s'emploiera comme négative, quand on aura ce segment négatif et $< 90^\circ$.

474. SOLUTION IV. Les conditions restant les mêmes, prenez l'analogie (447), $\sin. AB : \sin. AC :: \sin. C : \sin. B$; et vous aurez en premier lieu (II. 12°) la suivante, qui est utile en bien des cas:

$$(P) \dots \text{tang. } \frac{1}{2}(\text{AB} + \text{AC}) : \text{tang. } \frac{1}{2}(\text{AB} \frown \text{AC}) :: \text{tang. } \frac{1}{2}(C + B) : \text{tang. } \frac{1}{2}(C \frown B).$$

Substituez la valeur de $\text{tang. } \frac{1}{2}(C + B)$ donnée par la première équation (469), et vous aurez $\text{tang. } \frac{1}{2}(\text{AB} + \text{AC}) : \text{tang. } \frac{1}{2}(\text{AB} \frown \text{AC}) :: \cot. \frac{1}{2}A \text{ tang. } \frac{1}{2}(\text{BAD} \frown \text{CAD}) : \text{tang. } \frac{1}{2}(C \frown B)$. Multipliez terme à terme cette analogie par la seconde (473) exprimée comme il suit, (I. 6°), $2 \sin. \frac{1}{2}(\text{AB} + \text{AC}) \cos. \frac{1}{2}(\text{AB} + \text{AC}) : 2 \sin. \frac{1}{2}(\text{AB} \frown \text{AC}) \cos. \frac{1}{2}(\text{AB} \frown \text{AC}) :: \cot. \frac{1}{2}A : \text{tang. } \frac{1}{2}(\text{BAD} \frown \text{CAD})$; et divisant le 1^{er} rapport par 2, et le 2^e par $\text{tang. } \frac{1}{2}(\text{BAD} \frown \text{CAD})$, vous aurez $\sin. \frac{1}{2}(\text{AB} + \text{AC}) : \sin. \frac{1}{2}(\text{AB} \frown \text{AC}) :: \cot. \frac{1}{2}A : \text{tang. } \frac{1}{2}(C \frown B)$; et enfin, en extrayant les racines,

$$\text{tang. } \frac{1}{2}(C \frown B) = \cot. \frac{1}{2}A \times \frac{\sin. \frac{1}{2}(\text{AB} \frown \text{AC})}{\sin. \frac{1}{2}(\text{AB} + \text{AC})}.$$

Ll ij

Fig.53 Cette équation fait connoître la demi-différence des angles inconnus. Pour avoir leur valeur absolue, il faut trouver encore celle de leur demi-somme. Pour cela, qu'on substitue dans cette même équation la valeur de $\text{tang.}\frac{1}{2}(C \frown B)$ donnée par l'analogie (P); et réduisant, on aura

$$\text{tang.}\frac{1}{2}(C + B) = \cot.\frac{1}{2}A \times \frac{\cos.\frac{1}{2}(AB \frown AC)}{\cos.\frac{1}{2}(AB + AC)}.$$

475. Les deux dernières formules, trouvées par Neper, méritent qu'on fasse remarquer leur utilité. 1°. Pour les calculer, on n'a que sept logarithmes à chercher, et elles font connoître deux angles à la fois; ce qui est très avantageux en certains cas (755, &c.): avec un égal nombre de logarithmes, la seconde et la troisième solution (la première seroit plus laborieuse à calculer) ne donnent qu'un seul angle. 2°. L'une ou l'autre de ces formules est la plus courte qu'on puisse employer pour *trouver un angle, connoissant les deux autres et les deux côtés qui leur sont opposés*; comme il est facile de le voir, en supposant inconnu l'angle A. 3°. De la seconde je déduis la propriété suivante des triangles sphériques, propriété d'autant plus remarquable, qu'elle est très utile pour diminuer le nombre des cas douteux.

Puisque $\text{tang.}\frac{1}{2}(C + B)$ et $\cos.\frac{1}{2}(AB + AC)$ ont le même signe dans la formule, et que les deux autres quantités ne peuvent jamais être négatives (397, 1°), (398); il s'ensuit que *dans tout triangle sphérique la demi-somme de deux côtés est de la même espèce que la demi-somme des deux angles opposés*.

476. *Connoissant deux côtés et l'angle compris, déterminer le troisième côté.*

SOLUTION I. Soient AB, BC, B les données, AC le côté cherché. De la formule (461) on tire

$$\cos.AC = \cos.BC \cos.AB + \sin.BC \sin.AB \cos.B.$$

477. SOLUTION II. Supposons une perpendiculaire AD abaissée sur l'un des côtés donnés; et nous aurons

$$1^{\circ}. \operatorname{tang}.BD = \operatorname{tang}.AB \cos.B, \text{ (VI. } 2^{\circ}\text{);}$$

$$2^{\circ}. CD = BC \propto BD;$$

$$3^{\circ}. \cos.AC = \cos.AB \times \frac{\cos.CD}{\cos.BD}, \text{ (451).}$$

J'ai employé $\propto$ au lieu de $-$ dans la 2° équation, parceque quand elle donneroit CD négatif, $\cos.CD$ ne changeroit pas de signe pour cela, (154).

478. SOLUTION III. Si le côté cherché est petit, on ne pourra l'avoir avec exactitude par le moyen du cosinus. Dans ce cas, au lieu des solutions précédentes, on emploiera celle qui suit.

Puisque (463), $2 \sin.^2 \frac{1}{2} B = \frac{\cos.(BC \propto AB) - \cos.AC}{\sin.BC \sin.AB}$, on aura (I. 22°), $2 \sin.^2 \frac{1}{2} B \sin.BC \sin.AB = 2 \sin.^2 \frac{1}{2} AC - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} (BC \propto AB)$.

Et par conséquent

$$\sin.\frac{1}{2}AC = \sqrt{(\sin.^2 \frac{1}{2} BC \propto AB + \sin.BC \sin.AB \sin.^2 \frac{1}{2} B)},$$

ou, ce qui est plus commode pour le calcul,

$$\sin.\frac{1}{2}AC = \sin.\frac{1}{2}(BC \propto AB) \sqrt{\left(1 + \frac{\sin.BC \sin.AB \sin.^2 \frac{1}{2} B}{\sin.^2 \frac{1}{2} (BC \propto AB)}\right)}.$$

On pourra calculer cette formule avec les tables trigonométriques en logarithmes, si on la divise (207) en deux équations, comme il suit :

$$\operatorname{tang}.a = \frac{\sin.\frac{1}{2}B}{\sin.\frac{1}{2}(BC \propto AB)} \sqrt{\sin.BC \sin.AB};$$

$$\sin.\frac{1}{2}AC = \frac{\sin.\frac{1}{2}(BC \propto AB)}{\cos.a}.$$

479. Il n'y a point de formule analogue à celles de Neper, pour résoudre immédiatement ce problème. Si l'on veut se servir de ses formules, après avoir trouvé, au moyen des solutions (473) ou (474), un des angles inconnus, on emploiera la solution (492) pour trouver le côté cherché.

480. Connoissant deux angles et le côté compris, déterminer un des deux autres côtés.

SOLUTION I. Soient A, C, AC les choses connues, AB la

Fig.53 cherchée, et soit abaissée sur le troisième côté une perpendiculaire AD. On aura (453), $\text{tang. AB} : \text{tang. AC} :: \cos. \text{CAD} : \cos. \text{BAD} :: \cos. \text{CAD} : \cos. (\text{BAC} - \text{CAD}) :: 1 : \cos. \text{BAC} + \sin. \text{BAC} \times \text{tang. CAD} :: 1 : \cos. A + \sin. A \times \frac{\cot. C}{\cos. AC}$, (VI. 3°). Du premier et du dernier rapport on tire

$$\text{tang. AB} = \frac{\sin. AC}{\sin. A \cot. C + \cos. A \cos. AC}.$$

481. Si les données étoient B, C, BC; en procédant de la même manière, ou bien en changeant dans la formule précédente A en B et B en A, on trouveroit une autre valeur de tang. AB, qui seroit

$$\text{tang. AB} = \frac{\sin. BC}{\sin. B \cot. C + \cos. B \cos. BC}.$$

Cette formule et la précédente se changent (425) en celles des triangles rectilignes (III. 4°, 3°).

482. SOLUTION II. Les conditions (480) restant toujours les mêmes, on a

$$1^\circ. \cot. \text{CAD} = \text{tang. C} \cos. AC, \text{ (VI. 3°);}$$

$$2^\circ. \text{BAD} = A \oslash \text{CAD}, \text{ (477);}$$

$$3^\circ. \text{tang. AB} = \text{tang. AC} \times \frac{\cos. \text{CAD}}{\cos. \text{BAD}}, \text{ (453).}$$

483. SOLUTION III. Soient B, C, BC les données, et AD la perpendiculaire sur le côté donné. On aura (450), $\text{tang. B} : \text{tang. C} :: \sin. CD : \sin. BD$. Et par conséquent (II. 10°, 12°), $\sin. (B + C) : \sin. (B \oslash C) :: \text{tang. } \frac{1}{2} (CD + BD) : \text{tang. } \frac{1}{2} (CD \oslash BD)$, ou

$$\text{tang. } \frac{1}{2} (CD \oslash BD) = \text{tang. } \frac{1}{2} BC \times \frac{\sin. (B \oslash C)}{\sin. (B + C)}.$$

Dans un Ouvrage assez répandu, et qui d'ailleurs est très digne de l'être, cette formule est ainsi changée pour le cas où la perpendiculaire tombe en dehors du triangle : $\cot. \frac{1}{2} (BD + CD) = \cot. \frac{1}{2} BC \times \frac{\sin. (B - C)}{\sin. (B + C)}$. Un exemple en nombres suffiroit pour reconnoître l'erreur de cette formule.

Mais au surplus pour démontrer la justesse de la formule que nous venons de donner, même dans le cas où la perpendiculaire tombe en dehors, qu'on se rappelle qu'alors les angles sur le côté connu doivent être d'espèces différentes (460). Soit donc celui qu'on voudra, par exemple C, l'angle obtus; la proportion (450) sera en pareil cas $\text{tang.B} : - \text{tang.C} :: \sin.CD : \sin.BD$. Et par conséquent $\text{tang.B} + (- \text{tang.C}) : \text{tang.B} - (- \text{tang.C}) :: \sin.CD + \sin.BD : \sin.CD - \sin.BD :: \text{tang.B} - \text{tang.C} : \text{tang.B} + \text{tang.C}$. Si l'on transforme la dernière analogie d'après les formules (II. 12°, 10°), elle deviendra $\text{tang.}\frac{1}{2}(CD + BD) : \text{tang.}\frac{1}{2}(CD - BD) :: \sin.(B - C) : \sin.(B + C)$. De plus, lorsque la perpendiculaire tombe en dehors, on a $BC = CD - BD$, fig. 54; substituant cette valeur, on a $\text{tang.}\frac{1}{2}(CD + BD) = \text{tang.}\frac{1}{2}BC \times \frac{\sin.(B - C)}{\sin.(B + C)}$. Or la formule que nous venons de donner est précisément la même que cette équation, si ce n'est que nous employons le signe ∞ au lieu du signe $+$, et on en a vu le motif (465).

On a donc, dans tous les cas, pour les segments du côté connu,

$$\begin{aligned} \text{grand segment} &= \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}(CD \infty BD); \\ \text{petit segment} &= \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}(CD \infty BD). \end{aligned}$$

Dans la proportion (450) on voit que le plus grand angle est adjacent au petit segment, et le plus petit angle au grand segment. Prenant donc le segment adjacent au côté cherché, on aura (VI. 10°)

$$\begin{aligned} \cot.AB &= \cot.BD \cos.B, \text{ et} \\ \cot.AC &= \cot.CD \cos.C. \end{aligned}$$

Dans ces formules on emploiera négativement (154) la cotangente du petit segment, quand on aura ce segment négatif et $< 90^\circ$.

484. SOLUTION IV. Procédant comme on a fait (474), qu'on substitue dans l'analogie (P) la valeur de $\text{tang.}\frac{1}{2}(AB + AC)$ prise de la 1^{re} équation (465), et on trouvera $\text{tang.}\frac{1}{2}(BD \infty CD) \times$

Fig.53 $\text{tang.}^{\frac{1}{2}}BC : \text{tang.}^{\frac{2}{3}}(AB \oslash AC) :: \text{tang.}^{\frac{1}{2}}(C + B) : \text{tang.}^{\frac{1}{2}}(C \oslash B)$.

Mais $\text{tang.}^{\frac{1}{2}}(CD \oslash BD) = \text{tang.}^{\frac{1}{2}}BC \times \frac{\sin. \frac{1}{2}(B \oslash C) \cos. \frac{1}{2}(B \oslash C)}{\sin. \frac{1}{2}(B + C) \cos. \frac{1}{2}(B + C)}$
(483). En mettant cette valeur dans l'analogie précédente, et extrayant les racines, on aura

$$\text{tang.}^{\frac{1}{2}}(AB \oslash AC) = \text{tang.}^{\frac{1}{2}}BC \times \frac{\sin. \frac{1}{2}(C \oslash B)}{\sin. \frac{1}{2}(C + B)}.$$

En substituant dans cette équation la valeur de $\text{tang.}^{\frac{1}{2}}(AB \oslash AC)$ tirée de l'analogie (P), on aura encore

$$\text{tang.}^{\frac{1}{2}}(AB + AC) = \text{tang.}^{\frac{1}{2}}BC \times \frac{\cos. \frac{1}{2}(C \oslash B)}{\cos. \frac{1}{2}(C + B)}.$$

Ces deux formules sont remarquables en ce qu'elles ont l'avantage de faire trouver à la fois les deux côtés inconnus. Chacune d'elles est d'ailleurs la plus courte qu'on puisse employer pour trouver un côté, connoissant les deux autres et les deux angles qui leur sont opposés; comme il est aisé de s'en convaincre en supposant BC inconnu.

485. Connoissant deux angles et le côté compris, trouver le troisième angle.

SOLUTION I. Soient A, B, AB les données. De la formule (466) on tire

$$\cos.C = \cos.AB \sin.A \sin.B - \cos.A \cos.B.$$

486. SOLUTION II. En abaissant de l'un A des angles donnés une perpendiculaire AD, on aura

$$1^{\circ}. \cot.BAD = \cos.AB \text{ tang}.B, \text{ (VI. 3}^{\circ}\text{);}$$

$$2^{\circ}. CAD = A - BAD;$$

$$3^{\circ}. \cos.C = \cos.B \times \frac{\sin.CAD}{\sin.BAD}, \text{ (452).}$$

Si la 2^e équation donne CAD négatif, on prendra négativement sin.CAD dans la 3^e, (154).

En donnant cette solution, et celle que nous avons rapportée (482), La Caille (*Éléments d'Astron. Traité prélimin.*) prescrit de prendre, selon la position de la perpendiculaire, la somme ou la différence

différence de l'angle vertical et de son premier segment donné par la 1^e équation, pour avoir le second segment : or on ne doit jamais prendre la *somme*, soit que la perpendiculaire tombe en dedans ou en dehors du triangle ; puisque les règles données par lui relativement à l'espece du premier segment, supposent la perpendiculaire du côté opposé à l'angle donné employé dans la première équation, et non du côté opposé au supplément de cet angle. Je dis *données par lui* ; car c'est évidemment par erreur qu'on lit dans sa table pour la résolution des triangles rectangles, n°. 118, que *l'angle cherché est $< 90^\circ$ si l'hypothénuse est $< 90^\circ$* : il est clair qu'on doit lire, *si l'hypothénuse et l'angle donné sont de même espece*. C'est ainsi que cette règle est corrigée par M. l'Abbé Marie, et qu'elle devient conforme aux règles analogues de la table de La Caille, et sur-tout à celle du n°. 121, dont le cas est le même qu'au n°. 118, les lettres seules étant différentes.

487. SOLUTION III. Si l'angle cherché est petit, on ne pourra l'avoir avec précision par les deux solutions précédentes. Mais puisque (467), $2 \sin.^2 \frac{1}{2} AB \sin.A \sin.B = -\cos.(A + B) - \cos.C = 1 - 2 \cos.^2 \frac{1}{2} (A + B) - 1 + 2 \sin.^2 C$, (I. 23^e, 22^e), il s'ensuit que

$$\sin.\frac{1}{2}C = \sqrt{(\cos.^2 \frac{1}{2} A + B + \sin.A \sin.B \sin.^2 \frac{1}{2} AB)};$$

ou, ce qui est plus commode pour le calcul,

$$\sin.\frac{1}{2}C = \cos.\frac{1}{2}(A + B) \sqrt{\left(1 + \frac{\sin.A \sin.B \sin.^2 \frac{1}{2} AB}{\cos.^2 \frac{1}{2} (A + B)}\right)};$$

ou enfin, pour n'avoir à employer que les seules tables trigonométriques en logarithmes (207),

$$\text{tang. } a = \frac{\sin.\frac{1}{2} AB}{\cos.\frac{1}{2} (A + B)} \sqrt{\sin.A \sin.B}; \text{ et}$$

$$\sin.\frac{1}{2}C = \frac{\cos.\frac{1}{2} (A + B)}{\cos.a}.$$

Il n'y a point de formule analogue à celles de Neper pour résoudre immédiatement ce problème ; mais si on veut faire usage de ses

Fig.53 formules, après avoir trouvé par les solutions (483 ou 484) un des côtés inconnus, on aura recours à la suivante pour avoir le troisième angle.

488. *Connoissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, trouver l'angle opposé à l'autre côté donné.* (On n'a qu'une solution de ce problème, et de chacun des cinq qui le suivent).

Soient AB, AC, B les données : C sera l'angle cherché, et on aura (447),

$$\sin.C = \frac{\sin.AB \sin.B}{\sin.AC}.$$

Dans ce problème l'espece de l'angle C est douteuse; on démontre, de la même manière que pour les cas douteux dans la Trigonométrie rectiligne (225), que cet angle a deux valeurs, ainsi que toutes les parties inconnues du triangle. Pour les triangles sphériques, l'incertitude est détruite, dans la plupart des cas, par la règle (475) qui peut s'énoncer ainsi : *Selon que la somme des côtés donnés est plus grande ou moindre ou de même valeur que 180°, la somme des angles opposés est aussi ou plus grande, ou moindre, ou de même valeur que 180°.* *Ÿ p. 469.*

Si au lieu de connoître un angle, on connoissoit la somme ou la différence des angles opposés aux côtés donnés, la valeur de chacun de ^{ces} angles se trouveroit par l'analogie (P), (474).

489. *Connoissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, trouver l'angle compris par ces deux côtés.*

Soient AB, AC, B les données; A sera l'angle cherché. En abaissant de cet angle la perpendiculaire AD, on aura

$$1^{\circ}. \cot.BAD = \cos.AB \tan.B, \text{ (VI. 3}^{\circ}\text{);}$$

$$2^{\circ}. \cos.CAD = \cos.BAD \times \frac{\tan.AB}{\tan.AC}, \text{ (453);}$$

$$3^{\circ}. BAD \pm CAD = A.$$

Le signe + a lieu quand la perpendiculaire tombe en dedans; le signe — quand elle tombe en dehors. Et par conséquent (460).

on prendra la somme des segments de l'angle cherché, lorsque les deux autres angles seront de même espece entre eux; la différence, lorsque ces deux angles seront d'espece différente entre eux. D'où l'on voit que le cas de ce problème est douteux toutes les fois que le cas du problème précédent l'est aussi.

Cependant l'espece de l'angle C restant inconnue, souvent encore on pourra connoître l'espece de l'angle A au moyen de la regle suivante que je tire de l'excellente *Trigonométrie sphérique* de M. l'Abbé Boscovich : si la somme des segments est $> 180^\circ$, prenez la différence ; si la différence est négative, prenez la somme.

La Caille prescrit de prendre la somme des segments, lorsque les côtés donnés sont de même espece entre eux. L'autorité d'un tel homme, dont l'exactitude égaloit l'habileté, a engagé M. l'Abbé Marie et d'autres Auteurs respectables à adopter cette regle sans examen. Il est donc à propos de démontrer qu'elle est inexacte, ne fût-ce que pour accoutumer les Comménçants à lire avec précaution les Auteurs même les plus justement célèbres.

Soit un triangle ACD, rectangle en D, formé par trois arcs Fig. 54
moindres chacun que de 90° ; dès-lors (420) les angles obliques seront tous deux aigus. De l'un A de ces angles, menez en dedans du triangle un arc AB, qui divise en un point quelconque le côté opposé CD. Vous aurez $BD < CD$, et par conséquent $BD < 90^\circ$. Mais (451), $\cos.BD : \cos.CD :: \cos.AB : \cos.AC$. Donc AC étant $< 90^\circ$ par la supposition, il résulte de cette proportion que AB est $< 90^\circ$, et que par conséquent AB, AC sont de même espece. Mais AD étant, par l'hypothese, perpendiculaire à CD, les segments de l'angle A dans le triangle obliquangle ABC, sont CAD, BAD ; et il est visible que $BAC = CAD - BAD$. Donc de ce que deux côtés sont de même espece, il ne s'ensuit pas que l'angle qu'ils comprennent soit composé de la somme de ses segments ; et la regle de La Caille manque de justesse.

Fig. 53

490. *Connoissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, déterminer le troisième côté.*

Soient AB, AC, B les données; abaissons, sur le côté cherché BC, la perpendiculaire AD : nous aurons

$$1^{\circ}. \text{tang. BD} = \text{tang. AB} \cos. B, \text{ (VI. 2}^{\circ}\text{);}$$

$$2^{\circ}. \cos. CD = \cos. BD \times \frac{\cos. AC}{\cos. AB}, \text{ (451);}$$

$$3^{\circ}. BD \pm CD = BC.$$

On prendra ou la somme ou la différence des segments de la base, suivant les règles que nous avons données (489) pour les segments de l'angle vertical.

On a encore prescrit, dans ce cas, de prendre la somme, quand *les deux côtés donnés* sont de même espèce; d'où il suivroit que quand deux côtés sont de même espèce, la perpendiculaire sur le troisième côté tombe *toujours* en dedans du triangle; et nous venons de démontrer le contraire (489).

491. Si le sinus ou cosinus trouvé dans l'un des trois précédents problèmes, étoit d'une telle grandeur qu'on ne pût avoir l'arc avec la précision désirée, on auroit recours à un autre de ces trois problèmes; et alors connoissant quatre parties du triangle, on varierait les données, pour trouver la partie cherchée par le moyen de quelqu'un des problèmes qui précèdent les trois derniers. Cette remarque doit aussi s'appliquer aux trois suivants.

492. *Connoissant deux angles et le côté opposé à l'un d'eux, trouver le côté opposé à l'autre angle connu.*

Soient B, C, AC les données : AB sera le côté cherché; et l'on aura (447)

$$\sin. AB = \sin. AC \times \frac{\sin. C}{\sin. B}.$$

Selon que la somme des angles donnés est ou plus grande, ou moindre, ou de même valeur que 180°, la somme des côtés opposés est aussi ou plus grande, ou moindre, ou de même valeur que 180°, (475). V. l'errata.

Si cette règle ou les notions qu'on aura d'ailleurs ne suffisent

pas pour qu'on puisse discerner l'espece du côté cherché dans ce problème, il sera impossible de déterminer la valeur des autres parties du triangle par les solutions des deux problèmes qui suivent. Regiomontanus qui a bien connu l'ambiguïté des problèmes (488 à 490), a donné celui-ci et les deux suivants, comme déterminés dans tous les cas (*de Triangulis, Lib. 4. prop. 29 et 32*). Il est donc à propos de démontrer qu'ils ne le sont pas.

Pour cet effet, soient donnés le côté NK et les angles NAK et ANK, en supposant KN oblique sur AN; toutes les fois qu'un arc $KL = KN$ pourra tomber de l'angle inconnu K sur le côté opposé, il est clair que ces problèmes seront douteux, et qu'on ne pourra discerner par la Trigonométrie si les données appartiennent au triangle ANK, ou bien au triangle BLK, puisque $A = B$, (388), que $KN = KL$ par la supposition, et que $ANK = BLK$, (411).

Si au lieu de connoître un côté, on connoissoit la somme ou la différence des côtés opposés aux angles donnés, la valeur de chacun de ces côtés se trouveroit par l'analogie (P), (474).

493. Connoissant deux angles et le côté opposé à l'un d'eux, trouver le côté compris entre leurs sommets.

Soient les données B, C, AC; abaissons la perpendiculaire AD sur le côté cherché BC; et nous aurons

$$1^{\circ}. \text{tang. CD} = \text{tang. AC} \cos. C, \text{ (VI. 2}^{\circ}\text{)};$$

$$2^{\circ}. \sin. BD = \sin. CD \times \frac{\text{tang. C}}{\text{tang. B}}, \text{ (450)};$$

$$3^{\circ}. CD \pm BD = BC.$$

L'espece de BD est toujours douteuse, lorsque dans le problème précédent celle de AB est douteuse. Mais si l'on connoît l'espece de AB, on détermine celle de BD par l'analogie (451), $\cos. AC : \cos. CD :: \cos. AB : \cos. BD$, qui fournit la regle suivante : *Selon que les côtés opposés aux angles donnés sont, entre eux, de même ou de différente espece, les segments du côté cherché sont, entre eux, de même ou de différente espece.*

Dans la troisieme équation, on prendra toujours la somme,

Fig. 53 quand les angles donnés seront de même espèce ; la différence dans le cas contraire. Cette seule règle suffira souvent , en éprouvant la plus grande des deux valeurs du second segment BD , comme le prescrit M. l'Abbé Boscovich ; si , dans le cas de la somme , on a $BC > 180^\circ$, ou si , dans le cas de la différence , on a BC négatif, le second segment est toujours moindre que de 90° .

494. *Connoissant deux angles et le côté opposé à l'un d'eux , trouver le troisieme angle.*

Soient les données B, C, AC ; A est l'angle cherché , et l'on a

$$1^\circ. \cot.CAD = \cos.AC \operatorname{tang}.C, \text{ (VI. } 3^\circ);$$

$$2^\circ. \sin.BAD = \sin.CAD \times \frac{\cos.B}{\cos.C}, \text{ (452);}$$

$$3^\circ. CAD \pm BAD = A.$$

Pourvu que l'on connoisse l'espèce de AB , (492), on déterminera celle de BAD par l'analogie (453), $\operatorname{tang}.AB : \operatorname{tang}.AC :: \cos.CAD : \cos.BAD$. Du reste toutes les règles du problème précédent , relatives aux segments de la base , s'appliquent de même aux segments de l'angle vertical.

495. J'ai réuni dans la table VII toutes les solutions *analytiques*, ainsi appelées, parce qu'elles contiennent dans une seule équation la valeur complete d'une ligne trigonométrique appartenant à quelqu'une des parties d'un triangle sphérique ; laquelle valeur peut se substituer par conséquent dans les opérations analytiques , et conduire ainsi à des résultats très utiles. Les formules $5^\circ, 7^\circ, 9^\circ, 12^\circ, 15^\circ, 16^\circ, 23^\circ, 28^\circ, 29^\circ, 35^\circ, 36^\circ$ sont démontrées aux articles 488, 462, 461, 485, 470, 471, 492, 476, 466, 480, 481. De ces formules sont tirées toutes les autres de la table, par de simples changements de lettres (462).

La table III est beaucoup plus étendue : on auroit pu de même augmenter la table VII, en y insérant jusqu'à dix valeurs de chaque ligne trigonométrique ; mais ces valeurs sont, pour la plupart, trop compliquées. Il sera facile, au surplus, de les former au besoin. Par exemple, outre les deux valeurs de $\sin.A$ que donne la

table VII, quatre autres se trouvent en prenant dans cette même table les deux valeurs de $\cos.A$ et les substituant dans la formule (I. 3°), et les deux valeurs de $\tan.A$, et les substituant dans la formule (I. 5°). Les quatre autres valeurs de $\sin.A$ demandent un peu plus de travail, parce qu'il faut les tirer des solutions trigonométriques des cas douteux (489 ; 494). Nous nous contenterons de rechercher l'une de ces valeurs.

Connoissant deux angles B, C , et un côté opposé AC , on demande l'expression analytique du sinus du troisième angle A . C'est le cas de la solution (494), dans laquelle commençant par la troisième équation, et supposant de même espèce (459) les angles donnés, nous aurons $\sin.A = \sin.(CAD + BAD) = \sin.CAD \cos.BAD + \cos.CAD \sin.BAD$. Éliminons BAD par le moyen de la deuxième équation (494), en observant que $\cos.BAD = \sqrt{1 - \sin.^2 BAD}$; nous aurons $\sin.A = \sin.CAD \times \sqrt{1 - \sin.^2 CAD \times \frac{\cos.^2 B}{\cos.^2 C}} + \cos.CAD \sin.CAD \times \frac{\cos.B}{\cos.C}$. Il reste à éliminer CAD par le moyen de la première équation (494), en observant d'ailleurs que $\sin.CAD = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot.^2 CAD}}$, (I. 4°), et que $\cos.CAD = \frac{\cot.CAD}{\sqrt{1 + \cot.^2 CAD}}$, (I. 20°), équations dans lesquelles on mettra, au lieu de $\cot.CAD$, sa valeur prise (494), et qui donnent, après cette substitution, une valeur de $\sin.CAD$, et une valeur de $\cos.CAD$, qu'on substituera l'une et l'autre dans l'équation précédente. On aura alors $\sin.A = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan.^2 C \cos.^2 AC}} \times \sqrt{1 - \frac{\cos.^2 B}{\cos.^2 C + \sin.^2 C \cos.^2 AC}} + \frac{\cos.B}{\cos.C} \times \frac{\tan.C \cos.AC}{\sqrt{1 + \tan.^2 C \cos.^2 AC}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \tan.^2 C \cos.^2 AC}}$, expression cherchée qu'il ne s'agit plus que de simplifier. Écrivons par-tout $\frac{\sin.^2 C}{\cos.^2 C}$ au lieu de $\tan.^2 C$, $1 - \sin.^2 AC$ au lieu de $\cos.^2 AC$, puis 1 au lieu de $\cos.^2 C + \sin.^2 C$, et $\sin.^2 B$ au lieu de $1 - \cos.^2 B$, et nous aurons enfin

$$\sin.A = \frac{\cos.C \sqrt{(\sin.^2 B - \sin.^2 C \sin.^2 AC) + \sin.C \cos.B \cos.AC}}{1 - \sin.^2 C \sin.^2 AC}.$$

En changeant C en B et B en C, on a aussitôt l'expression de $\sin. A$ pour le cas où les données sont B, C, AB.

En traitant de même la solution (489), on trouvera les deux dernières valeurs de $\sin. A$.

Si on veut transférer aux triangles rectilignes la formule que nous venons de trouver, il faut faire alors $\sin.^2 AC = 0$; car on a $\sin.^2 AC = 1 - \cos.^2 AC = 1 - 1$, (425). Il en est de même de $\sin.^2 \frac{1}{2} AB$, et de $\sin. \frac{1}{2} AB$ dans les formules (487) : et en général si dans une formule sphérique il ne se trouve qu'un seul des côtés, il faut faire son sinus $= 0$, ainsi que sa tangente; ce qui est conforme (I. 3°, 33°) à la règle (425) de faire le cosinus $= 1$.

496. La table VIII renferme les solutions *trigonométriques*, que je nomme ainsi, parce que ce sont les plus usitées dans le calcul numérique, et que ce sont celles que donnent tous les Auteurs de Trigonométrie. Cette table est disposée de manière à dispenser le Calculateur d'application et d'étude dans quelque cas que ce soit; même de faire une figure, et de savoir la situation de la perpendiculaire. Il suffit qu'on se rappelle que le cosinus, la tangente et la cotangente de l'arc $> 90^\circ$ et $< 180^\circ$, sont négatifs. J'ai exposé (459) la règle fondamentale d'après laquelle sont construites toutes mes solutions. Si on a la curiosité de savoir de quel côté tombe la perpendiculaire, elle est en dehors du triangle toutes les fois que l'on a ou la base moindre que son 1^{er} segment, ou l'angle vertical moindre que son 1^{er} segment.

497. J'ai rassemblé dans la table IX les solutions de Neper, pour lesquelles le Calculateur n'aura de même besoin d'attention que relativement aux signes (42). On observera que dans le cas où l'on trouve le plus grand segment $> 180^\circ$, la valeur qu'on obtient pour les segments, en se conformant aux règles des signes, est alors relative non à la perpendiculaire qui tombe en dedans du triangle, mais au supplément de cette perpendiculaire, c'est-à-dire à celui des deux arcs perpendiculaires, qui dans ce cas est le seul tombant en dehors.

L'arc

L'arc a représente la somme des segments quand la perpendiculaire (son supplément dans le cas ci-dessus) tombe en dehors, leur différence quand elle tombe en dedans.

Du Triangle isoscele.

498. Si le triangle est isoscele, on le divise en deux triangles égaux (409, 3°.) et rectangles, par le moyen d'un arc perpendiculaire à la base, et par conséquent cet arc partage en deux parties égales et la base et l'angle vertical. Alors on a, par la table VI, les analogies suivantes qui résolvent tous les cas.

1°. Le sinus d'un *côté* est au sinus de la *semi-base* comme le rayon au sinus du *semi-angle vertical*.

2°. La tangente d'un *côté* est à la tangente de la *semi-base*, comme le rayon au cosinus d'un *angle sur la base*.

3°. Le cosinus d'un *côté* est à la cotangente du *semi-angle vertical*, comme le rayon à la tangente d'un *angle sur la base*.

4°. Le cosinus de la *semi-base* est au cosinus du *semi-angle vertical*, comme le rayon au sinus d'un *angle sur la base*.

De la mesure de la surface du Triangle sphérique.

499. Pour trouver la surface d'un triangle sphérique quelconque Fig.57 ABC, prolongez un de ses côtés, par exemple BC, en décrivant le cercle entier BCEFB, qui représentera la moitié d'une sphere (377). Prolongez aussi, tant d'une part que de l'autre, les deux côtés AB, AC, jusqu'à ce que vous ayez (379), $BAE = 180^\circ = ABD = CAF = ACD$. Il est évident par cette construction, en vertu de laquelle on a aussi $CBF = 180^\circ = BFE$, que le triangle AEF, placé sur l'hémisphère antérieur, est égal (407) au triangle BCD décrit sur l'hémisphère opposé. Appellons m la surface de chacun de ces deux triangles, x la surface cherchée du triangle ABC, n et p les surfaces des triangles CAE, BAF. On sait d'ailleurs que la surface de la sphere est égale à la circonférence d'un grand cercle, multipliée par le diametre. Mettant donc $2R \times 360^\circ$

au lieu de la *surface de la sphere* dans la proportion (415), nous aurons le fuseau ABDCA, ou $x + m, = 2A \times R$; le fuseau BAECB, ou $x + n, = 2B \times R$; et le fuseau CBFAC, ou $x + p, = 2C \times R$; de sorte qu'en additionnant les trois équations, on a $3x + m + n + p = (A + B + C) \times 2R$. Mais il est clair, par la figure, que la moitié de la surface de la sphere, ou $2R \times 180^\circ, = x + m + n + p$. Donc $2x + 2R \times 180^\circ = (A + B + C) 2R$; et par conséquent

$$x = (A + B + C - 180^\circ) \times R.$$

Donc la *surface d'un triangle sphérique se trouve en retranchant 180° de la somme des trois angles, et multipliant le reste par le rayon de la sphere.*

Cette solution, extrêmement simple, est tirée de Wallis.

Il faut observer, pour le calcul de cette équation, que les deux facteurs du second membre doivent être des quantités de même espece. Soit $(A + B + C - 180^\circ) = D$; si on veut en degrés ou minutes, &c. la surface cherchée, on emploiera D en degrés ou minutes, et, pour le rayon, R° ou R', &c. (262). Si l'on veut la surface en pouces ou pieds, &c., on prendra R en pouces ou pieds, &c., et on réduira D en pouces ou pieds par la proportion R° ou R' : D° ou D' :: R en pouces ou pieds : D en pouces ou pieds.

Exemples du calcul des Triangles obliquangles.

500. EXEMPLE I. Connoissant la longitude et la latitude géographique (416) de deux lieux, comme Pétersbourg et la Conception, ville du Chili, on demande l'arc de la Terre intercepté entre ces deux villes, ou, ce qui revient au même, leur distance.

Longitude de Pétersbourg comptée du méridien	
de Paris et à l'orient	27° 59' 30"
Longitude de la Conception, occident de Paris,	<u>75 0 0</u>
Différence de longitude entre Pétersbourg et la	
Conception	102 59 30

Latitude septentrionale de Pétersbourg . . . $59^{\circ} 56' 0''$
 Latitude méridionale de la Conception . . . $36 42 53$
 Soit donc (416), A le pôle, et l'angle A = $102 59 30$ Fig.48
 B la Conception, et AB = $126 42 53$
 D Pétersbourg, et AD = $30 4 0$

On cherche BD; et c'est le cas de la solution (VIII. 8^e). Je nomme AB la *base* et AD le *côté donné*, et j'ai

log. — cos.A = $9,351814$	log. cos.AD = $9,937238$
log. tang. AD = $9,762606$	comp. log. — cos.I seg. = $0,003647$
log. — tang.I seg. = $9,114420$	log. cos.II segment = $9,842787$
Donc I segm. = $172^{\circ} 35' 6''$	log. — cos.BD = $9,783672$
Base = $126 42 53$	Donc BD = $127^{\circ} 25' 18''$
Diff ou II seg. = $45 52 13$	

La distance cherchée est donc, à très peu près, de 7645 milles géographiques, de 60 au degré.

Pour faire d'autant plus promptement ce calcul, il est à propos de chercher et d'écrire immédiatement l'un après l'autre le log. de tang.AD, et celui de cos.AD; ainsi que le complément de log. cos.I segm., immédiatement après avoir trouvé la valeur de ce segment.

EXEMPLE II. Résolvons le même problème, en prenant AD pour la *base*, AB pour le *côté donné*.

log. — cos.A = $9,351814$	log. — cos.AB = $9,776578$
log. — tang.AB = $0,127391$	compl. log. cos.I segm. = $0,018886$
log. tang.I segm. = $9,479205$	log. cos.II segment = $9,988208$
I segment = $16^{\circ} 46' 30''$	log. — cos.BD = $9,783672$
Base = $30 4 0$	Et c'est ce que nous venons de
Diff. ou II seg. = $13 17 30$	trouver tout-à-l'heure.

On voit quelle est l'exactitude et la facilité de nos regles, qu'on

pourra comparer avec celles que donne La Caille pour le même cas (*Éléments d'Astronomie, Traité préliminaire, art. VI, problème X*).

EXEMPLE III. Retournons le problème. *Connoissant la distance et les latitudes géographiques de deux lieux, trouver la différence de leurs longitudes.*

Ce problème est d'un grand usage dans la navigation. Car lorsqu'un Pilote connoît les longitude et latitude du lieu d'où il est parti ; qu'il a tenu compte (216) de la route parcourue, et qu'il a observé la latitude (ou la hauteur du pôle) pour le point du globe où il se trouve ; il ne lui reste plus, pour connoître exactement la situation de ce point, qu'à déterminer, au moyen de ces données, le chemin qu'il a fait en longitude : et c'est l'objet du problème que nous allons résoudre.

Fig. 48 Soit donc BD la route déjà faite, AB le complément de la latitude du lieu de départ B, AD le complément de celle du point D, où se trouve le vaisseau. Connoissant ces trois côtés du triangle ABD, on cherche l'angle au pôle, A, qui est la différence entre la longitude connue du méridien AB, et la longitude cherchée du méridien AD.

J'emploie pour résoudre ce cas, la première formule (VIII. 11°) : j'appelle a le côté BD opposé à l'angle cherché, b et c les deux autres, à volonté ; et je suppose

$$\begin{array}{rcl}
 a & = & 37^{\circ} \ 24' \ 46'' \\
 b & = & 41 \quad 9 \quad 0 \\
 c & = & 71 \ 30 \ 0 \\
 \hline
 \text{somme} & & 150 \ 3 \ 46 \\
 \text{demi-somme ou } s & = & 75 \quad 1 \ 53 \\
 s - b & = & 33 \ 52 \ 53 \\
 s - c & = & 3 \ 31 \ 53
 \end{array}$$

Après ces préparations indiquées par la formule, je trouve

$$\log.\sin.(s - b) = 9,746226$$

$$\log.\sin.(s - c) = 8,789548$$

$$\text{compl.}\log.\sin.b = 0,181753$$

$$\text{compl.}\log.\sin.c = 0,023043$$

$$\text{somme} \quad \underline{8,740570}$$

$$\text{demi-somme ou } \log.\sin.\frac{1}{2}A = 9,370285$$

Ce log. répond à $\sin.13^{\circ} 34' 0''$; donc $A = 27^{\circ} 8'$.

Pour s'exercer, on pourra chercher le même angle par la seconde formule (VIII. 11°).

EXEMPLE IV. Ayant les mêmes données, cherchons le même angle par la solution (IX. 7°).

Soit donc $BD = 37^{\circ} 24' 46''$, $AD = 41^{\circ} 9'$, $AB = 71^{\circ} 30'$.

Je nomme *base* le côté AD, simplement *côtés* les deux autres; j'ai $\frac{1}{2}AD = 20^{\circ} 34' 30''$; $\frac{1}{2}(AB + BD) = 54^{\circ} 27' 23''$; $\frac{1}{2}(AB - BD) = 17^{\circ} 2' 37''$. Donc

$$\log.\text{tang. demi-somme des côtés} = 0,146033$$

$$\log.\text{tang. demi-différence des côtés} = 9,486520$$

$$\log.\cot.\frac{1}{2}\text{base} = 0,425532$$

$$\log.\text{tang.}\frac{1}{2}a = 0,058085$$

Donc $\frac{1}{2}a = 48^{\circ} 49' 12''$. Dans le calcul de la dernière équation (IX. 7°) je dois employer le segment et le côté adjacents à l'angle cherché : or AD étant la base, le seul côté adjacent à l'angle cherché est AB; et comme AB est plus grand que l'autre côté BD, je dois, d'après la règle de la table, relativement à ce cas, employer avec AB le grand segment. C'est donc ce segment que je cherche, et j'ai : grand segment $= 20^{\circ} 34' 30'' + 48^{\circ} 49' 12'' = 69^{\circ} 23' 42''$. J'ai ensuite

$$\log.\text{tang. } 69^{\circ} 23' 42'' = 0,424844$$

$$\log.\cot.71^{\circ} 30' = 9,524520$$

$$\log.\cos.A = 9,949364$$

Donc $A = 27^{\circ} 8' 0''$, comme nous l'avons trouvé dans l'exemple III.

Fig.48

EXEMPLE V. Ayant les mêmes données, cherchons l'angle D. Puisqu'il est, ainsi que A, dans l'exemple précédent, adjacent à AD, que nous avons pris et prenons encore pour la base, le calcul déjà fait de la 1^e équation (IX. 7^e) sera le même dans cet exemple-ci. Le côté adjacent à l'angle cherché sera $BD < AB$; donc dans la 4^e équation (IX. 7^e) il faut employer le petit segment.^{or} On a ~~donc~~ petit segm. $= 20^{\circ} 34' 30'' - 48^{\circ} 49' 12'' \frac{1}{2} = - 28^{\circ} 14' 42'' \frac{1}{2}$. Et la tangente de cet arc négatif sera négative, (154).

$$\log. - \text{tang. } 28^{\circ} 14' 42'' \frac{1}{2} = 9,730144$$

$$\log. \cot. 37^{\circ} 24' 46'' = 0,116389$$

$$\log. - \cos. D = 9,846533$$

Et par conséquent $D = 134^{\circ} 36' 47''$, 3.

501. Un Auteur très connu, employant les mêmes valeurs pour AB, AD et A, calcule cet angle D au moyen de la formule (VII. 17^e), (dans laquelle je suppose D au lieu de C), et le donne de $45^{\circ} 23' 14''$, c'est-à-dire aigu. Il n'a pas fait attention que $\cos. AD \cos. A$ est $> \sin. AD \cot. AB$, et que la quantité négative étant la plus grande dans le dénominateur, tang. D est nécessairement aussi une quantité négative. Cette méprise ne mériterait pas d'être relevée, si le même Auteur n'annonçoit pas, avant de donner le calcul du problème, que l'angle cherché doit être aigu, et s'il n'ajoutoit pas que c'est par cette raison qu'il prend $\cos. AD \cos. A$ avec un signe négatif. Quelque triangle ABD que l'on considère, jamais la règle suivante ne sera en défaut : *Le signe de $\cos. AD \cos. A$ ne dépend nullement de l'espece de l'angle D, mais seulement de celles de AD et de A; et il sera toujours négatif, quand AD et A seront de même espece.* Si cet Auteur, très justement estimé, a pu se tromper ainsi relativement aux signes, cela prouve assez, du moins à mon avis, que l'espece d'analyse algébrique très compliquée dont il a fait usage pour construire les formules de la table VII, expose plus à des erreurs que l'analyse trigonométrique que j'ai adoptée dans cet Ouvrage, employée sui-

vant les regles que j'ai données (459). On peut comparer ces deux méthodes relativement à la formule (VII. 17°) : pour la construire par le moyen de l'analyse algébrique en question, il faut considérer treize lignes dans l'intérieur de la sphere, et les distribuer dans quatre analogies : il est aisé de juger combien dès-lors la figure et le calcul doivent être compliqués ; et l'on peut voir combien l'une et l'autre sont simples dans la méthode que j'ai suivie (470). Aussi ai-je omis presque entierement dans ce Traité la considération des lignes intérieures de la sphere, qui ne m'a paru fournir que des solutions pénibles, du moins pour les problèmes que j'ai rencontrés.

L'exemple suivant démontrera encore que dans le triangle dont il s'agit, Exemp. IV et V, l'angle D est réellement obtus, ainsi que nous l'avons trouvé en faisant usage des regles de la table IX.

502. EXEMPLE VI. Connoissant $AB = 71^{\circ} 30'$, $AD = 41^{\circ} 9'$, $A = 27^{\circ} 8'$, cherchons à la fois les deux autres angles du triangle ABD, au moyen des formules très expéditives de Neper (IX. 2°).

$\frac{1}{2}A = 13^{\circ} 34'$, $\frac{1}{2}(AB + AD) = 56^{\circ} 19' 30''$, $\frac{1}{2}(AB - AD) = 15^{\circ} 10' 30''$. J'observe de plus, qu'en vertu de la regle (413), D doit être $> B$; et je fais le calcul comme il suit :

$$\begin{array}{ll} \log. \cot. \frac{1}{2}A = 0,617425 & \dots \dots \dots 0,617425 \\ \log. \sin. \frac{1}{2}(AB - AD) = 9,417917 & \dots \dots \dots \log. \cos. \quad 9,984586 \\ \text{compl. log. sin. } \frac{1}{2}(AB + AD) = 0,079774 & \dots \text{compl. log. cos. } \quad 0,256113 \\ \log. \tan. \frac{1}{2}(D - B) = 0,115116 & \log. \tan. \frac{1}{2}(D + B) = 0,858124 \\ \text{Donc } \frac{1}{2}(D + B) = & 82^{\circ} \quad 6' \quad 25'', 4 \\ \frac{1}{2}(D - B) = & 52 \quad 30 \quad 22 \quad , 0 \\ \text{Donc } D = & 134 \quad 36 \quad 47 \quad , 4 \\ \text{'et } B = & 29 \quad 36 \quad 3 \quad , 4; \end{array}$$

résultat qui prouve la précision des regles employées dans l'exemple V. S'il y a un dixieme de seconde de différence entre les calculs des exemples V et VI, c'est que nous avons pris les logarithmes avec six décimales seulement; avec une seule décimale de plus, les deux calculs donneroient absolument la même valeur pour l'angle D.

CHAPITRE XVII.

Résolution des Triangles sphériques par la Regle et le Compas.

503. L'INVENTION des logarithmes a rendu la résolution des triangles si précise et si prompte, que les Géometres ne tiennent plus aucun compte, pour ainsi dire, des opérations graphiques, sujettes à des erreurs de plusieurs minutes, quelque attention, quelque soin qu'on y apporte. Cependant comme cette espece de solutions peut être utile dans certains cas qui n'exigent pas une exactitude rigoureuse, ou pour ceux qui ne sont pas familiarisés avec le calcul, je ne laisserai pas de les indiquer en peu de mots, et sans faire usage de la méthode des projections, pour mettre ces solutions à la portée d'un plus grand nombre de Lecteurs.

Soient donnés les trois côtés d'un triangle sphérique ABC; par exemple AB de $71^{\circ}\frac{1}{2}$, AC de $41^{\circ}\frac{1}{4}$, et BC de $37^{\circ}\frac{1}{2}$. On demande la valeur de l'angle C.

Fig. 58 Décrivez un cercle entier $na cM$, le plus grand qu'il sera possible; puis, au moyen d'un rapporteur, ou de l'échelle des cordes d'un compas de proportion, ou par tel autre moyen que vous voudrez, coupez, sur la circonférence du cercle décrit, et d'un point c pris à volonté sur cette circonférence, les arcs cb , ca respectivement égaux aux côtés donnés BC, AC qui comprennent l'angle cherché. Marquez de même, du côté opposé, un arc cM égal à l'un quelconque des côtés cb , ca , par exemple à cb , et menez la corde Mb . Alors de l'extrémité a de l'autre ca de ces mêmes côtés, marquez les arcs an , aN égaux chacun au troisieme côté donné AB; menez la corde nN qui coupera (398, 399) l'autre corde bM en un point comme P. Enfin prenez la moitié MD de cette dernière, du point D décrivez le demi-cercle MRb, élevez jusqu'à sa rencontre la perpendiculaire PR, et menez le rayon RD: l'angle

l'angle bDR sera égal à l'angle cherché C . Cet angle bDR se mesure ensuite ou avec le rapporteur ou avec l'échelle des cordes, en ayant égard à la valeur du rayon DR , ou de telle autre manière qu'on voudra.

Actuellement si on veut avoir l'angle A opposé au côté $BC = bc$, il suffit de prendre la moitié de Nn , et de couper l'autre corde Mb en décrivant un arc d'un rayon égal à cette moitié, et du point R pour centre. En supposant que E soit le point de la section, l'on menera la ligne RE , et l'on aura DER égal à l'angle cherché A .

Si l'on vouloit l'angle B , il faudroit changer la construction, et faire, pour déterminer cet angle, toutes les opérations que nous avons faites pour trouver l'angle C .

Nous verrons bientôt que la construction de la figure 58 suffit pour résoudre tous les cas non douteux des triangles sphériques. Il est donc à propos d'expliquer les principes de cette construction.

504. Si l'on conçoit que le demi-segment cDb fasse une révolution autour de la droite Dc , la base de la calotte sphérique engendrée par cette révolution, sera un cercle ayant Mb pour diamètre, c pour pôle, et D pour centre. La demi-circonférence de ce cercle sera donc MRb et appartiendra à la surface de la sphere. De plus on peut toujours concevoir un grand cercle Man perpendiculaire au plan du demi-cercle MRb , et dont Mb soit une corde. Enfin supposons un petit cercle décrit (384) sur la surface de la sphere, du pôle a et de l'intervalle de l'arc $an = aN$; Nn sera évidemment le diamètre de ce cercle. Or les diamètres Mb , Nn se coupant en un point P , il faut que les circonférences auxquelles ils appartiennent respectivement, se coupent en un point R ; le point P ne pouvant être commun aux diamètres, que l'ordonnée PR ne soit commune aux circonférences. Si donc an est la distance du point R au point a sur la surface de la sphere, et cb la distance du point c au point R , que l'on conçoive un triangle acR sur la surface de la sphere, et on reconnoîtra que par la construction il est égal au triangle donné ABC . L'angle cherché C est l'angle acR , qui est

Fig. 58 du même nombre de degrés (394) que l'arc de parallèle bR . Mais $bR = D$: donc $D = C$, comme il falloit le démontrer.

Considérons maintenant que dans le triangle rectiligne RDE , $ER : DR :: \sin.D : \sin.DER$, (49). Mais par construction $ER = \frac{1}{2}Nn = \sin.an$ (18) $= \sin.AB$; de même $DR = \frac{1}{2}Mb = \sin.cb = \sin.BC$. De plus nous venons de voir que $D = C$. Donc l'analogie devient $\sin.AB : \sin.BC :: \sin.C : \sin.DER$; et par conséquent (VII. 1^e), $DER = A$; comme nous l'avons avancé (503).

505. Nous avons vu (503) comment, connoissant les trois côtés, on trouve un angle. Si les données étoient les trois angles, on auroit par la même construction la valeur d'un côté, en faisant usage du triangle supplémentaire, c'est-à-dire en employant le supplément à 180° , de chacun des angles donnés. Pour cet effet on nommera BC l'angle A , AC l'angle B , et AB l'angle C , (440). Alors si le côté cherché est, par exemple, BC , on cherchera, au lieu de ce côté, l'angle A , dont le supplément sera la valeur du côté cherché BC .

506. Si deux côtés et l'angle compris étoient donnés, on trouveroit le troisieme côté et l'un quelconque des deux autres angles, de la maniere suivante :

Sur la circonférence $nacM$ on prendroit deux arcs cb , ca , égaux aux côtés donnés : nommant cb le côté opposé à l'angle cherché ; on tireroit (503) la corde Mb , et de l'extrémité a de l'autre côté ca , le rayon am , m étant le centre du cercle $nacM$. Sur Mb on décriroit le demi-cercle MRb , dont on prendroit, du côté des arcs cb , ca , un arc bR égal à l'angle donné. Enfin abaissant du point R la perpendiculaire RP , menant le rayon DR , et faisant passer par le point P une corde Nn perpendiculaire à am , on auroit aN ou an pour la mesure du côté inconnu dans le triangle proposé.

Prenant ensuite la ligne RE égale à la moitié de Nn , (503), on auroit DER égal à l'angle cherché.

Toutes ces opérations sont évidemment fondées sur la construction (503).

507. Si les données sont deux angles et le côté compris, on aura le troisième angle et l'un quelconque des deux autres côtés, en prenant les suppléments des angles et du côté donnés, moyen déjà employé (505), et en résolvant le triangle de la manière indiquée (506). Le supplément du côté qu'on trouvera sera l'angle cherché; le supplément de l'angle qu'on trouvera sera le côté cherché.

508. Je ne parlerai pas de la manière de résoudre le triangle; lorsque les données sont deux côtés et un angle opposé, ou deux angles et un côté opposé: 1°. parceque ce sont les cas douteux; 2°. parceque, dans la pratique, ces cas se rencontrent moins fréquemment; 3°. parce que leur solution graphique est beaucoup plus laborieuse que les précédentes, et que, pour ces cas, je ne crois pas que ce genre de solution puisse jamais être préféré au calcul numérique qui, pour la solution quelconque d'un triangle sphérique, n'exige jamais plus de cinq minutes de temps, si l'on ne tient compte que des degrés et minutes de degrés, et qui atteint toujours à une précision bien supérieure à celle qu'on peut obtenir avec la règle et le compas.

CHAPITRE XVIII.

Comparaison des Triangles sphériques aux Triangles rectilignes.

509. 1°. Nous comparerons le triangle sphérique au triangle rectiligne formé par les cordes des arcs ou côtés du premier; comparaison qui peut-être n'a pas encore été faite, mais qui me paroît

n'être pas déplacée dans un Traité sur les deux Trigonométries rectiligne et sphérique.

2°. Il est très usité et très commode de résoudre comme rectilignes les petits triangles sphériques rectangles ; or nous déterminerons pour tous les cas les limites auxquelles cette méthode peut s'étendre , au moyen d'une correction facile ; ce qui nous donnera lieu de comparer entre elles les formules des Trigonométries rectiligne et sphérique.

3°. En nous occupant de cette recherche , nous avons trouvé que , dans le cas où l'un des côtés de l'angle droit est un arc de petit cercle , ainsi qu'il arrive le plus souvent en Astronomie , l'erreur sur l'angle droit , à laquelle je crois qu'on n'a pas fait attention jusqu'ici , peut influencer sensiblement sur les résultats. Nous indiquons les moyens d'éviter cette erreur.

510. La différence de l'arc à sa corde peut se déterminer d'une manière aussi approchée qu'on le voudra par le moyen de la dernière équation (152). Si les arcs sont petits , ces différences sont , à très peu près , proportionnelles aux cubes des arcs , ainsi qu'on le trouve en se bornant au premier terme du second membre de cette équation. Pour l'arc de 1° , la différence est $0''$, 04569 , et son logarithme est 8,6598 ; auquel ajoutant le triple du log. d'un arc quelconque (pourvu qu'il n'excede pas 8°) exprimé en degrés et décimales de degrés , on aura le logarithme de la différence exacte de cet arc à sa corde en secondes et dixièmes de seconde. On peut encore multiplier par R° , ou par R' , ou par R'' , (262) , le double du sinus de la moitié d'un arc quelconque (18) ; on aura la valeur de la corde en degrés , ou en minutes , ou en secondes : et cette valeur , comparée à celle de l'arc , donnera la différence cherchée.

511. Pour déterminer la différence des angles sphériques aux angles rectilignes , proposons-nous de résoudre le problème suivant :

Dans un triangle sphérique quelconque , connoissant deux côtés et l'angle compris , trouver l'angle rectiligne correspondant. (J'en-

tends par *angle correspondant*, l'angle formé par les cordes des deux côtés donnés).

Soit ABC un triangle sphérique, et *abc* le triangle formé par les Fig. 59 cordes des trois arcs. Le triangle sphérique donne (VII. 26°), $\cos. BC = \cos. A \sin. AB \sin. AC + \cos. AB \cos. AC$, ou (I. 22°), $1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} BC = \cos. A \sin. AB \sin. AC + (1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} AB) (1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} AC)$. Donc $2 \sin.^2 \frac{1}{2} AB + 2 \sin.^2 \frac{1}{2} AC - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} BC = \cos. A \sin. AB \sin. AC + 4 \sin.^2 \frac{1}{2} AB \sin.^2 \frac{1}{2} AC$. Le triangle *abc* donne (III. 25°), $bc^2 = ab^2 + ac^2 - 2ab \times ac \cos. a$. Mais $bc = 2 \sin. \frac{1}{2} BC$, (18). En transformant ainsi les autres cordes, l'équation devient $4 \sin.^2 \frac{1}{2} BC = 4 \sin.^2 \frac{1}{2} AB + 4 \sin.^2 \frac{1}{2} AC - 8 \sin. \frac{1}{2} AB \sin. \frac{1}{2} AC \cos. a$, ou $2 \sin.^2 \frac{1}{2} AB + 2 \sin.^2 \frac{1}{2} AC - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} BC = 4 \sin. \frac{1}{2} AB \sin. \frac{1}{2} AC \cos. a$. Substituant la valeur du premier membre, trouvée ci-dessus, j'aurai $\cos. A \sin. AB \sin. AC + 4 \sin.^2 \frac{1}{2} AB \sin.^2 \frac{1}{2} AC = 4 \sin. \frac{1}{2} AB \sin. \frac{1}{2} AC \cos. a$. En divisant par $4 \sin. \frac{1}{2} AB \sin. \frac{1}{2} AC$, et observant que $\sin. AB \sin. AC = 4 \sin. \frac{1}{2} AB \cos. \frac{1}{2} AB \sin. \frac{1}{2} AC \cos. \frac{1}{2} AC$, (I. 6°), je trouve une formule très simple pour la solution générale du problème proposé, et j'ai

$$(A) \dots \cos. a = \cos. A \cos. \frac{1}{2} AB \cos. \frac{1}{2} AC + \sin. \frac{1}{2} AB \sin. \frac{1}{2} AC.$$

De cette formule il est aisé de conclure 1°. que l'angle sphérique droit ou obtus, est toujours plus grand que l'angle rectiligne correspondant; 2°. que l'angle sphérique aigu est moindre que l'angle rectiligne correspondant, lorsqu'on a $\cos. A > \frac{\sin. \frac{1}{2} AB \sin. \frac{1}{2} AC}{1 - \cos. \frac{1}{2} AB \cos. \frac{1}{2} AC}$.

512. De la formule (A) on passe aisément à la solution du problème inverse.

Dans un triangle rectiligne abc, connoissant deux côtés et l'angle compris, trouver l'angle des deux arcs AB, AC, dont les deux côtés donnés seroient les cordes.

La formule (I. 18°) donne $\cos. \frac{1}{2} AB \cos. \frac{1}{2} AC = \sqrt{(1 - \sin.^2 \frac{1}{2} AB) (1 - \sin.^2 \frac{1}{2} AC)}$: on a d'ailleurs $\sin. \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} ab$, et $\sin. \frac{1}{2} AC$

Fig. 59 $= \frac{1}{2}ac$. Substituons ces valeurs dans l'équation (A), et nous aurons

$$(B) \dots \cos. A = \frac{\cos. a - \frac{1}{2}ab \times \frac{1}{2}ac}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2}ab)(1 + \frac{1}{2}ab)(1 - \frac{1}{2}ac)(1 + \frac{1}{2}ac)}}.$$

Pour calculer cette formule, il faut que les valeurs des côtés ab, ac soient telles qu'ils puissent être cordes d'un cercle ayant l'unité pour rayon. C'est ce qu'on obtiendra facilement en divisant les valeurs des côtés, données en pieds ou toises ou autres mesures, par une puissance de 10, telle qu'aucun côté n'excede 2, valeur de la plus grande corde, quand on suppose $R = 1$.

513. Si $AB = AC$, et que par conséquent $ab = ac$, les formules (A), (B) se réduisent aux suivantes (C), (D). En effet, dans ce cas, $\cos. a = \cos. A \cos.^2 \frac{1}{2}AB + \sin.^2 \frac{1}{2}AB$, et par conséquent (I. 22°, 3°), $1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2}a = (1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2}A) \cos.^2 \frac{1}{2}AB + 1 - \cos.^2 \frac{1}{2}AB$; équation de laquelle on tire

$$(C) \dots \sin. \frac{1}{2}a = \sin. \frac{1}{2}A \cos. \frac{1}{2}AB.$$

Mais $\cos. \frac{1}{2}AB = \sqrt{(1 - \sin.^2 \frac{1}{2}AB)} = \sqrt{(1 - \frac{1}{4}ab^2)}$. Donc

$$(D) \dots \sin. \frac{1}{2}A = \frac{\sin. \frac{1}{2}a}{\sqrt{(1 - \frac{1}{4}ab)(1 + \frac{1}{4}ab)}}.$$

La formule (C) fait voir que l'angle vertical d'un triangle sphérique isoscele est toujours plus grand que l'angle rectiligne correspondant.

514. Enfin si $A = 90^\circ$, les formules (A), (B) donnent

$$(E) \dots \cos. a = \sin. \frac{1}{2}AB \sin. \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}ab \times \frac{1}{2}ac.$$

Toutes les formules que nous venons de donner sont générales et rigoureuses, quelle que soit la grandeur du triangle. Mais si un triangle sphérique rectangle est petit, on pourra mettre les arcs au lieu des sinus dans la formule (E); et comme $\cos. a = \sin. (90^\circ - a) = 90^\circ - a$, le petit excès de l'angle droit sphérique sur l'angle rectiligne correspondant, sera donné en secondes par la formule suivante, qui suppose les arcs AB, AC pris en secondes :

$$(F) \dots 90^\circ - a = \frac{\frac{1}{2}AB \times \frac{1}{2}AC}{R''}.$$

Quand la somme des côtés seroit de 10° , l'erreur qu'occasionneroit cette formule ne seroit pas d'une seconde.

Si l'hypothénuse n'excede pas $1^\circ 30'$, on peut mettre $BC \sin.C$ au lieu de AB , et $BC \cos.C$ au lieu de AC , (213, 11°, 12°); ce qui donne $AB \times AC = BC^2 \sin.C \cos.C = \frac{1}{2} BC^2 \sin.2(90^\circ - B) = \frac{1}{2} BC^2 \sin.2B$; de sorte que la différence cherchée se trouve aussi par la formule suivante :

$$(G)... 90^\circ - a = \frac{(\frac{1}{2} BC)^2 \sin.2C}{2R''} = \frac{(\frac{1}{2} BC)^2 \sin.2B}{2R''}.$$

Si $BC = 1^\circ 30'$, et que $B = C = 45^\circ$ à-peu-près, on trouve $90^\circ - a = 17''$, 7.

515. En supposant encore que l'hypothénuse n'excede pas $1^\circ 30'$, considérons les angles obliques B , C .

La formule (A) appliquée à l'angle B , par exemple, donne $\cos.b = \cos.B \cos.\frac{1}{2}AB \cos.\frac{1}{2}BC + \sin.\frac{1}{2}AB \sin.\frac{1}{2}BC$. Mais $\cos.\frac{1}{2}AB \cos.\frac{1}{2}BC = (1 - 2\sin.^2\frac{1}{4}AB)(1 - 2\sin.^2\frac{1}{4}BC) = 1 - 2\sin.^2\frac{1}{4}AB - 2\sin.^2\frac{1}{4}BC$, en négligeant la quantité $4\sin.^2\frac{1}{4}AB \sin.^2\frac{1}{4}BC$, qui dans notre hypothese est absolument insensible. Substituant la dernière valeur de $\cos.\frac{1}{2}AB \cos.\frac{1}{2}BC$, et mettant les arcs au lieu des sinus, on a $\cos.b = \cos.B - \frac{1}{8}\cos.B(AB^2 + BC^2) + \frac{1}{2}AB \times \frac{1}{2}BC$. Dans le dernier terme on peut mettre, sans erreur sensible, $BC \cos.B$ au lieu de AB : donc $\cos.b - \cos.B = \frac{1}{8}\cos.B(BC^2 - AB^2) = \frac{1}{8}AC^2 \cos.B$. De plus (II. 23°), $\cos.b - \cos.B = 2\sin.\frac{1}{2}(B - b) \sin.\frac{1}{2}(B + b) = (B - b) \sin.B$, attendu l'extrême petitesse de $B - b$. Donc on aura, pour la différence de l'angle sphérique oblique à l'angle rectiligne correspondant,

$$(H)... B - b = \frac{(\frac{1}{2} AC)^2 \cot.B}{2R''}.$$

Et comme $AC \cot.B = AB$, (213, 5°), on aura aussi

$$(K)... B - b = \frac{\frac{1}{2} AB \times \frac{1}{2} AC}{2R''}.$$

516. La même méthode donneroit pour $C - c$ la même valeur (K) que pour $B - b$, valeur qui est visiblement la moitié de celle

donnée par la formule (F). Donc 1°. quelque différents en grandeur que soient les angles obliques d'un petit triangle sphérique rectangle, ils excèdent chacun d'une même quantité l'angle rectiligne qui correspond à chacun d'eux respectivement; 2°. la somme des deux excès est égale à l'excès de l'angle droit sur l'angle rectiligne correspondant. D'où l'on doit conclure que l'une, à volonté, des formules (F), (G), (H), (K) suffit seule pour déterminer la différence de chacun des trois angles d'un petit triangle sphérique rectangle à l'angle rectiligne qui correspond respectivement à chacun d'eux.

517. Les formules que nous avons données jusqu'à présent font connoître la différence d'un angle sphérique à l'angle rectiligne correspondant, différence constante dans un triangle donné. Mais quand on résout un triangle sphérique par les formules de la Trigonométrie rectiligne, l'erreur que l'on commet alors sur les angles est d'une autre espèce, et ne me paroît pas devoir être appelée *la différence* de l'angle sphérique à l'angle rectiligne, puisque dans un même triangle l'erreur varie pour un même angle, selon qu'on emploie pour le déterminer telles ou telles autres parties du triangle. M. de la Lande (*Mémoires Acad.* 1763) a déterminé l'erreur sur les angles obliques d'un petit triangle sphérique rectangle trouvés par le moyen des deux côtés et par les formules de la Trigonométrie rectiligne : nous suivrons les traces de ce célèbre Astronome pour rechercher les erreurs qui se commettent dans tous les cas, lorsqu'on se sert des formules de la Trigonométrie rectiligne pour résoudre les petits triangles sphériques rectangles. Cette recherche, la seconde de celles que nous avons pour but (509) dans ce Chapitre, nous donnera un nouveau moyen très commode pour obtenir les petits arcs avec une précision très grande, et fort supérieure à celle qu'on peut espérer par les formules ordinaires, en se servant des tables de logarithmes à sept décimales.

518. Dans un triangle sphérique ABC rectangle en A, connoissant l'hypothénuse BC, que je suppose ne pas excéder 4°, et

un angle, par exemple B, trouver l'erreur e que l'on commet en cherchant par la Trigonométrie rectiligne le côté opposé AC.

La Trigonométrie sphérique donne $\sin. AC = \sin. BC \sin. B$. Donc (149), (W), $AC - \frac{1}{6} AC^3 = \sin. B (BC - \frac{1}{6} BC^3)$. Les quantités du 5^e ordre, et à plus forte raison celles des ordres supérieurs, sont négligées dans cette transformation, parce que la 5^e puissance d'un arc de 4°, divisée par 120, ne vaut pas 0'', 01. On a donc $AC = BC \sin. B - \frac{1}{6} (BC^3 \sin. B - AC^3)$. Par la Trigonométrie rectiligne on a $AC = BC \sin. B$: cette formule donne donc le côté AC trop grand de la quantité $\frac{1}{6} (BC^3 \sin. B - AC^3)$. Mais, toujours en négligeant les quantités du 5^e ordre, l'avant-dernière équation élevée au cube, donne $AC^3 = BC^3 \sin.^3 B$. Donc $e = -\frac{1}{6} BC^3 \sin. B (1 - \sin.^2 B)$: et pour avoir cette erreur en secondes, (nous supposons toujours les côtés pris en secondes),

$$e = - BC \sin. B \times \frac{BC^2 \cos.^2 B}{6 R'' R''}.$$

Si $BC = 4^\circ$, et que $B = 35^\circ 16'$, ce qui est le cas de la plus grande valeur (141) de $\sin. B \cos.^2 B$, on trouve $e = -4'', 50$.

On observera (et cette réflexion s'applique de même à tous les problèmes qui suivent) combien il seroit facile ou de former une table de cette erreur, ou de trouver l'erreur dans chaque cas particulier. Car en calculant $BC \sin. B$ on a déjà eu occasion de prendre le log. de BC ; de plus on sait ordinairement les logarithmes de 6 et de R'' , attendu l'usage fréquent qu'on en fait dans le calcul ; et il suffit de les employer avec quatre décimales, de même que celui de $\cos. B$. Peut-être en coûteroit-il moins de travail que de chercher par les parties proportionnelles les logarithmes de $\sin. BC$ et de $\sin. AC$, en résolvant le triangle comme sphérique ; et peut-être cette dernière méthode ne donneroit-elle jamais les centièmes de seconde aussi exactement qu'on les auroit par les logarithmes des nombres, à sept décimales, dans le calcul de l'équation $AC = BC \sin. B$.

519. Les données étant les mêmes que dans le problème précédent, *trouver le côté adjacent ^{AB} à l'angle donné.*

Puisque (430, 2°), $\text{tang. AB} = \cos. B \text{ tang. BC}$, on aura (153), (U), $\text{AB} + \frac{1}{3} \text{AB}^3 = \cos. B (\text{BC} + \frac{1}{3} \text{BC}^3)$; et par conséquent $\text{AB} = \text{BC} \cos. B + \frac{1}{3} (\text{BC}^3 \cos. B - \text{AB}^3)$. Donc $e = \frac{1}{3} \text{BC}^3 (1 - \cos.^2 B) \cos. B$, ou

$$e = \text{BC} \cos. B \times \frac{\text{BC}^2 \sin.^2 B}{3 R'' R'''}.$$

Cette erreur est en sens contraire de la précédente. La table de l'erreur de AC, (518), donneroit aussi celle de AB, en adoptant pour argument (90° — B) au lieu de B, et prenant le double de l'erreur donnée par la table.

520. Les données étant toujours les mêmes, *trouver l'angle C.*

Puisque (230, 3°), $\text{cot. C} = \cos. \text{BC} \text{ tang. B} = \text{tang. B} (1 - \frac{1}{2} \text{BC}^2)$, (154), (Y), si on fait $C = 90^\circ - B + e$, on aura $\text{cot. C} = \text{tang. (B} - e)$: et par conséquent $\text{tang. B} - \text{tang. (B} - e) = \frac{1}{2} \text{BC}^2 \text{ tang. B} = \frac{\sin. e}{\cos. B \cos. (B - e)}$, (II. 24°). Mettant $\cos. B$ au lieu de $\cos. (B - e)$, et e au lieu de $\sin. e$, on aura

$$e = (\frac{1}{2} \text{BC})^2 \times \frac{\sin. 2B}{R''}.$$

Cette formule est très commode, puisqu'elle suffit seule pour faire connoître la valeur de C. Il est vrai qu'elle n'est pas propre à donner les centièmes de secondes, lorsque BC est $> 1^\circ 30'$: mais on aura bien rarement un dixième de seconde d'erreur lorsque BC sera $< 3^\circ$.

521. Connoissant l'hypothénuse $\text{BC} < 3^\circ$, et un côté, par exemple AB, *trouver l'angle opposé C.*

$$\text{On a (230, 9°), } \sin. C = \frac{\sin. \text{AB}}{\sin. \text{BC}} = \frac{\text{AB} - \frac{1}{6} \text{AB}^3}{\text{BC} - \frac{1}{6} \text{BC}^3} = \frac{\text{AB}}{\text{BC}} \times \frac{1 - \frac{1}{6} \text{AB}^2}{1 - \frac{1}{6} \text{BC}^2}.$$

Nommant $C - e$ la valeur que donne la Trigonométrie rectiligne pour l'angle cherché, on aura $\sin. C - \sin. (C - e) = \frac{\text{AB}}{\text{BC}} \left(\frac{1 - \frac{1}{6} \text{AB}^2}{1 - \frac{1}{6} \text{BC}^2} - 1 \right) = \frac{\text{AB}}{\text{BC}} \times \frac{\text{BC}^2 - \text{AB}^2}{6 - \text{BC}^2} = 2 \sin. \frac{1}{2} e \cos. (C - \frac{1}{2} e)$, (II. 22°); et, en négligeant les quantités insensibles, $e =$

$\frac{AB(BC^2 - AB^2)}{6BC \times \cos.C} = \frac{1}{6} AB \times AC$, (213; 14°, 12°). Pour former une table, on auroit donc

$$e = \frac{AB}{6R''} \times \sqrt{(BC - AB)(BC + AB)}.$$

Mais la formule suivante

$$e = \frac{AB \times BC \cos.C}{6R''}$$

seroit plus commode pour corriger l'angle C, après l'avoir déterminé par la formule $\sin.C = \frac{AB}{BC}$.

Cette erreur est trois fois plus petite que celle que nous avons trouvée (520) pour le même angle C, l'hypothénuse et l'autre angle étant donnés. Il est facile de comparer les deux valeurs de e , en mettant dans la dernière formule $BC \cos.B$ au lieu de AB , et $\sin.B$ au lieu de $\cos.C$. Je suis donc fondé dans ce que j'ai avancé (517).

522. Les données étant les mêmes, *trouver l'angle adjacent B.*

La Trigonométrie sphérique donne $\cos.B = \cot.BC \tan.AB$; et la rectiligne, $\cos.(B - e) = \frac{AB}{BC}$. Donc $\cos.(B - e) - \cos.B = \frac{AB}{BC} - \frac{AB + \frac{1}{3}AB^2}{BC + \frac{1}{3}BC^2} = \frac{AB}{BC} \left(1 - \frac{3 + AB^2}{3 + BC^2}\right) = \frac{AB}{BC} \times \frac{BC^2 - AB^2}{3 + BC^2} = e \times \sin.B$, (II. 23°). Et par conséquent $e = \frac{AB}{BC \times \sin.B} \times \frac{AC^2}{3 + BC^2} = \frac{1}{3} AB \times AC$, (213, 10°), en négligeant dans le dénominateur le terme BC^2 , qui, en effectuant la division, ne donneroit que des quantités d'ordres supérieurs au troisieme. L'erreur, dans ce cas, est donc le double de celle produite (521) dans la détermination de l'angle C; d'où il suit que les mêmes formules serviront pour l'un et l'autre angle. Cependant pour avoir, dans le problème présent, la valeur de e avec le plus grand degré d'exactitude qu'on puisse attendre des tables dans la valeur de $(B - e)$ au moyen de la formule $\cos.(B - e) = \frac{AB}{BC}$, il faut que l'hypothénuse n'excede pas deux degrés.

523. Les données étant les mêmes, trouver l'autre côté AC.

Puisque $\cos.BC = \cos.AB \cos.AC$, on aura, en négligeant les quantités du 6^e ordre, $1 - \frac{1}{2}BC^2 + \frac{1}{24}BC^4 = (1 - \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{24}AB^4)(1 - \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{24}AC^4) = 1 - \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{24}AB^4 + \frac{1}{24}AC^4 + \frac{1}{4}AB^2 \times AC^2$. Réduisant, multipliant par 2, et transposant, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2 + \frac{1}{12}BC^4 - \frac{1}{12}AB^4 - \frac{1}{12}AC^4 - \frac{1}{2}AB^2 \times AC^2$. Mais, toujours en négligeant les quantités du 6^e ordre, cette équation élevée au carré, donne $BC^4 = AB^4 + 2AB^2 \times AC^2 + AC^4$. Donc, en substituant cette valeur de BC^4 dans l'équation qui vient de nous donner celle de BC^2 , on aura $BC^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{3}AB^2 \times AC^2$, ou $\sqrt{BC^2 - AB^2} = AC \sqrt{1 - \frac{1}{3}AB^2}$. En développant ce dernier binôme, et négligeant les quantités du 5^e ordre, on a $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} + \frac{1}{6}AB^2 \times AC$. Et par conséquent

$$e = \frac{AB^2}{6R''R''} \times \sqrt{(BC - AB)(BC + AB)}.$$

Cette formule donne les centièmes de secondes, quand l'hypothénuse n'excede pas 4°.

Comme ce problème est d'un usage fréquent, nous croyons devoir observer que quand on a calculé la valeur de AC par la formule (213, 14^e), il ne reste plus, pour avoir la correction de cette valeur, qu'à la multiplier par $\frac{AB^2}{6R''R''}$.

524. Connoissant un côté et l'angle opposé, par exemple AC et B, trouver l'autre angle C.

Puisque $\sin.C = \frac{\cos.B}{\cos.AC}$, si on fait $C = 90^\circ - B + e$, on aura $\cos.(B - e) = \frac{\cos.B}{\cos.AC} = \cos.B \times (1 - \frac{1}{2}AC^2)^{-1} = \cos.B + \frac{1}{2}AC^2 \cos.B$, en négligeant les quantités du 4^e ordre. Et par conséquent $\cos.(B - e) - \cos.B = \frac{1}{2}AC^2 \cos.B = e \sin.B$, (II. 23^e). Donc

$$e = \frac{AC^2 \times \cot.B}{2R''}.$$

Cette formule donne les centièmes de secondes, quand la somme

des côtés, ou $(AC + AC \cot.B)$, n'excede pas $2^{\circ}40'$. Si on vouloit former une table de cette précision, même pour les cas où on auroit $(AC + AC \cot.B) = 8^{\circ}$, il faudroit se servir de la formule $e = \frac{AC^2 \cot.B}{2R''} \left(1 + \frac{5 AC^2}{12 R'' R''}\right) + \frac{e^2 \cot.B}{2R''}$, en employant dans le dernier terme la valeur de e tirée du premier terme seulement.

525. Les données étant les mêmes, *trouver l'autre côté AB.*

Puisque $\sin.AB = \cot.B \tan.AC$, on aura $AB - \frac{1}{6} AB^3 = \cot.B (AC + \frac{1}{3} AC^3)$: donc $AB = AC \times \cot.B + \frac{1}{3} AC^3 \cot.B + \frac{1}{6} AB^3$. Et par conséquent $e = \frac{1}{3} AC^3 \cot.B + \frac{1}{6} AC^3 \cot.^3 B$, ou

$$e = AC \times \cot.B \times \frac{AC^2}{3 R'' R''} \left(1 + \frac{1}{2} \cot.^2 B\right).$$

Cette formule et la suivante donnent les centiemes de seconde, lorsqu'on a $(AC + AC \cot.B) < 8^{\circ}$.

526. Les données étant les mêmes, *trouver l'hypothénuse BC.*

La seconde équation (518) donne $BC = \frac{AC}{\sin.B} + \frac{1}{6} (BC^3 - \frac{AC^3}{\sin.B})$.

Et par conséquent $e = \frac{1}{6} (BC^3 - \frac{AC^3}{\sin.B}) = \frac{AC^3}{6 \sin.B} \left(\frac{1}{\sin.^2 B} - 1\right)$, ou

$$e = \frac{AC}{\sin.B} \times \frac{AC^2 \cot.^2 B}{6 R'' R''}.$$

527. *Connoissant un côté et l'angle adjacent, par exemple AB et B, trouver l'angle opposé C.*

$\cos.C = \sin.B \cos.AB = \sin.B (1 - \frac{1}{2} AB^2)$. Soit $C = 90^{\circ} - B + e$; on aura $\sin.B - \sin.(B - e) = \frac{1}{2} AB^2 \sin.B = e \times \cos.B$, (II. 22°). Donc

$$e = \frac{AB^2 \tan.B}{2 R''}.$$

Cette formule donne les centiemes de seconde, quand on a $(AB + AB \tan.B) < 2^{\circ}40'$; limite qui s'étendra jusqu'à 8° par la formule suivante, $e = \frac{AB^2 \tan.B}{2 R''} \left(1 - \frac{AB^2}{12 R'' R''}\right) - \frac{e^2 \tan.B}{2 R''}$, dans laquelle la valeur de e , tirée du premier terme, s'emploiera pour le dernier.

528. Les données étant les mêmes, *trouver l'autre côté AC.*

La seconde équation (525) donne $AC = AB \operatorname{tang.} B - \frac{1}{6} AB^3 \times \operatorname{tang.} B - \frac{1}{3} AC^3$. Donc $e = -\frac{1}{6} AB^3 \operatorname{tang.} B - \frac{1}{3} AB^3 \operatorname{tang.}^3 B$, ou

$$e = -AB \operatorname{tang.} B \times \frac{AB^2}{6 R'' R'''} (1 + 2 \operatorname{tang.}^2 B).$$

Cette formule donne les centièmes de seconde, quand on a $(AB + AB \operatorname{tang.} B) < 8^\circ$.

529. Les données étant les mêmes, *trouver l'hypothénuse BC.*

La 3^e équation (519) donne $BC = \frac{AB}{\cos. B} - \frac{1}{3} \left(BC^3 - \frac{AB^3}{\cos. B} \right)$.
Donc $e = -\frac{1}{3} \left(\frac{AB^3}{\cos.^3 B} - \frac{AB^3}{\cos. B} \right) = -\frac{AB^3}{3 \cos. B} \left(\frac{1}{\cos.^2 B} - 1 \right)$, ou

$$e = -\frac{AB}{\cos. B} \times \frac{AB^2 \operatorname{tang.}^2 B}{3 R'' R''' }.$$

La limite est la même que (528).

530. *Connoissant deux côtés, AB, AC, dont la somme n'excede pas 4°, trouver un des angles, par exemple B.*

La Trigonométrie sphérique donne $\operatorname{tang.} B = \frac{\operatorname{tang.} AC}{\sin. AB}$; et la rectiligne, $\operatorname{tang.} (B - e) = \frac{AC}{AB}$. Donc $\operatorname{tang.} B - \operatorname{tang.} (B - e) = \frac{AC}{AB} \left(\frac{1 + \frac{1}{3} AC^2}{1 - \frac{1}{6} AB^2} - 1 \right) = \frac{AC}{AB} \times \frac{2 AC^2 + AB^2}{6 - AB^2} = \frac{e}{\cos.^2 B}$, (II. 24^e).
Négligeant dans le dénominateur le terme AB^2 , qui ne donneroit, dans la division, que des quantités d'ordres supérieurs au troisieme, et mettant $\frac{AB^2}{BC^2}$ au lieu de $\cos.^2 B$, et BC^2 au lieu de $AC^2 + AB^2$, on aura $e = \frac{1}{6} AB \times AC \times \frac{BC^2 + AC^2}{BC^2} = \frac{1}{6} AB \times AC \left(1 + \frac{AC^2}{BC^2} \right)$, ou

$$e = \frac{AB \times AC}{6 R'' R'''} (1 + \sin.^2 B).$$

531. *Connoissant deux côtés, AB, AC, dont la somme n'excede pas 8°, trouver l'hypothénuse BC.*

Nous avons eu (523), $BC^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{3} AB^2 \times AC^2$.
Donc $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - \frac{1}{3} AB^2 \times AC^2}$; et, en développant le second membre par le binôme de Newton et négligeant les

quantités du 5^e ordre, $BC = \sqrt{(AB^2 + AC^2)} - \frac{AB^2 \times AC^2}{6\sqrt{(AB^2 + AC^2)}}$;
et par conséquent

$$e = - \frac{AB^2 \times AC^2}{6R'' R'' \sqrt{(AB^2 + AC^2)}}.$$

Comme ce problème se présente très fréquemment, je donne ici le logarithme constant $8,59300 = \log. \frac{1}{6R'' R''}$.

Pour donner un exemple de l'utilité de notre formule, soient $AB = 4^\circ 1' 13''$, $AC = 3^\circ 55' 17''$; on trouvera, en se servant des logarithmes à sept décimales, $\sqrt{(AB^2 + AC^2)} = 5^\circ 36' 57'', 75$. Donc $\log. - e = 8,59300 + 2\log.AB + 2\log.AC - \log.\sqrt{(AB^2 + AC^2)} = 0,90787$; et par conséquent $e = -8'', 09$, et l'hypothénuse cherchée $BC = 5^\circ 36' 49'', 66$, valeur approchée à moins d'un centieme de seconde. La formule ordinaire, $\cos.BC = \cos.AB \cos.AC$, ne donne pas même les secondes exactement, quand BC est $< 4^\circ$, et l'erreur qu'elle produit est d'autant plus grave que BC est plus au-dessous de 4° .

L'expression $\sqrt{(AB^2 + AC^2)}$ se calcule ordinairement par le moyen d'un angle; on a, par exemple, $\text{tang.} B = \frac{AC}{AB}$, puis BC ou $\sqrt{(AB^2 + AC^2)} = \frac{AB}{\cos. B}$. On observera que, dans cette dernière équation, il faut employer l'angle B tel qu'il a été donné par la précédente, sans faire usage de la correction (530). La méthode (200) peut trouver ici son application.

532. *Connoissant les deux angles*, il faut toujours chercher en premier lieu l'hypothénuse par la formule (437); de-là, avec l'hypothénuse et un angle, on pourra trouver les côtés par les formules (518, 519).

533. Les méthodes que nous venons de donner peuvent aussi résoudre un triangle dont un seul côté seroit petit. Soit P le pôle Fig. 60
arctique, A l'Observatoire royal de Paris, M la ville de Marseille, ou un point de cette ville, qui ait servi de signal dans les opérations; et soit ME un arc de grand cercle perpendiculaire sur AE . Je suppose que par une chaîne de triangles et par les méthodes (341),

on ait déterminé la distance ME de Marseille au méridien de Paris, de 126210 toises, et la distance AE à la perpendiculaire, de 314131 toises. Nous avons dit (416) que ME se nomme aussi *la différence de longitude* et AE *la différence de latitude* entre les deux points A et M, dont il s'agit : dénominations inexactes et impropres, puisque la différence de longitude est réellement l'angle P, et la différence de latitude l'arc AL, en supposant PL = PM. Mais connoissant ME, AE, on en déduit facilement la valeur de P et celle de AL, pourvu qu'on connoisse la distance de l'un des deux lieux au pôle. En effet soit AP = 41° 9' 46"; si on réduit AE en degrés et parties de degrés par la proportion (290), on trouve AE = 5° 30' 4", 5; et par conséquent PE = 46° 39' 50", 5. Dans le triangle PEM rectangle en E, on a (VI. 14°), $\cot. P = \sin. PE \cot. ME$, ou $\tan. P = \frac{\tan. ME}{\sin. PE}$. Donc $P + \frac{1}{3}P^3 = \frac{ME + \frac{1}{3}ME^3}{\sin. PE}$, et $P = \frac{ME}{\sin. PE} (1 + \frac{1}{3}ME^2) - \frac{1}{3}P^3$. En mettant $\frac{ME^3}{\sin.^3 PE}$ au lieu de P^3 , (ce qui suppose qu'on néglige les puissances supérieures à la quatrième), on a $P = \frac{ME}{\sin. PE} (1 + \frac{1}{3}ME^2 \times 1 - \frac{1}{\sin.^3 PE})$, et par conséquent $P = \frac{ME}{\sin. PE} \times (1 - \frac{1}{3}ME^2 \times \cot.^2 PE)$. Voici le calcul de cette formule.

$$\begin{aligned}
 \log. ME &= 126210 \text{ toises} = 5,1010938 \\
 \text{compl. log. (R=3271686 tois.)} &= 3,4852284 \\
 \log. (ME \text{ en parties de R} = 1) &= 8,5863222 \\
 \log. R'' &= 5,3144251 \\
 \text{compl. log. sin. PE} &= 0,1382613 \\
 \log. \frac{ME}{\sin. PE} &= 4,0390086 = \log. 10939'', 78 \\
 \text{compl. log. 3} &= 9,5229 \\
 \log. ME, \text{ comme ci-dessus,} &= 8,5863 \\
 \text{idem} &= 8,5863 \\
 \log. \cot. PE &= 9,9747 \\
 \text{idem} &= 9,9747 \\
 \log. - \frac{ME^2 \cot.^2 PE}{3 \sin. PE} &= 0,6839 = \log. - 4'', 83 \\
 \text{Donc } P &= 10934'', 95 = 3^\circ 2' 14'', 95.
 \end{aligned}$$

Pour

Pour avoir AL ou $PM - PA$, l'équation ordinaire $\cos.PM = \cos.PE \cos.ME$ me paroît la plus commode.

534. Examinons maintenant le cas qui se rencontre très souvent, où l'un des arcs qui forment l'angle droit est un arc de parallèle et par conséquent de petit cercle. Comme, dans les petits triangles, cet arc ne diffère pas sensiblement de sa corde pour la longueur, on a coutume de résoudre le triangle en le considérant sans scrupule comme rectiligne rectangle. Mais la vérité est que l'erreur sur l'angle droit peut être très sensible, et qu'elle peut produire sur les parties cherchées du triangle des altérations qu'il me semble qu'on n'a pas encore observées, et qui cependant sont plus considérables que celles dont nous avons parlé jusqu'à présent. C'est ce que nous allons établir, et c'est la troisième des recherches que nous nous sommes proposées (509).

Dans le petit triangle sphérique BAC , ayant pour l'un de ses côtés un arc ADC de parallèle, soit de 90° l'angle BAD ; soit P le pôle de l'arc de parallèle CDA , et Ca l'arc de grand cercle compris entre les mêmes points. Si on résout le triangle comme rectiligne, c'est dans le fait employer l'arc Ca plutôt que l'arc CDA , puisque le premier est celui qui approche le plus de la ligne droite ou de sa corde (385). Mais l'angle a est d'autant plus au-dessus ou au-dessous de 90° , que la distance au pôle ou l'arc aP est plus au-dessus ou au-dessous de 90° . En effet le triangle isoscele CPa donne (498, 2°), $\cos.a = \tan.\frac{1}{2}aC \cot.aP$. Faisant, comme à notre ordinaire, $e = 90^\circ - a$, on a

$$e = \frac{1}{2}aC \times \cot.aP;$$

formule qui donne l'erreur sur l'angle que l'on considère comme droit.

535. Supposant $AP < 90^\circ$, on aura $a < 90^\circ$; et il est facile de reconnoître que si on résout le triangle BAC comme rectiligne rectangle, il en résultera diverses erreurs, selon la diversité des données.

Par exemple, soient donnés les côtés AB et ADC en parties de grand cercle (392).

Observons d'abord que dans les petits triangles il est rare que la différence de longueur entre ADC et aC puisse mériter attention. En effet $ADC = P \times \sin.AP$, (394), et $\sin.\frac{1}{2}aC = \sin.\frac{1}{2}P \sin.AP$, (498, 1°); égalant les deux valeurs de $\sin.AP$ tirées de ces deux équations, on déduit de la nouvelle équation qui en résulte, cette analogie,

$$P : \sin.\frac{1}{2}P :: ADC : \sin.\frac{1}{2}aC,$$

par le moyen de laquelle on pourra réduire le côté ADC au côté aC . Mais on trouvera leurs différences insensibles dans les cas ordinaires, dans lesquels P n'excede pas $1^{\circ} 30'$.

Prenant donc indifféremment aC au lieu de ADC, soit BaC (fig. 62) le même triangle que celui de la fig. 61 formé par trois arcs de grand cercle, et soit désigné par a l'angle BaC. Puisque a est $< 90^{\circ}$, qu'on élève du point a l'arc perpendiculaire $aM = aB$, et qu'on mene l'arc CM. Le triangle CaM est celui qu'on résoudra effectivement, si avec les données aC , aB , on résout BaC comme rectangle. Par conséquent on trouvera l'hypothénuse $CM > CB$, l'angle $MCa < BCa$, et CMa différera aussi de CBa . Les erreurs ne seroient plus les mêmes si les données étoient, par exemple, Ba, BC, puisqu'en abaissant l'arc perpendiculaire BN, sensiblement égal à Ba, le triangle qu'on résoudroit en pareil cas seroit BCN.

536. Pour remédier facilement à toutes les erreurs de cette espece, j'observe d'abord que l'on peut sans scrupule supposer $NBa = BaM = 90^{\circ} - a = e$. Cela posé, par le moyen de la formule (534), je forme la table suivante des valeurs de e en minutes et ~~décimales de minutes~~ ^{de minutes}, en supposant $aC = 1'$, et faisant d'abord la distance au pôle ou $AP = 10^{\circ}$, à cause de la variation trop irrégulière des valeurs de e pour de plus petites distances au pôle. Dans le cas de ces moindres distances, il faudroit calculer exprès la formule $e = \frac{1}{2}aC \times \cot.aP$, (534).

DIST. au PÔLE.	VALEURS de <i>e</i> .	DIST. au PÔLE.	VALEURS de <i>e</i> .	DIST. au PÔLE.	VALEURS de <i>e</i> .	DIST. au PÔLE.	VALEURS de <i>e</i> .
10°	2', 836	30°	0', 866	50°	0', 420	70°	0', 182
11	2, 572	31	0, 832	51	0, 405	71	0, 172
12	2, 352	32	0, 800	52	0, 391	72	0, 162
13	2, 166	33	0, 770	53	0, 377	73	0, 153
14	2, 005	34	0, 741	54	0, 363	74	0, 143
15	1, 866	35	0, 714	55	0, 350	75	0, 134
16	1, 744	36	0, 688	56	0, 337	76	0, 125
17	1, 635	37	0, 664	57	0, 325	77	0, 115
18	1, 539	38	0, 640	58	0, 312	78	0, 106
19	1, 452	39	0, 617	59	0, 300	79	0, 097
20	1, 374	40	0, 596	60	0, 289	80	0, 088
21	1, 303	41	0, 575	61	0, 277	81	0, 079
22	1, 238	42	0, 555	62	0, 266	82	0, 070
23	1, 178	43	0, 536	63	0, 255	83	0, 061
24	1, 123	44	0, 518	64	0, 244	84	0, 053
25	1, 072	45	0, 500	65	0, 233	85	0, 044
26	1, 025	46	0, 483	66	0, 223	86	0, 035
27	0, 981	47	0, 466	67	0, 212	87	0, 026
28	0, 940	48	0, 450	68	0, 202	88	0, 017
29	0, 902	49	0, 435	69	0, 192	89	0, 009
30	0, 866	50	0, 420	70	0, 182	90	0, 000

Pour donner un exemple de l'usage de cette table, je suppose qu'étant donné un arc de parallèle de 60', tel que ADC, situé à 30° de distance du pôle P, on demande de quelle quantité l'angle PAD de 90° excède l'angle a formé par le même arc PA ou Pa avec l'arc de grand cercle aC , correspondant à l'arc ADC. L'équation de la table, à 30° de distance du pôle, est 0', 866; multipliez cette valeur par 60, vous aurez $e = 51', 96 = 51' 57'', 6$. C'est à-peu-près la valeur de NBa , dans le cas proposé. Pour con-

Fig. 62

537. Connoissant l'angle NBa , on a immédiatement les autres

Qq ij

différences des parties du triangle proposé $C\overset{\text{aux parties}}{B}a$ du triangle réellement rectangle CBN . En effet 1°. $NBa = N - a = 90^\circ - a$; 2°. $BN = Ba \times \cos.NBa$; la différence de BN à Ba , qui sera donnée par cette équation, sera le plus souvent insensible. 3°. $Na = Ba \sin.NBa$; cette réduction est celle qui mérite attention. Supposons $Ba = 1'$, $NBa = 1'$; on a $Na = 0'', 01745$, et $\log. 0'', 01745 = 8, 242$. Donc en général on aura, quelles que soient les valeurs de Ba et de NBa , prises en minutes,

$$Na = 0'', 01745 \times Ba \times NBa.$$

Soit par exemple $Ba = 60'$, $NBa = 20'$; alors $Na = 0'', 01745 \times 60 \times 20 = 20'', 94$.

Si l'on fait aussi $Ca = 60'$, et qu'on résolve le triangle CBa comme rectiligne rectangle, on trouvera, en négligeant la petite correction (531), $1^\circ 24' 51''$, 17 pour la valeur de l'hypothénuse; mais cette valeur est celle de CM , et non celle de BC . Si, au contraire, dans ce calcul, au lieu de Ca on emploie $CN = 59' 39'', 06$, on trouve en effet la valeur de $BC = 1^\circ 24' 36''$, 38. D'où l'on voit qu'en résolvant le triangle CBa comme rectangle, l'erreur sur l'hypothénuse est de $14''$, 79, et que cette erreur seroit d'autant plus grande, que CDA seroit plus près de son pôle. Dans le cas présent $AP = 56^\circ 18'$. Mes corrections peuvent donc être importantes pour l'Astronomie, lorsque l'arc de parallèle est un almicantar.

Fig. 61

Fig. 62

538. Dans le cas où l'un des côtés de l'angle droit sera un arc de parallèle, on pourra donc éviter toute erreur, en résolvant le triangle BCN au lieu de BCa . Si l'arc de parallèle est connu, il faut le diminuer de la quantité Na (537) avant de résoudre le triangle BCN . De même si l'angle CBa étoit donné, il faudroit, avant de l'employer, le diminuer de la quantité NBa , (536). Au contraire si aC ou CBa sont les choses cherchées, il faudra, après les avoir trouvées, leur appliquer les mêmes corrections, mais en sens opposé, parceque la résolution du triangle BCN donne CN

et CBN au lieu de Ca et CBa. Au surplus si l'on veut une très grande exactitude, on pourra résoudre le triangle BCN par les méthodes et les formules (518 à 532).

Il reste seulement à observer que quand AP est $> 90^\circ$, et que l'angle CBa opposé à l'arc de parallèle se trouve situé entre cet arc et le pôle, alors la perpendiculaire BN tombe en dehors du triangle CBa, et par conséquent toutes les corrections précédentes doivent se faire en sens contraire de ce que nous avons prescrit pour le cas où AP est $< 90^\circ$. Fig. 61 et 62.

539. Il arrive très souvent, sur-tout dans l'Astronomie, que deux triangles ont l'hypothénuse commune, et un arc de parallèle pour l'un des côtés de l'angle droit dans chacun d'eux. Connoissant deux côtés, par exemple AB, AC de l'un de ces triangles, et la différence, par exemple ACD, de deux de leurs angles ayant le sommet commun; pour avoir la valeur des côtés BD, CD de l'autre triangle, on résout ordinairement ces triangles comme rectilignes rectangles, et on fait $ACD = ABD$. Mais ces angles sont d'autant plus inégaux, que la correction ACF de l'angle A (536) diffère davantage de la correction DCM de l'angle D. Pour éviter toute erreur, il faut employer dans le calcul BF au lieu de BA, et MCF au lieu de ACD. Or $MCF = BCM - BCF = BCD - DCM - (BCA - ACF) = ACD + ACF - DCM$: l'angle donné ACD doit donc être augmenté (diminué si $DCM > ACF$) de la différence des deux corrections ACF, DCM. Alors on aura $MCF = ABD$ sensiblement; et en employant MCF dans le calcul, on pourra faire usage des formules (270, 271) pour trouver CM, BM. Ces lignes se réduiront ensuite à CD, BD, (537). Un exemple (749) fera voir combien ces opérations sont faciles. Fig. 63



CHAPITRE XIX.

Des Analogies différentielles des Triangles sphériques.

540. JE donnerai les analogies différentielles des triangles sphériques sous trois formes : la première, rigoureuse et que je crois nouvelle, pour les différences finies, de quelque grandeur qu'elles soient, rapportées aux parties d'un triangle ABC; la seconde pour les différences infiniment petites, comme on les donne ordinairement, mais en augmentant de beaucoup le nombre des analogies publiées jusqu'à présent, et en appliquant le signe négatif à l'une des deux variations que l'on considère, quand elle se fait dans un sens opposé relativement à l'autre; la troisième, pour les mêmes analogies infinitésimales, mais exprimées avec les dénominations des parties du triangle, et sans égard aux signes, qu'on pourra prendre dans les analogies de la forme précédente. De chacune des proportions fondamentales, je déduirai par des substitutions autant d'autres analogies qu'on peut en obtenir sans introduire dans le second rapport plus de trois parties du triangle, ou plus de deux quand le triangle est rectangle. Ces substitutions peuvent rarement avoir lieu dans les analogies finies ou de la première forme. Je supprimerai aussi les analogies de la troisième forme, quand elles seront compliquées, et longues et difficiles à énoncer. Je donne toutes les analogies sans interruption, me réservant de les démontrer ensuite. De cette manière elles forment une table, à laquelle on pourra recourir aisément.

TABLE DES ANALOGIES DIFFÉRENTIELLES DES TRIANGLES SPHÉRIQUES.

Quantités constantes AB, A; ou un côté et un angle adjacent.

RAPPORTS DES VARIATIONS

DU CÔTÉ ADJACENT A L'ANGLE CONSTANT,
ET DE L'ANGLE ADJACENT AU CÔTÉ CONSTANT.

$$541. \sin. \delta AC : \sin. \delta B :: \sin. (BC + \delta BC) : \sin. C :: \sin. BC : \sin. (C - \delta C). \\ \delta AC : \delta B :: \sin. BC : \sin. C.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant
Est à la variation de l'angle adjacent au côté constant,
Comme le sinus du côté opposé à l'angle constant
Est au sinus de l'angle opposé au côté constant.

$$542. \sin. \delta AC : \sin. \delta B :: \sin. BC \sin. (BC + \delta BC) : \sin. AB \sin. A, (VII. 6'). \\ \delta AC : \delta B :: \sin.^2 BC : \sin. AB \sin. A.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant
Est à la variation de l'angle adjacent au côté constant,
Comme le carré du sinus du côté opposé à l'angle constant
Est au produit du sinus du côté constant par le sinus de l'angle constant.

$$543. \sin. \delta AC : \sin. \delta B :: \sin. AB \sin. A : \sin. C \sin. (C - \delta C), (VII. 19'), (541). \\ \delta AC : \delta B :: \sin. AB \sin. A : \sin.^2 C.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant
Est à la variation de l'angle adjacent au côté constant,
Comme le produit du sinus du côté constant par le sinus de l'angle constant
Est au carré du sinus de l'angle opposé au côté constant.

Si $A = 90^\circ$, ou si $AB = 90^\circ$;

$$544. \sin. \delta AC : \sin. \delta B :: \sin. AC \cos. (AC + \delta AC) : \sin. B \cos. (B + \delta B).$$

$$\delta AC : \delta B :: \sin. 2AC : \sin. 2B.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant
Est à la variation de l'angle adjacent au côté constant,
Comme le sinus du double du côté variable
Est au sinus du double de l'angle opposé.

RAPPORTS DES VARIATIONS

DU CÔTÉ ADJACENT A L'ANGLE CONSTANT,
ET DE L'ANGLE OPPOSÉ AU CÔTÉ CONSTANT.

$$545. \text{tang. } \frac{1}{2} \delta AC : - \sin. \frac{1}{2} \delta C :: \text{tang. } (BC + \frac{1}{2} \delta BC) : \sin. (C - \frac{1}{2} \delta C).$$

$$\delta AC : - \delta C :: \text{tang. } BC : \sin. C.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant
Est à la variation de l'angle opposé au côté constant,
Comme la tangente du côté opposé à l'angle constant
Est au sinus de l'angle opposé au côté constant.

$$546. * \sin. \frac{1}{2} \delta AC : - \frac{1}{2} \sin. \delta C :: 1 : \sin. (C - \delta C) \times \frac{\cos. \frac{1}{2} \delta AC \sin. C \cot. A + \cos. C \cos. (AC + \frac{1}{2} \delta AC)}{\sin. AC}$$

$$\delta AC : - \delta C :: \sin. AC : \sin. {}^2 C \cot. A + \sin. C \cos. C \cos. AC.$$

$$547. \delta AC : - \delta C :: \sin. BC \text{ tang. } BC : \sin. AB \sin. A, (\text{VII. } 6^\circ), (545).$$

Si $A = 90^\circ$;

$$548. \sin. \frac{1}{2} \delta AC : - \frac{1}{2} \sin. \delta C :: \frac{\sin. AC}{\cos. (AC + \frac{1}{2} \delta AC)} : \sin. (C - \delta C) \cos. C, (546);$$

$$\delta AC : - \delta C :: 2 \text{ tang. } AC : \sin. 2C.$$

La variation du côté
Est à la variation de l'angle opposé au côté constant,
Comme le double de la tangente du côté variable
Est au sinus du double du même angle.

Si $AB = 90^\circ$;

$$549. \sin. \frac{1}{2} \delta AC : \frac{1}{2} \sin. \delta C :: \frac{\cos. AC}{\sin. (AC + \frac{1}{2} \delta AC)} : \sin. (C + \delta C) \cos. C.$$

$$\delta AC : \delta C :: 2 \cot. AC : \sin. 2 C.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant

Est à la variation de l'angle opposé au côté constant

Comme le double de la cotangente du premier de ces côtés

Est au sinus du double du second de ces angles.

RAPPORTS DES VARIATIONS

DU CÔTÉ ADJACENT A L'ANGLE CONSTANT,

ET DU CÔTÉ OPPOSÉ A L'ANGLE CONSTANT.

$$550. \tan. \frac{1}{2} \delta AC : \tan. \frac{1}{2} \delta BC :: \cos. \frac{1}{2} \delta C : \cos. (C - \frac{1}{2} \delta C).$$

$$\delta AC : \delta BC :: 1 : \cos. C.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant

Est à la variation du côté opposé,

Comme le rayon est au cosinus de l'angle opposé au côté constant.

$$551. * \sin. \frac{1}{2} \delta AC : \sin. \frac{1}{2} \delta BC :: 1 : \frac{\cos. \frac{1}{2} \delta AC \cos. AB - \cos. BC \cos. (AC + \frac{1}{2} \delta AC)}{\sin. AC \sin. (BC + \frac{1}{2} \delta BC)}.$$

$$\delta AC : \delta BC :: \sin. BC \sin. AC : \cos. AB - \cos. BC \cos. AC.$$

$$552. \delta AC : \delta BC :: 1 : \cos. AB \sin. A \sin. B - \cos. A \cos. B, (VII. 12^\circ), (550).$$

Si $A = 90^\circ$;

$$553. \sin. \frac{1}{2} \delta AC : \sin. \frac{1}{2} \delta BC :: \frac{\cos. AC}{\sin. (AC + \frac{1}{2} \delta AC)} : \frac{\cos. BC}{\sin. (BC + \frac{1}{2} \delta BC)}.$$

$$\delta AC : \delta BC :: \cot. AC : \cot. BC.$$

Les variations de l'hypothénuse et du côté

Sont proportionnelles à leurs cotangentes.

Si $AB = 90^\circ$;

$$554. \sin. \frac{1}{2} \delta AC : - \sin. \frac{1}{2} \delta BC :: \frac{\sin. AC}{\cos. (AC + \frac{1}{2} \delta AC)} : \frac{\cos. BC}{\sin. (BC - \frac{1}{2} \delta BC)}.$$

$$\delta AC : - \delta BC :: \tan. AC : \cot. BC.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant

Est à la variation du côté opposé,

Comme le produit de leurs tangentes est au rayon.

RAPPORTS DES VARIATIONS

DU CÔTÉ OPPOSÉ A L'ANGLE CONSTANT,

ET DE L'ANGLE ADJACENT AU CÔTÉ CONSTANT.

$$555. \sin. \frac{1}{2} \delta BC : \text{tang.} \frac{1}{2} \delta B :: \sin. (BC + \frac{1}{2} \delta BC) : \text{tang.} (C - \frac{1}{2} \delta C).$$

$$\delta BC : \delta B :: \sin. BC : \text{tang.} C.$$

La variation du côté opposé à l'angle constant

Est à la variation de l'angle adjacent au côté constant,

Comme le sinus du côté opposé à l'angle constant

Est à la tangente de l'angle opposé au côté constant.

$$556. * \frac{1}{2} \sin. \delta BC : \sin. \frac{1}{2} \delta B :: \frac{\cos. \frac{1}{2} \delta B \sin. BC \cot. AB - \cos. BC \cos. (B + \frac{1}{2} \delta B)}{\sin. B} \cdot \frac{1}{\sin. (BC + \delta BC)}.$$

$$\delta BC : \delta B :: \sin. {}^2 BC \cot. AB - \sin. BC \cos. BC \cos. B : \sin. B.$$

$$557. \delta BC : \delta B :: \sin. AB \sin. A : \sin. C \text{ tang.} C, (\text{VII. } 19^\circ), (555).$$

Si $A = 90^\circ$;

$$558. \frac{1}{2} \sin. \delta BC : \sin. \frac{1}{2} \delta B :: \sin. (BC + \delta BC) \cos. BC : \frac{\cos. B}{\sin. (B + \frac{1}{2} \delta B)}.$$

$$\delta BC : \delta B :: \sin. 2 BC : 2 \cot. B.$$

La variation de l'hypothénuse

Est à celle de l'angle adjacent au côté constant,

Comme le sinus du double de l'hypothénuse

Est au double de la cotangente du même angle.

Si $AB = 90^\circ$;

$$559. - \frac{1}{2} \sin. \delta BC : \sin. \frac{1}{2} \delta B :: \sin. (BC - \delta BC) \cos. BC : \frac{\sin. B}{\cos. (B + \frac{1}{2} \delta B)}.$$

$$- \delta BC : \delta B :: \sin. 2 BC : 2 \text{ tang.} B.$$

La variation du côté opposé à l'angle constant

Est à celle de l'angle adjacent au côté constant,

Comme le sinus du double du premier de ces côtés

Est au double de la tangente du second de ces angles.

RAPPORTS DES VARIATIONS

DU CÔTÉ OPPOSÉ A L'ANGLE CONSTANT,

ET DE L'ANGLE OPPOSÉ AU CÔTÉ CONSTANT.

$$560. * \text{tang. } \frac{1}{2} \delta BC : - \text{tang. } \frac{1}{2} \delta C :: \text{tang.} (BC + \frac{1}{2} \delta BC) : \text{tang.} (C - \frac{1}{2} \delta C). \\ \delta BC : - \delta C :: \text{tang.} BC : \text{tang.} C.$$

La variation du côté opposé à l'angle constant

Et la variation de l'angle opposé au côté constant

Sont proportionnelles à leurs tangentes.

$$561. \delta BC : - \delta C :: \sin. AC : (\cos. AC + \text{tang.} C \cot. A) \sin. C, (\text{VII. } 32^\circ).$$

$$562. \delta BC : - \delta C :: (\text{tang.} BC \cot. AB - \cos. B) \sin. BC : \sin. B, (\text{VII. } 18^\circ), (560).$$

Si $A = 90^\circ$;

$$563. \delta BC : - \delta C :: \sin. BC : \cot. B, (430, 3^\circ), (560).$$

La variation de l'hypothénuse

Est à la variation de l'angle opposé au côté constant,

Comme le sinus de l'hypothénuse

Est à la cotangente de l'autre angle.

Si $AB = 90^\circ$;

$$564. \delta BC : \delta C :: \sin. BC : \text{tang.} B, (562).$$

La variation du côté opposé à l'angle constant

Est à la variation de l'angle opposé au côté constant,

Comme le sinus du côté opposé à l'angle constant

Est à la tangente de l'angle variable adjacent au côté constant.

RAPPORTS DES VARIATIONS

DES DEUX ANGLES.

$$565. \text{tang. } \frac{1}{2} \delta B : - \text{tang. } \frac{1}{2} \delta C :: \cos. \frac{1}{2} \delta BC : \cos. (BC + \frac{1}{2} \delta BC).$$

$$\delta B : - \delta C :: 1 : \cos. BC.$$

La variation de l'angle adjacent au côté constant

Est à la variation de l'angle opposé,

Comme le rayon est au cosinus du côté opposé à l'angle constant.

.R r ij

$$566. * \sin. \frac{1}{2} \delta B : - \sin. \frac{1}{2} \delta C :: 1 : \frac{\cos. \frac{1}{2} \delta B \cos. A + \cos. C \cos. (B + \frac{1}{2} \delta B)}{\sin. B \sin. (C - \frac{1}{2} \delta C)}.$$

$$\delta B : - \delta C :: \sin. B \sin. C : \cos. A + \cos. B \cos. C.$$

$$567. \delta B : - \delta C :: 1 : \cos. A \sin. AB \sin. AC + \cos. AB \cos. AC, (VII, 26^{\circ}), (565).$$

Si $A = 90^{\circ}$;

$$568. \sin. \frac{1}{2} \delta B : - \sin. \frac{1}{2} \delta C :: \frac{\sin. B}{\cos. (B + \frac{1}{2} \delta B)} : \frac{\cos. C}{\sin. (C - \frac{1}{2} \delta C)}, (566).$$

$$\delta B : - \delta C :: \text{tang. } B : \text{cot. } C.$$

La variation de l'angle adjacent au côté constant

Est à la variation de l'angle opposé,

Comme le produit de leurs tangentes est au rayon.

Si $AB = 90^{\circ}$;

$$569. \sin. \frac{1}{2} \delta B : \sin. \frac{1}{2} \delta C :: \frac{\cos. B}{\sin. (B + \frac{1}{2} \delta B)} : \frac{\cos. C}{\sin. (C + \frac{1}{2} \delta C)}.$$

$$\delta B : \delta C :: \text{cot. } B : \text{cot. } C.$$

Les variations des angles

Sont proportionnelles à leurs cotangentes.

Quantités constantes BC, A ; ou un côté et l'angle opposé.

RAPPORTS DES VARIATIONS

DES DEUX CÔTÉS.

$$570. \text{tang. } \frac{1}{2} \delta AB : - \text{tang. } \frac{1}{2} \delta AC :: \frac{\cos. (C + \frac{1}{2} \delta C)}{\cos. \frac{1}{2} \delta C} : \frac{\cos. (B - \frac{1}{2} \delta B)}{\cos. \frac{1}{2} \delta B}.$$

$$\delta AB : - \delta AC :: \cos. C : \cos. B.$$

Les variations des côtés

Sont proportionnelles aux cosinus des angles opposés.

$$571. \delta AB : - \delta AC :: \cos. AB \sin. A \text{ tang. } B - \cos. A : 1, (VII. 12^{\circ}).$$

$$572. \delta AB : - \delta AC :: 1 : \cos. AC \sin. A \text{ tang. } C - \cos. A, (VII. 10^{\circ}), (570).$$

$$573. * \delta AB : - \delta AC :: \frac{\sin. AB}{\sin. AC} : \frac{\cos. AC - \cos. BC \cos. AB}{\cos. AB - \cos. BC \cos. AC}, (VII. 11^{\circ}, 9^{\circ}), (570).$$

$$574. * \delta AB : - \delta AC :: 1 : \frac{1 - \text{tang. } AC \text{ cot. } AB \cos. A}{\text{tang. } AC \text{ cot. } AB - \cos. A}, (VII. 26^{\circ}).$$

Si $A = 90^\circ$;

$$575. \frac{\sin. \frac{1}{2} \delta AB}{-\sin. \frac{1}{2} \delta AC} : 1 :: \frac{\cos. (AB + \delta AB)}{\sin. (AB + \frac{1}{2} \delta AB)} \cdot \frac{\cos. AC}{\sin. (AC - \frac{1}{2} \delta AC)} : \frac{\cos. AB}{\sin. (AB + \frac{1}{2} \delta AB)} \cdot \frac{\cos. (AC - \delta AC)}{\sin. (AC - \frac{1}{2} \delta AC)}$$

$$\delta AB : -\delta AC :: \cot. AB : \cot. AC.$$

Les variations des côtés

Sont proportionnelles à leurs cotangentes.

Si $BC = 90^\circ$;

$$576. \sin. \delta AB : -\sin. \delta AC :: \sin. AB \cos. (AB + \delta AB) : \sin. (AC - \delta AC) \cos. AC.$$

$$\delta AB : -\delta AC :: \sin. 2 AB : \sin. 2 AC, (I. 6^\circ).$$

Les variations des côtés

Sont proportionnelles aux sinus des côtés doubles.

$$577. \sin. \delta AB : -\sin. \delta AC :: \cos. (C + \delta C) : \cos. B : \cos. C : \cos. (B - \delta B).$$

$$\delta AB : -\delta AC :: \cos. C : \cos. B.$$

$$578. \delta AB : \delta AC :: \cos. A : \cos.^2 B :: \cos.^2 C : \cos. A.$$

La variation d'un côté

Est à la variation de l'autre côté,

Comme le carré du cosinus de l'angle opposé au premier côté

Est au cosinus de l'angle constant.

RAPPORTS DES VARIATIONS

DES DEUX ANGLES.

$$579. \tan. \frac{1}{2} \delta C : -\tan. \frac{1}{2} \delta B :: \frac{\cos. (AB + \frac{1}{2} \delta AB)}{\cos. \frac{1}{2} \delta AB} : \frac{\cos. (AC - \frac{1}{2} \delta AC)}{\cos. \frac{1}{2} \delta AC}.$$

$$\delta C : -\delta B :: \cos. AB : \cos. AC.$$

Les variations des angles

Sont proportionnelles aux cosinus des côtés opposés,

$$580. \delta C : -\delta B :: \cos. C \sin. BC \tan. AC + \cos. BC : 1, (VII. 30^\circ).$$

$$581. \delta C : -\delta B :: 1 : \cos. B \sin. BC \tan. AB + \cos. BC, (VII. 28^\circ), (579).$$

$$582. * \delta C : -\delta B :: \frac{\sin. C}{\sin. B} : \frac{\cos. B + \cos. A \cos. C}{\cos. C + \cos. A \cos. B}, (VII. 29^\circ, 27^\circ), (579).$$

$$583. * \delta C : -\delta B :: \tan. B \cot. C + \cos. BC : 1 + \tan. B \cot. C \cos. BC, (VII. 8^\circ).$$

Si $A = 90^\circ$;

$$584. \sin. \delta C : - \sin. \delta B :: \sin. C \cos. (C + \delta C) : \sin. (B - \delta B) \cos. B.$$

$$\delta C : - \delta B :: \sin. 2C : \sin. 2B.$$

Les variations des angles

Sont proportionnelles aux sinus des angles doubles.

$$585. \sin. \delta C : - \sin. \delta B :: \cos. (AB + \delta AB) : \cos. AC :: \cos. AB : \cos. (AC - \delta AC)$$

$$\delta C : - \delta B :: \cos. AB : \cos. AC.$$

$$586. \delta C : - \delta B :: \cos. BC : \cos.^2 AC :: \cos.^2 AB : \cos. BC, (430; 10^\circ, 7^\circ).$$

La variation d'un angle

Est à la variation de l'autre angle,

Comme le carré du cosinus du côté opposé au premier angle

Est au cosinus de l'hypothénuse.

Si $BC = 90^\circ$;

$$587. \sin. \frac{1}{2} \delta C : - \sin. \frac{1}{2} \delta B :: \frac{\cos. (C + \delta C)}{\sin. (C + \frac{1}{2} \delta C)} \cdot \frac{\cos. B}{\sin. (B - \frac{1}{2} \delta B)} :: \frac{\cos. C}{\sin. (C + \frac{1}{2} \delta C)} \cdot \frac{\cos. (B - \delta B)}{\sin. (B - \frac{1}{2} \delta B)}$$

$$\delta C : - \delta B :: \cot. C : \cot. B.$$

Les variations des angles

Sont proportionnelles à leurs cotangentes.

RAPPORTS DES VARIATIONS

D'UN CÔTÉ ET DE L'ANGLE OPPOSÉ.

$$588. * \sin. \frac{1}{2} \delta AB : \sin. \frac{1}{2} \delta C :: \frac{\sin. AB}{\cos. (AB + \frac{1}{2} \delta AB)} : \frac{\sin. C}{\cos. (C + \frac{1}{2} \delta C)}.$$

$$\delta AB : \delta C :: \tan. AB : \tan. C.$$

Les variations d'un côté et de l'angle opposé

Sont proportionnelles à leurs tangentes.

$$589. \delta AB : \delta C :: \sin. AC : \sin. A + \cos. A \cos. AC \tan. C, (VII. 35^\circ).$$

$$590. \delta AB : \delta C :: \sin. BC : \sin. B + \cos. B \cos. BC \tan. C, (VII. 36^\circ), (588).$$

$$591. \delta AB : \delta C :: \sin. AC - \cos. AC \cos. A \tan. AB : \sin. A, (VII. 17^\circ), (588).$$

$$592. \delta AB : \delta C :: \sin. BC - \cos. BC \cos. B \tan. AB : \sin. B, (VII. 18^\circ), (588).$$

De même

$$593.* \quad \sin. \frac{1}{2} \delta AC : - \sin. \frac{1}{2} \delta B :: \frac{\sin. AC}{\cos. (AC - \frac{1}{2} \delta AC)} : \frac{\sin. B}{\cos. (B - \frac{1}{2} \delta B)}.$$

$$- \delta AC : - \delta B :: \text{tang. } AC : \text{tang. } B.$$

$$594. \quad - \delta AC : - \delta B :: \sin. AB : \sin. A + \cos. A \cos. AB \text{ tang. } B.$$

$$595. \quad - \delta AC : - \delta B :: \sin. BC : \sin. C + \cos. C \cos. BC \text{ tang. } B.$$

$$596. \quad - \delta AC : - \delta B :: \sin. AB - \cos. AB \cos. A \text{ tang. } AC : \sin. A.$$

$$597. \quad - \delta AC : - \delta B :: \sin. BC - \cos. BC \cos. C \text{ tang. } AC : \sin. C.$$

RAPPORTS DES VARIATIONS

D'UN CÔTÉ ET DE L'ANGLE ADJACENT.

$$598. \quad \text{tang. } \frac{1}{2} \delta AB : - \frac{1}{2} \sin. \delta B :: \frac{\sin. AC}{\cos. \frac{1}{2} \delta AC \cos. (AC - \frac{1}{2} \delta AC)} \times \frac{\cos. (C + \frac{1}{2} \delta C)}{\cos. \frac{1}{2} \delta C} : \sin. B.$$

$$\delta AB : - \delta B :: \text{tang. } AC \cos. C : \sin. B.$$

La variation d'un côté

Est à la variation de l'angle adjacent,

Comme le produit de la tang. de l'autre côté variab. par le cos. de l'autre ang. var.

Est au sinus du premier de ces angles.

$$599. \quad \text{tang. } \frac{1}{2} \delta AB : - \frac{1}{2} \sin. \delta B :: \sin. AB : \frac{\cos. \frac{1}{2} \delta AC \cos. (AC - \frac{1}{2} \delta AC) \sin. C \cos. \frac{1}{2} \delta C}{\cos. (C + \frac{1}{2} \delta C)}.$$

$$\delta AB : - \delta B :: \sin. AB : \cos. AC \text{ tang. } C.$$

La variation d'un côté

Est à la variation de l'angle adjacent,

Comme le sinus du même côté

Est au produit du cos. de l'autre côté variable par la tang. de l'autre ang. variable.

$$600. \quad \delta AB : - \delta B :: \cos. AB \text{ tang. } AC - \sin. AB \cos. A : \sin. A, \text{ (VII. } 17^\circ).$$

$$601. \quad \delta AB : - \delta B :: \sin. BC : \cos. B \text{ tang. } C + \sin. B \cos. BC, \text{ (VII. } 33^\circ), (598).$$

$$602.* \quad \delta AB : - \delta B :: \frac{\text{tang. } BC - \cos. B \text{ tang. } AB}{\sin. B} : 1 + \cos. B \text{ tang. } AB \text{ tang. } BC, \text{ (VII. } 18^\circ).$$

$$603.* \quad \delta AB : - \delta B :: \sin. AB : \frac{\text{tang. } B \cos. AB + \text{tang. } A}{\text{tang. } A \text{ tang. } B \cos. AB - 1}, \text{ (VII. } 31^\circ).$$

De même

$$604. - \text{tang. } \frac{1}{2} \delta AC : \frac{1}{2} \sin. \delta C :: \frac{\sin. AB}{\cos. \frac{1}{2} \delta AB \cos. (AB + \frac{1}{2} \delta AB)} \times \frac{\cos. (B - \frac{1}{2} \delta B)}{\cos. \frac{1}{2} \delta B} : \sin. C.$$

$$- \delta AC : \delta C :: \text{tang. } AB \cos. B : \sin. C.$$

$$605. - \text{tang. } \frac{1}{2} \delta AC : \frac{1}{2} \sin. \delta C :: \sin. AC : \frac{\cos. \frac{1}{2} \delta AB \cos. (AB + \frac{1}{2} \delta AB) \sin. B \cos. \frac{1}{2} \delta B}{\cos. (B - \frac{1}{2} \delta B)}$$

$$- \delta AC : \delta C :: \sin. AC : \cos. AB \text{ tang. } B$$

$$606. - \delta AC : \delta C :: \cos. AC \text{ tang. } AB - \sin. AC \cos. A : \sin. A.$$

$$607. - \delta AC : \delta C :: \sin. BC : \cos. C \text{ tang. } B + \sin. C \cos. BC.$$

$$608. * - \delta AC : \delta C :: \text{tang. } BC - \cos. C \text{ tang. } AC : (1 + \cos. C \text{ tang. } AC \text{ tang. } BC) \sin. C.$$

$$609. * - \delta AC : \delta C :: (\text{tang. } A \text{ tang. } C \cos. AC - 1) \sin. AC : \text{tang. } C \cos. AC + \text{tang. } A.$$

Si $A = 90^\circ$;

$$610. \frac{1}{2} \sin. \delta AB : - \sin. \frac{1}{2} \delta B :: \sin. AB \cos. (AB + \delta AB) : \frac{\cos. B}{\sin. (B - \frac{1}{2} \delta B)}.$$

$$\delta AB : - \delta B :: \sin. 2 AB : 2 \cot. B.$$

La variation d'un côté

Est à la variation de l'angle adjacent,

Comme le sinus du double de ce côté

Est au double de la cotangente du même angle.

De même

$$611. - \frac{1}{2} \sin. \delta AC : \sin. \frac{1}{2} \delta C :: \sin. AC \cos. (AC - \delta AC) : \frac{\cos. C}{\sin. (C + \frac{1}{2} \delta C)}.$$

$$- \delta AC : \delta C :: \sin. 2 AC : 2 \cot. C.$$

Si $BC = 90^\circ$;

$$612. \sin. \frac{1}{2} \delta AB : - \frac{1}{2} \sin. \delta B :: \frac{\cos. AB}{\sin. (AB + \frac{1}{2} \delta AB)} : \sin. B \cos. (B - \delta B).$$

$$\delta AB : - \delta B :: 2 \cot. AB : \sin. 2 B.$$

La variation d'un côté

Est à celle de l'angle adjacent,

Comme le double de la cotangente du même côté

Est au sinus du double du même angle.

De même

$$613. \text{ — } \sin. \frac{1}{2} \delta AC : \frac{1}{2} \sin. \delta C :: \frac{\cos. AC}{\sin. (AC - \frac{1}{2} \delta AC)} : \sin. C \cos. (C + \delta C). \\ \text{ — } \delta AC : \delta C :: 2 \cot. AC : \sin. 2 C.$$

Quantités constantes AB, AC; ou deux côtés.

RAPPORTS DES VARIATIONS

DES DEUX ANGLES OPPOSÉS AUX CÔTÉS CONSTANTS.

$$614. \star \text{ tang. } \frac{1}{2} \delta B : \text{ tang. } \frac{1}{2} \delta C :: \text{ tang. } (B + \frac{1}{2} \delta B) : \text{ tang. } (C + \frac{1}{2} \delta C). \\ \delta B : \delta C :: \text{ tang. } B : \text{ tang. } C.$$

Les variations des angles opposés aux côtés constants

Sont proportionnelles aux tangentes de ces mêmes angles.

$$615. \delta B : \delta C :: \cos. C : \sin. BC \cot. AC - \cos. BC \cos. C, \text{ (VII. } 15^{\circ}).$$

$$616. \delta B : \delta C :: \cos. AB - \cos. BC \cos. AC : \cos. AC - \cos. BC \cos. AB, \text{ (VII. } 11^{\circ}).$$

$$617. \delta B : \delta C :: \sin. BC \cot. AB - \cos. BC \cos. B : \cos. B, \text{ (VII. } 18^{\circ}), \text{ (614).}$$

$$618. \delta B : \delta C :: 1 : \frac{\sin. AB \cot. AC - \cos. AB \cos. A}{\sin. AC \cot. AB - \cos. AC \cos. A}, \text{ (VII. } 16^{\circ}, 17^{\circ}), \text{ (614).}$$

RAPPORTS DES VARIATIONS

DU TROISIEME CÔTÉ ET D'UN ANGLE ADJACENT.

$$619. \text{ — } \sin. \frac{1}{2} \delta BC : \text{ tang. } \frac{1}{2} \delta B :: \sin. (BC - \frac{1}{2} \delta BC) : \cot. (C + \frac{1}{2} \delta C). \\ \text{ — } \delta BC : \delta B :: \sin. BC : \cot. C.$$

La variation du troisieme côté

Est à la variation d'un angle adjacent,

Comme le sinus du même côté

Est à la cotangente de l'autre angle adjacent.

$$620. \star \text{ — } \sin. \frac{1}{2} \delta BC : \sin. \frac{1}{2} \delta B :: \sin. (B + \frac{1}{2} \delta B) : \frac{\cot. AB \sin. (BC - \frac{1}{2} \delta BC) - \cos. B \cos. (BC - \frac{1}{2} \delta BC)}{\sin. (BC - \delta BC)} \\ \text{ — } \delta BC : \delta B :: \sin. B : \cot. AB - \cot. BC \cos. B.$$

S s

$$621. — \delta BC : \delta B :: \sin.AB \sin.A : \cos.C, \text{ (VII. 19°), (619).}$$

$$622. — \delta BC : \delta B :: \sin.AB : \cos.AB \sin.B — \cot.A \cos.B, \text{ (VII. 12°).}$$

De même

$$623. — \sin.\frac{1}{2}\delta BC : \tan.\frac{1}{2}\delta C :: \sin.(BC — \frac{1}{2}\delta BC) : \cot.(B + \frac{1}{2}\delta B). \\ — \delta BC : \delta C :: \sin.BC : \cot.B.$$

$$624. * — \sin.\frac{1}{2}\delta BC : \sin.\frac{1}{2}\delta C :: \sin.(C + \frac{1}{2}\delta C) : \frac{\cot.AC \sin.(BC — \frac{1}{2}\delta BC) — \cos.C \cos.(BC — \frac{1}{2}\delta BC)}{\sin.(BC — \delta BC)} \\ — \delta BC : \delta C :: \sin.C : \cot.AC — \cot.BC \cos.C.$$

$$625. — \delta BC : \delta C :: \sin.AC \sin.A : \cos.B.$$

$$626. — \delta BC : \delta C :: \sin.AC : \cos.AC \sin.C — \cot.A \cos.C.$$

Si $AC = 90^\circ$;

$$627. \frac{1}{2} \sin.\delta BC : \sin.\frac{1}{2}\delta B :: \sin.(BC + \delta BC) \cos.BC : \frac{\cos.B}{\sin.(B + \frac{1}{2}\delta B)}. \\ \delta BC : \delta B :: \sin.2 BC : 2 \cot.B.$$

La variation du côté

Est à la variation de l'angle opposé au côté de 90° ,

Comme le sinus du double du côté variable

Est au double de la cotangente du même angle.

$$628. — \delta BC : \delta B :: \cos.AB : \cos.C \cot.C.$$

Si $AB = 90^\circ$;

On changera C en B et B en C, dans les analogies (627, 628).

RAPPORTS DES VARIATIONS

DU TROISIEME CÔTÉ ET DE L'ANGLE OPPOSÉ.

$$629. — \sin.\frac{1}{2}\delta BC : — \sin.\frac{1}{2}\delta A :: \sin.AB \sin.AC \sin.(A — \frac{1}{2}\delta A) : \sin.(BC — \frac{1}{2}\delta BC). \\ — \delta BC : — \delta A :: \sin.AB \sin.AC \sin.A : \sin.BC.$$

La variation du côté

Est à la variation de l'angle opposé,

Comme le produit du rectangle des sinus des côtés constants par le sinus de l'angle qu'ils comprennent

Est au sinus du côté variable.

$$630. — \delta BC : - \delta A :: \sin. AB \sin. B : 1, \text{ (VII. } 20^\circ \text{).}$$

$$631. — \delta BC : - \delta A :: \sin. AC \sin. C : 1, \text{ (VII. } 4^\circ \text{).}$$

La variation du côté

Est à la variation de l'angle opposé,

Comme le produit du sinus d'un côté constant par le sinus de l'angle opposé à l'autre côté constant est au rayon.

Si $AC = 90^\circ$, ou si $AB = 90^\circ$;

$$632. — \sin. \frac{1}{2} \delta BC : - \sin. \frac{1}{2} \delta A :: \frac{\cos. BC}{\sin. (BC - \frac{1}{2} \delta BC)} : \frac{\cos. A}{\sin. (A - \frac{1}{2} \delta A)}.$$

$$— \delta BC : - \delta A :: \cot. BC : \cot. A.$$

Les variations du côté et de l'angle opposé

Sont proportionnelles à leurs cotangentes.

RAPPORTS DES VARIATIONS

DE L'ANGLE COMPRIS ENTRE LES CÔTÉS CONSTANTS,

ET DE L'UN DES DEUX AUTRES ANGLES.

$$633. \star — \sin. \frac{1}{2} \delta A : \frac{1}{2} \sin. \delta B :: \frac{1}{\sin. (B + \delta B)} : \frac{\cos. AB \sin. B \sin. (A - \frac{1}{2} \delta A) - \cos. B \cos. (A - \frac{1}{2} \delta A)}{\sin. (A - \delta A)}$$

$$— \delta A : \delta B :: 1 : (\cos. AB - \cot. B \cot. A) \sin. ^2 B.$$

$$634. — \sin. \frac{1}{2} \delta A : \frac{1}{2} \sin. \delta B :: \frac{\sin. (A - \delta A)}{\sin. (B + \delta B)} : \frac{\cos. C \sin. (A - \frac{1}{2} \delta A) - \cos. B \sin. \frac{1}{2} \delta A}{\sin. A}.$$

$$— \delta A : \delta B :: \sin. A : \sin. B \cos. C.$$

La variation de l'angle opposé au côté variable

Est à la variation de l'un des angles adjacents,

Comme le sinus du même angle opposé

Est au produit du sinus du même angle adjacent par le cos. du troisième angle.

Ss ij

$$635. — \sin. \frac{1}{2} \delta A : \text{tang.} \frac{1}{2} \delta B :: \frac{\sin. {}^2 BC - \frac{1}{2} \delta BC}{\sin. BC} : \sin. AC \times \frac{\sin. (A - \frac{1}{2} \delta A)}{\sin. A} \times \frac{\sin. C}{\text{tang.} (C + \frac{1}{2} \delta C)}$$

$$— \delta A : \delta B :: \sin. BC : \sin. AC \cos. C.$$

La variation de l'angle opposé au côté variable

Est à la variation de l'un des angles adjacents,

Comme le sinus du côté variable

Est au produit du sinus du côté opposé au même angle adjacent par le cos. de l'autre angle adjacent.

$$636. — \delta A : \delta B :: \sin. {}^2 BC : \cos. AB — \cos. BC \cos. AC, \text{ (VII. } 11^{\circ}).$$

$$637. — \delta A : \delta B :: 1 : \cos. AB — \sin. AB \cos. B \cot. BC, \text{ (VII. } 28^{\circ}).$$

De même

$$638. * — \sin. \frac{1}{2} \delta A : \frac{1}{2} \sin. \delta C :: 1 : \sin. (C + \delta C) \times \frac{\cos. AC \sin. C \sin. (A - \frac{1}{2} \delta A) - \cos. C \cos. (A - \frac{1}{2} \delta A)}{\sin. (A - \delta A)}$$

$$— \delta A : \delta C :: 1 : (\cos. AC — \cot. C \cot. A) \sin. {}^2 C.$$

$$639. — \sin. \frac{1}{2} \delta A : \frac{1}{2} \sin. \delta C :: \frac{\sin. (A - \delta A)}{\sin. (C + \delta C)} : \frac{\cos. B \sin. (A - \frac{1}{2} \delta A) - \cos. C \sin. \frac{1}{2} \delta A}{\sin. A}$$

$$— \delta A : \delta C :: \sin. A : \sin. C \cos. B.$$

$$640. — \sin. \frac{1}{2} \delta A : \text{tang.} \frac{1}{2} \delta C :: \frac{\sin. {}^2 (BC - \frac{1}{2} \delta BC)}{\sin. BC} : \sin. AB \times \frac{\sin. (A - \frac{1}{2} \delta A)}{\sin. A} \times \frac{\sin. B}{\text{tang.} (B + \frac{1}{2} \delta B)}$$

$$— \delta A : \delta C :: \sin. BC : \sin. AB \cos. B.$$

$$641. — \delta A : \delta C :: \sin. {}^2 BC : \cos. AC — \cos. BC \cos. AB.$$

$$642. — \delta A : \delta C :: 1 : \cos. AC — \sin. AC \cos. C \cot. BC.$$

Si $AB = 90^{\circ}$;

$$643. \sin. \frac{1}{2} \delta A : \frac{1}{2} \sin. \delta B :: \frac{\sin. A}{\cos. (A + \frac{1}{2} \delta A)} : \sin. B \cos. (B + \delta B).$$

$$\delta A : \delta B :: 2 \text{ tang. } A : \sin. 2B.$$

La variation de l'angle compris entre les côtés constants

Est à la variation de l'autre angle adjacent au côté de 90° ,

Comme le double de la tangente du premier angle

Est au sinus du double du second angle.

$$644. \sin. \delta A : \sin. \delta C :: \sin. (A + \delta A) \cos. A : \sin. (C + \delta C) \cos. C.$$

$$\delta A : \delta C :: \sin. 2A : \sin. 2C.$$

La variation de l'angle compris entre les côtés constants

Et la variation de l'angle opposé au côté de 90°

Sont proportionnelles aux sinus de ces mêmes angles doubles.

$$645. — \sin. \delta A : \sin. \delta C :: \sin. (BC - \delta BC) : \cos. B.$$

$$— \delta A : \delta C :: \sin. BC : \cos. B.$$

La variation de l'angle compris entre les côtés constants

Est à la variation de l'angle opposé au côté de 90° ,

Comme le sinus du côté variable

Est au cosinus du troisieme angle.

$$646. — \sin. \delta A : \sin. \delta C :: \cos. AC : \cos. B \cos. (B + \delta B).$$

$$— \delta A : \delta C :: \cos. AC : \cos.^2 B.$$

La variation de l'angle compris entre les côtés constants

Est à la variation de l'angle opposé au côté de 90° ,

Comme le cosinus de l'autre côté constant

Est au quarré du cosinus du troisieme angle.

Si $AC = 90^\circ$;

On changera B en C et C en B dans les analogies (643 à 646).

Quantités constantes B, C; ou deux angles.

RAPPORTS DES VARIATIONS

DES DEUX CÔTÉS OPPOSÉS AUX ANGLES CONSTANTS.

$$647. * \text{tang. } \frac{1}{2} \delta AC : \text{tang. } \frac{1}{2} \delta AB :: \text{tang. } (AC + \frac{1}{2} \delta AC) : \text{tang. } (AB + \frac{1}{2} \delta AB).$$

$$\delta AC : \delta AB :: \text{tang. } AC : \text{tang. } AB.$$

Les variations des côtés opposés aux angles constants

Sont proportionnelles aux tangentes des mêmes côtés.

$$648. \delta AC : \delta AB :: \cos. AB : \sin. A \cot. B + \cos. A \cos. AB, (VII. 34^\circ).$$

$$649. \delta AC : \delta AB :: \cos. C + \cos. A \cos. B : \cos. B + \cos. A \cos. C, (VII. 29^\circ).$$

$$650. \delta AC : \delta AB :: \sin. A \cot. C + \cos. A \cos. AC : \cos. AC, (VII. 35^\circ), (647^\circ).$$

$$651. \delta AC : \delta AB :: 1 : \frac{\sin. C \cot. B + \cos. C \cos. BC}{\sin. B \cot. C + \cos. B \cos. BC}, (VII. 33^\circ, 36^\circ), (647^\circ).$$

R A P P O R T S D E S V A R I A T I O N S

DU TROISIEME ANGLE ET D'UN CÔTÉ ADJACENT.

$$652. \sin. \frac{1}{2} \delta A : \tan. \frac{1}{2} \delta AC :: \sin. (A + \frac{1}{2} \delta A) : \cot. (AB + \frac{1}{2} \delta AB).$$

$$\delta A : \delta AC :: \sin. A : \cot. AB.$$

La variation du troisieme angle

Est à la variation d'un côté adjacent,

Comme le sinus du même angle

Est à la cotangente de l'autre côté adjacent.

$$653. * \sin. \frac{1}{2} \delta A : \sin. \frac{1}{2} \delta AC :: \sin. (AC + \frac{1}{2} \delta AC) : \frac{\cot. C \sin. (A + \frac{1}{2} \delta A) + \cos. AC \cos. (A + \frac{1}{2} \delta A)}{\sin. (A + \delta A)}$$

$$\delta A : \delta AC :: \sin. AC : \cot. C + \cos. AC \cot. A.$$

$$654. \delta A : \delta AC :: \sin. BC \sin. C : \cos. AB, (VII. 1^\circ), (652).$$

$$655. \delta A : \delta AC :: \sin. C : \cos. C \sin. AC + \cot. BC \cos. AC, (VII. 30^\circ).$$

De même

$$656. \sin. \frac{1}{2} \delta A : \tan. \frac{1}{2} \delta AB :: \sin. (A + \frac{1}{2} \delta A) : \cot. (AC + \frac{1}{2} \delta AC).$$

$$\delta A : \delta AB :: \sin. A : \cot. AC.$$

$$657. * \sin. \frac{1}{2} \delta A : \sin. \frac{1}{2} \delta AB :: \sin. (AB + \frac{1}{2} \delta AB) : \frac{\cot. B \sin. (A + \frac{1}{2} \delta A) + \cos. AB \cos. (A + \frac{1}{2} \delta A)}{\sin. (A + \delta A)}$$

$$\delta A : \delta AB :: \sin. AB : \cot. B + \cos. AB \cot. A.$$

$$658. \delta A : \delta AB :: \sin. BC \sin. B : \cos. AC.$$

$$659. \delta A : \delta AB :: \sin. B : \cos. B \sin. AB + \cot. BC \cos. AB.$$

Si $B = 90^\circ$;

$$660. \frac{1}{2} \sin. \delta A : \sin. \frac{1}{2} \delta AC :: \sin. (A + \delta A) \cos. A : \frac{\cos. AC}{\sin. (AC + \frac{1}{2} \delta AC)}.$$

$$\delta A : \delta AC :: \sin. 2A : 2 \cot. AC.$$

La variation de l'angle

Est à la variation de l'hypothénuse,

Comme le sinus du double de l'angle variable

Est au double de la cotangente de l'hypothénuse.

$$661. \delta A : \delta AC :: \cos. C : \cos. AB \cot. AB.$$

Si $C = 90^\circ$;

On changera B en C et C en B dans les analogies (660, 661).

RAPPORTS DES VARIATIONS

DU TROISIEME ANGLE ET DU CÔTÉ OPPOSÉ.

$$662. \sin. \frac{1}{2} \delta A : \sin. \frac{1}{2} \delta BC :: \sin. B \sin. C \sin. (BC + \frac{1}{2} \delta BC) : \sin. (A + \frac{1}{2} \delta A).$$

$$\delta A : \delta BC :: \sin. B \sin. C \sin. BC : \sin. A.$$

La variation de l'angle

Est à la variation du côté opposé,

Comme le produit du rectangle des sinus des angles constants par le sinus
du côté compris

Est au sinus de l'angle variable.

$$663. \delta A : \delta BC :: \sin. AB \sin. B : 1, (\text{VII. } 1^\circ).$$

$$664. \delta A : \delta BC :: \sin. AC \sin. C : 1, (\text{VII. } 23^\circ).$$

La variation de l'angle

Est à la variation du côté opposé,

Comme le produit du sinus d'un angle constant par le sinus du côté opposé
à l'autre angle constant est au rayon.

Si $B = 90^\circ$, ou si $C = 90^\circ$;

$$665. \sin. \frac{1}{2} \delta A : \sin. \frac{1}{2} \delta BC :: \frac{\cos. A}{\sin. (A + \frac{1}{2} \delta A)} : \frac{\cos. BC}{\sin. (BC + \frac{1}{2} \delta BC)}.$$

$$\delta A : \delta BC :: \cot. A : \cot. BC.$$

Les variations de l'angle et du côté opposé
Sont proportionnelles à leurs cotangentes.

RAPPORTS DES VARIATIONS

DU CÔTÉ COMPRIS ENTRE LES ANGLES CONSTANTS,
ET DE L'UN DES DEUX AUTRES CÔTÉS.

$$666. \star \frac{\sin. \frac{1}{2} \delta BC}{\frac{1}{2} \sin. \delta AC} : 1 :: \frac{1}{\sin. (AC + \delta AC)} : \frac{\cos. C \sin. AC \sin. (BC + \frac{1}{2} \delta BC) + \cos. AC \cos. (BC + \frac{1}{2} \delta BC)}{\sin. (BC + \delta BC)}$$

$$\delta BC : \delta AC :: 1 : (\cos. C + \cot. AC \cot. BC) \sin. ^2 AC.$$

$$667. \sin. \frac{1}{2} \delta BC : \frac{1}{2} \sin. \delta AC :: \frac{\sin. (BC + \delta BC)}{\sin. (AC + \delta AC)} : \frac{\cos. AB \sin. (BC + \frac{1}{2} \delta BC) - \cos. AC \sin. \frac{1}{2} \delta BC}{\sin. BC}$$

$$\delta BC : \delta AC :: \sin. BC : \sin. AC \cos. AB.$$

La variation du côté opposé à l'angle variable

Est à la variation de l'un des deux autres côtés,

Comme le sinus du premier côté

Est au produit du sinus du second côté par le cosinus du troisieme côté.

$$668. \sin. \frac{1}{2} \delta BC : \tan. \frac{1}{2} \delta AC :: \frac{\sin. ^2 (A + \frac{1}{2} \delta A)}{\sin. A} : \sin. B \times \frac{\sin. (BC + \frac{1}{2} \delta BC)}{\sin. BC} \times \frac{\sin. AB}{\tan. (AB + \frac{1}{2} \delta AB)}$$

$$\delta BC : \delta AC :: \sin. A : \sin. B \cos. AB.$$

La variation du côté opposé à l'angle variable

Est à la variation de l'un des deux autres côtés,

Comme le sinus de l'angle variable

Est au produit du sinus de l'angle constant opposé à ce dernier côté par le
cosinus du troisieme côté.

$$669. \delta BC : \delta AC :: \sin. ^2 A : \cos. C + \cos. A \cos. B, \text{ (VII. } 29^\circ \text{).}$$

$$670. \delta BC : \delta AC :: 1 : \cos. C + \sin. C \cos. AC \cot. A, \text{ (VII. } 10^\circ \text{).}$$

De

De même

$$671. * \frac{\sin. \frac{1}{2} \delta BC}{\frac{1}{2} \sin. \delta AB} : 1 :: \frac{1}{\sin. (AB + \delta AB)} : \frac{\cos. B \sin. AB \sin. (BC + \frac{1}{2} \delta BC) + \cos. AB \cos. (BC + \frac{1}{2} \delta BC)}{\sin. (BC + \delta BC)}.$$

$$\delta BC : \delta AB :: 1 : (\cos. B + \cot. AB \cot. BC) \sin. ^2 AB.$$

$$672. \sin. \frac{1}{2} \delta BC : \frac{1}{2} \sin. \delta AB :: \frac{\sin. (BC + \delta BC)}{\sin. (AB + \delta AB)} : \frac{\cos. AC \sin. (BC + \frac{1}{2} \delta BC) - \cos. AB \sin. \frac{1}{2} \delta BC}{\sin. BC}.$$

$$\delta BC : \delta AB :: \sin. BC : \sin. AB \cos. AC.$$

$$673. \sin. \frac{1}{2} \delta BC : \tan. \frac{1}{2} \delta AB :: \frac{\sin. ^2 (A + \frac{1}{2} \delta A)}{\sin. A} : \sin. C \times \frac{\sin. (BC + \frac{1}{2} \delta BC)}{\sin. BC} \times \frac{\sin. AC}{\tan. (AC + \frac{1}{2} \delta AC)}.$$

$$\delta BC : \delta AB :: \sin. A : \sin. C \cos. AC.$$

$$674. \delta BC : \delta AB :: \sin. ^2 A : \cos. B + \cos. A \cos. C.$$

$$675. \delta BC : \delta AB :: 1 : \cos. B + \sin. B \cos. AB \cot. A.$$

Si $C = 90^\circ$;

$$676. \sin. \frac{1}{2} \delta BC : \frac{1}{2} \sin. \delta AC :: \frac{\sin. BC}{\cos. (BC + \frac{1}{2} \delta BC)} : \sin. AC \cos. (AC + \delta AC).$$

$$\delta BC : \delta AC :: 2 \tan. BC : \sin. 2 AC.$$

La variation du côté opposé à l'angle variable

Est à la variation de l'autre côté,

Comme le double de la tangente du premier côté

Est au sinus du double du second côté.

$$677. \sin. \delta BC : \sin. \delta AB :: \sin. (BC + \delta BC) \cos. BC : \sin. (AB + \delta AB) \cos. AB.$$

$$\delta BC : \delta AB :: \sin. 2 BC : \sin. 2 AB.$$

La variation du côté opposé à l'angle variable

Est à la variation de l'hypothénuse,

Comme le sinus du double du même côté

Est au sinus du double de l'hypothénuse.

$$678. \sin. \delta BC : \sin. \delta AB :: \sin. (A + \delta A) : \cos. AC.$$

$$\delta BC : \delta AB :: \sin. A : \cos. AC.$$

La variation du côté opposé à l'angle variable

Est à la variation de l'hypothénuse,

Comme le sinus de l'angle variable

Est au cosinus du côté adjacent.

$$679. \sin. \delta BC : \sin. \delta AB :: \cos. B : \cos. AC \cos. (AC + \delta AC).$$

$$\delta BC : \delta AB :: \cos. B : \cos.^2 AC.$$

La variation du côté opposé à l'angle variable
Est à la variation de l'hypothénuse,
Comme le cosinus de l'angle oblique constant
Est au carré du cosinus du côté opposé.

$$\text{Si } B = 90^\circ;$$

On changera C en B et B en C dans les analogies (676. à 679).

Démonstration des Analogies de la Table précédente.

Fig. 64 680. Soit le triangle sphérique ABC converti en ABD, le côté AB et l'angle adjacent A demeurant constants; et soient $CBD = \delta B$, $C - D = \delta C$, $CD = \delta AC$, et $BD - BC = \delta BC$, comme nous avons fait (251). Ces expressions adoptées, on entendra facilement les démonstrations suivantes.

681. Les analogies finies (541) dépendent de la proportion entre les sinus des côtés et les sinus des angles opposés (448), appliquée au triangle BCD.

682. Chaque analogie infinitésimale précédée dans un même article d'une analogie finie, est déduite de cette analogie finie par les moyens déjà employés (253, 264, 265).

En substituant dans les analogies (541) la valeur de $\sin. C$, (VII. 6°), on obtient les analogies (542). C'est ce que signifie le renvoi à la formule 6° de la table VII, que l'on a vu (542), et c'est ainsi que doivent s'entendre toutes les citations ou renvois pareils dans ces analogies.

Et quand la substitution n'a pas été faite dans l'article qui précède immédiatement, mais dans un article plus éloigné, alors j'ai cité de plus l'article où elle a eu lieu. Par exemple, dans les ana-

logies (543), la citation (VII. 19°) (541) signifie que l'expression contenue dans la formule 19° de la table VII a été substituée dans les analogies de l'article 541.

Ce n'est que dans les analogies infinitésimales, et non dans les analogies finies, que les substitutions indiquées par la table ont été faites; à l'exception cependant des substitutions dont nous venons de parler pour les articles (542, 543).

683. Lorsque $A = 90^\circ$, la formule (VII. 34°) donne $\text{tang. } AC = \text{tang. } B \sin. AB$, parcequ'alors $\sin. A = 1$ et $\cos. A = 0$. Prenant dans cette équation les différentielles finies, selon la formule (II. 32°), et observant que AB est constant, on aura $\frac{\sin. \delta AC}{\cos. AC \cos. (AC + \delta AC)} = \frac{\sin. \delta B}{\cos. B \cos. (B + \delta B)} \times \sin. AB$. En substituant dans cette équation la valeur de $\sin. AB$ prise de l'équation précédente, (qu'on se souvienne que c'est ainsi que dans toutes les différentiations semblables nous ferons disparaître la quantité constante), on en tirera aussitôt la première analogie (544).

684. Si $AB = 90^\circ$, alors l'équation (VII. 34°) devient $\text{tang. } AC = \frac{\text{tang. } B}{\sin. A}$, et l'on a toujours la même analogie finie (544), en différentiant cette équation.

L'analogie infinitésimale (544), déduite comme nous l'avons dit (682), se trouve simplifiée dans le second rapport, au moyen de la formule (I. 6°). Parmi les analogies suivantes beaucoup d'autres ont été simplifiées de la même manière; ce à quoi nous ne nous arrêterons pas.

685. Dans le triangle sphérique BCD , on a (IX. 4°), $\cos. \frac{1}{2}(BCD + D) : \cos. \frac{1}{2}(BCD - D) :: \text{tang. } \frac{1}{2}CD : \text{tang. } \frac{1}{2}(BD + BC)$. Or $\cos. \frac{1}{2}(BCD + D) = \cos. \frac{1}{2}(180^\circ - \overline{C - D}) = (5) \sin. \frac{1}{2}(C - D) = \sin. \frac{1}{2}\delta C$, (680); et $\cos. \frac{1}{2}(BCD - D) = \cos. \frac{1}{2}(180^\circ - \overline{C + D}) = \sin. \frac{1}{2}(C + D) = \sin. (C - \frac{1}{2}\delta C)$. Substituons ces valeurs dans le premier rapport de l'analogie ci-dessus, mettons dans le

155.64 second les expressions (680), et nous aurons la première analogie (545).

686. L'opération précédente suppose $C > D$, c'est-à-dire qu'elle suppose que l'angle C diminue pour se changer en D , tandis que le côté AC augmente. Pour indiquer que ces deux variations se font en sens contraire, nous avons donné le signe négatif à $\sin.\frac{1}{2}\delta C$. Au reste on a toujours en effet $C > D$ lorsque $(BC + BD)$ est $< 180^\circ$, comme on le comprendra facilement en appliquant la règle (475) au triangle BCD . Mais quand on a $(BC + BD) > 180^\circ$, alors $\text{tang.}(BC + \frac{1}{2}\delta BC)$ devient négative, et par conséquent $\sin.\frac{1}{2}\delta C$ devient positif. En effet dans ce cas C augmente, c'est-à-dire que C est $< D$. Par des raisonnements semblables il sera facile de trouver la raison du signe négatif partout où nous l'avons employé dans les premiers rapports des analogies de la table.

687. Prenons les différentielles finies (II. 30°, 31°, 33°) dans l'équation (VII. 17°) exprimée comme il suit, $\sin.A \cot.C = \sin.AC \cot.AB - \cos.AC \cos.A$, et, en nous rappelant que A et AB sont constants, nous aurons $-\frac{\sin.\delta C \sin.A}{\sin.C \sin.(C - \delta C)} = 2 \sin.\frac{1}{2}\delta AC \times (\cos.AC + \frac{1}{2}\delta AC \cot.AB + \sin.AC + \frac{1}{2}\delta AC \cos.A)$. Substituons à $\cot.AB$ sa valeur (VII. 35°), multiplions l'équation par $\frac{\sin.AC}{\cos.A}$, et, en observant que $\cos.(AC + \frac{1}{2}\delta AC) \times \cos.AC + \sin.(AC + \frac{1}{2}\delta AC) \sin.AC = \cos.\frac{1}{2}\delta AC$, (II. 4°), nous aurons $-\sin.\delta C \times \frac{\sin.AC \text{ tang.} A}{\sin.C \sin.(C - \delta C)} = 2 \sin.\frac{1}{2}\delta AC \times (\text{tang.} A \cot.C \cos.AC + \frac{1}{2}\delta AC + \cos.\frac{1}{2}\delta AC)$; équation qui, multipliée par $\cot.A$, donnera la première analogie (546).

On verra (725) ce que signifie l'astérisque *.

688. Si la formule (VII. 17°) eût été prise de la manière suivante, $\text{tang.} C \sin.AC \cot.AB - \text{tang.} C \cos.AC \cos.A = \sin.A$, la différentiation n'auroit plus été rigoureuse, parcequ'en différentiant les produits des variables, $\text{tang.} C \sin.AC$ et $\text{tang.} C \cos.AC$,

il eût fallu négliger les rectangles des différentielles (133), pour ne pas tomber dans une expression extrêmement compliquée. On trouveroit de même, si l'on différentioit la formule (VII. 17°) en la prenant comme elle est dans la table VII, que la différentiation ne seroit pas exacte, et telle que nous l'avons eue (687). En général pour former une équation différentielle finie, il faut 1°. que l'équation qu'on veut différentier soit telle qu'aucun terme ne contienne plus d'une variable; 2°. que par conséquent le dénominateur d'un membre ne contienne aucune variable, lorsqu'il s'en trouve quelque une dans le numérateur de l'autre membre (137). Nous donnerons dans la suite, et spécialement (703), des moyens pour obtenir ces conditions dans certains cas qui, au premier aspect, paroissent les exclure.

689. L'analogie infinitésimale (547) n'a point d'analogie différentielle finie qui lui corresponde; pour la former il faudroit avoir à substituer dans la première (545) une valeur exacte de $\sin.(C - \delta C)$ correspondante à celle de $\sin.C$ que nous avons substituée dans la seconde analogie (545). C'est par la même cause qu'on ne trouve point d'analogies finies dans quelques autres articles de la table.

690. Lorsque $A = 90^\circ$, la première analogie (548) se tire immédiatement de la première (546).

Quand $AB = 90^\circ$, la formule (VII. 17°) devient $\cot.C = -\cos.AC \cot.A$. Prenant les différentielles et observant qu'elles auront le même signe après la substitution (683) de la valeur de $\cot.A$ que l'équation précédente donne négative, on aura la première analogie (549).

On remarquera l'utilité des signes que j'ai insérés dans les analogies différentielles, puisqu'ils font connoître dans le cas présent que quand $AB = 90^\circ$, les changements de C et de AC ne se font plus en sens contraire, pourvu cependant que AC et C soient de la même espèce. Le changement de signe, par comparaison avec les analogies précédentes, fait voir combien il seroit

Fig. 64 facile, tant dans ce cas que dans d'autres pareils de la table, de prendre l'accroissement pour le décroissement, ou *vice versa*, en se servant des analogies infinitésimales telles qu'elles ont été données jusqu'à présent, c'est-à-dire sans aucune distinction de signes.

691. Dans le triangle BCD on a (IX. 4°), $\text{tang. } \frac{1}{2} (\text{BD} - \text{BC}) : \text{tang. } \frac{1}{2} \text{CD} :: \sin. \frac{1}{2} (\text{BCD} - \text{D}) : \sin. \frac{1}{2} (\text{BCD} + \text{D})$. Procédant comme on a fait (685), cette analogie se transforme en la première (550).

692. En prenant les différentielles finies dans l'équation (VII. 26°) dont on aura changé les signes pour rendre positives les différentielles des cosinus, on a $2 \sin. \frac{1}{2} \delta \text{BC} \sin. (\text{BC} + \frac{1}{2} \delta \text{BC}) = 2 \sin. \frac{1}{2} \delta \text{AC} (\cos. \text{AB} \sin. \text{AC} + \frac{1}{2} \delta \text{AC} - \sin. \text{AB} \cos. \text{AC} + \frac{1}{2} \delta \text{AC} \cos. \text{A})$. Substituant la valeur (VII. 7°) de $\cos. \text{A}$, et multipliant l'équation par $\sin. \text{AC}$, on trouvera $\cos. \text{AB}$ multiplié par la valeur de $\cos. \frac{1}{2} \delta \text{AC}$ énoncée (687), et on aura aussitôt la première analogie (551).

693. En différentiant l'équation (VII. 26°), nous venons d'employer $(\text{AC} + \frac{1}{2} \delta \text{AC})$, et non $(\text{AC} - \frac{1}{2} \delta \text{AC})$, dans la différentielle de $-\sin. \text{AC}$; ce qui en apparence est contraire à la règle donnée (143). Mais comme la quantité δAC ne peut être à la fois négative et positive, et que la différentiation de $-\cos. \text{AC}$ a donné le signe positif pour $\sin. \frac{1}{2} \delta \text{AC}$, il s'ensuit réellement, tant d'après la même règle que par la règle donnée (154), qu'on doit employer par-tout $(\text{AC} + \frac{1}{2} \delta \text{AC})$. Si on eût adopté le signe négatif, on auroit eu, pour le second membre de l'équation, $-2 \sin. \frac{1}{2} \delta \text{AC} (\sin. \text{AB} \cos. \text{AC} - \frac{1}{2} \delta \text{AC} \cos. \text{A} - \sin. \text{AC} - \frac{1}{2} \delta \text{AC} \cos. \text{AB})$. Mais le choix du signe positif est indiqué par l'analogie (550), dans laquelle on voit que les changements de AC et de BC se font dans un même sens toutes les fois que l'on a $(\text{C} - \frac{1}{2} \delta \text{C}) < 90^\circ$, comme on doit toujours le supposer (459) dans la construction des formules.

694. Quand $\text{A} = 90^\circ$, le dernier terme de l'équation (692) dispa- roît, et mettant dans cette équation, au lieu de $\cos. \text{AB}$,

$\frac{\cos. BC}{\cos. AC}$, valeur qui se tire, dans ce cas, de la formule (VII. 26°), on en déduit la première analogie (553).

Si c'est AB qui égale 90°, la formule citée donne $\cos. BC = \sin. AC \cos. A$. En différenciant cette équation, et la réduisant comme nous avons dit (683), on en tire la première analogie (554).

695. Dans le triangle BCD on a (IX. 2°), $\sin. \frac{1}{2}(BD + BC) : \sin. \frac{1}{2}(BD - BC) :: \cot. \frac{1}{2} CBD : \tan. \frac{1}{2}(BCD - D)$. Si on substitue les expressions (680), et qu'on observe que $\tan. \frac{1}{2}(BCD - D) = \cot. (C - \frac{1}{2}\delta C)$, (685), et que le second rapport peut s'exprimer ainsi, $\tan. (C - \frac{1}{2}\delta C) : \tan. \frac{1}{2}\delta B$, l'analogie se convertit en la première (555).

696. La formule (VII. 31°) peut s'exprimer comme il suit ; $-\cot. BC \sin. AB = -\sin. B \cot. A - \cos. B \cos. AB$. En prenant les différentielles finies, $\frac{\sin. \delta BC \sin. AB}{\sin. BC \sin. (BC + \delta BC)} = 2 \sin. \frac{1}{2} \delta B \times (\cos. AB \sin. B + \frac{1}{2}\delta B - \cos. B + \frac{1}{2}\delta B \cot. A) : \text{substituant à } \cot. A \text{ sa valeur (VII. 13°), multipliant l'équation par } \frac{\sin. B}{\sin. AB}$, et observant que $\sin. (B + \frac{1}{2}\delta B) \sin. B + \cos. (B + \frac{1}{2}\delta B) \cos. B = \cos. \frac{1}{2}\delta B$, (II. 4°), ce que nous nous dispenserons de remarquer à l'avenir, on aura la première analogie (556).

697. Si $A = 90^\circ$, la formule (VII. 31°) donne $\cos. B = \tan. AB \cot. BC$. Changeant les signes, différenciant et réduisant comme nous avons dit (683), on aura la première analogie (558).

En opérant de la même manière sur l'équation $\tan. A \cot. BC = \sin. B$, à laquelle se réduit la formule (VII. 13°) quand $AB = 90^\circ$, on obtient la première analogie (559).

698. Dans le triangle BCD on a (474), (P), $\tan. \frac{1}{2}(BD + BC) : \tan. \frac{1}{2}(BD - BC) :: \tan. \frac{1}{2}(BCD + D) : \tan. \frac{1}{2}(BCD - D)$, ou (685) : $\cot. \frac{1}{2}\delta C : \cot. (C - \frac{1}{2}\delta C)$, ou enfin : $\tan. (C - \frac{1}{2}\delta C) : \tan. \frac{1}{2}\delta C$. Mettant dans le premier de ces rapports les expressions (680), on verra que l'analogie formée de ce rapport et du dernier que nous venons de rapporter, se réduit à la première analogie (560), dans laquelle $\tan. \frac{1}{2}\delta C$ est affectée du signe négatif par la raison que nous avons donnée (686).

Fig. 64 699. L'analogie (564) se tire immédiatement de l'analogie (562). On observera le changement de signe dans cette analogie, comparée à l'analogie (563). Il est clair que si, dans le cas de $AB = 90^\circ$, les termes moyens sont $-\Delta C$ et $-\cos.B \sin.BC$, leur produit sera positif, et par conséquent ΔC , dans ce cas, acquiert le signe positif.

700. Dans le triangle BCD on a (IX. 2°), $\cos.\frac{1}{2}(BD + BC) : \cos.\frac{1}{2}(BD - BC) :: \cot.\frac{1}{2}CBD : \tan.\frac{1}{2}(BCD + D)$. Ces expressions, transformées comme on a déjà fait plus d'une fois, donneront la première analogie (565).

En différentiant l'équation (VII. 12°), substituant la valeur (VII. 29°) de $\cos.AB$, et réduisant, comme on l'a déjà vu, on aura la première analogie (566).

701. La première analogie (568) se déduit immédiatement de la première (566).

Nous obtiendrons la première (569), en différentiant, à notre ordinaire, l'équation $\cos.C = -\cos.A \cos.B$, à laquelle se réduit la formule (VII. 12°), dans le cas où $AB = 90^\circ$. Les différentielles ont un même signe dans l'analogie (569), par une cause semblable à celle que nous avons exposée (690).

Fig. 65 702. Actuellement soit converti en ADE le triangle ABC; de manière qu'on ait $DE = BC$: alors $DF + FE = BF + FC$, et par conséquent $FE - BF = FC - DF$. Et dans les triangles BFE, CFD, on a (IX. 4°)

$$\sin.\frac{1}{2}(EBF + E) : \sin.\frac{1}{2}(EBF - E) :: \tan.\frac{1}{2}BE : \tan.\frac{1}{2}(FE - BF);$$

$$\sin.\frac{1}{2}(CDF + C) : \sin.\frac{1}{2}(CDF - C) :: \tan.\frac{1}{2}CD : \tan.\frac{1}{2}(FC - DF).$$

Qu'on observe 1°. que la valeur du dernier terme est la même dans les deux analogies, ensorte que, si on les divise l'une par l'autre, le quotient de ces deux termes est 1; 2°. que $BE = \Delta AB$, et que $CD = -\Delta AC$; 3°. que B est $> E$ et $C < D$, par la même raison que celle exposée (686); d'où il suit que $E = B - \Delta B$, et que

que $D = C + \delta C$. En opérant comme on a fait (685), on a $\sin. \frac{1}{2} (EBF + E) = \cos. \frac{1}{2} \delta B$; et $\sin. \frac{1}{2} (EBF - E) = \cos. (B - \frac{1}{2} \delta B)$; et de même $\sin. \frac{1}{2} (CDF + C) = \cos. \frac{1}{2} \delta C$, et $\sin. \frac{1}{2} (CDF - C) = \cos. (C + \frac{1}{2} \delta C)$. Avec ces substitutions, les deux analogies ci-dessus, divisées l'une par l'autre, donneront la première (570).

Substituez dans l'analogie (573) la valeur (VII. 26^e) de $\cos. BC$; mettez $1 - \sin. {}^2 AC$ au lieu de $\cos. {}^2 AC$, et $1 - \sin. {}^2 AB$ au lieu de $\cos. {}^2 AB$; puis divisez le second rapport par $\sin. {}^2 AB \sin. AC \cos. AC$, et vous aurez l'analogie (574).

703. Quand $A = 90^\circ$, on a (VII. 26^e), $\cos. BC = \cos. AB \cos. AC$. Le second membre de cette équation étant un produit de deux variables, il paroît d'abord impossible (688) d'en avoir les différentielles finies. C'est la première fois dans le cours de cet Ouvrage, que nous nous trouvons obligés de recourir à la sécante. La difficulté disparoît en faisant, par exemple, $\cos. BC \sec. AB = \cos. AC$.

Pour avoir l'expression de la différentielle finie d'une sécante, j'observe que $\cos. B - \cos. A = \frac{1}{\sec. B} - \frac{1}{\sec. A} = \frac{\sec. A - \sec. B}{\sec. B \sec. A} = \frac{(\sec. A - \sec. B) \cos. B \cos. A}{\sec. A - \sec. B} = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} (A - B) \sin. \frac{1}{2} (A + B)}{\cos. A \cos. B}$; d'où je tire, en procédant comme je l'ai fait (139),

$$\delta \sec. B = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} \delta B \sin. (B + \frac{1}{2} \delta B)}{\cos. B \cos. (B + \delta B)}.$$

Maintenant, en différentiant l'équation $\cos. AC = \cos. BC \sec. AB$, j'aurai donc $-2 \sin. \frac{1}{2} \delta AC \sin. (AC - \frac{1}{2} \delta AC) = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} \delta AB \sin. (AB + \frac{1}{2} \delta AB)}{\cos. AB \cos. (AB + \delta AB)} \times \cos. BC$. En mettant $\cos. AB \cos. AC$ au lieu de $\cos. BC$, je trouve l'analogie formée par les deux premiers rapports (575). Celle que forment le premier et le troisième, s'obtient en différentiant l'équation $-\cos. AB = -\sec. AC \cos. BC$.

704. Quand $BC = 90^\circ$, on a (VII. 7^e), $\cos. A = -\cot. AB \cot. AC$, ou $\cos. A \tan. AB = -\cot. AC$. Différentiant et obser-

Fig. 65 vant que l'une des différentielles devient négative par la substitution de la valeur négative de $\cos.A$, ainsi qu'on l'a dit (690), on aura la première analogie (576).

Dans le cas où $BC = 90^\circ$, on a aussi $\cos.AC = \cos.B \sin.AB$, (VII. 28°); et par la même raison, dans le triangle ADE, $\cos.AE = \cos.D \sin.AD$, ou $\cos.(AB + \delta AB) = \cos.(C + \delta C) \times \sin.(AC - \delta AC)$: faisant ces substitutions dans la première analogie (576), on aura les deux premiers rapports (577).

Dans le même cas, on a encore (VII. 8°), $\cos.A = -\cos.B \cos.C = -\cos.D \cos.E = -\cos.(C + \delta C) \cos.(B - \delta B)$. Donc 1°. $\cos.(C + \delta C) : \cos.B :: \cos.C : \cos.(B - \delta B)$, second et troisième des rapports (577). 2°. En prenant, dans l'équation $\cos.A = -\cos.B \cos.C$, la valeur de $\cos.B = -\frac{\cos.A}{\cos.C}$, et celle de $\cos.C = -\frac{\cos.A}{\cos.B}$, et les substituant alternativement dans l'analogie infinitésimale (577), on aura les analogies (578).

705. Si l'on change tous les signes dans la première analogie (570), et qu'ensuite on substitue aux expressions de cette analogie celles du triangle supplémentaire, par la méthode facile que j'ai donnée (440), on observera que AB diminuant, l'angle opposé dans le triangle supplémentaire doit croître; de sorte qu'au lieu de $-\text{tang.} \frac{1}{2} \delta AB$, on aura $\text{tang.} \frac{1}{2} \delta C$, et, par la même raison, $-\text{tang.} \frac{1}{2} \delta B$ au lieu de $\text{tang.} \frac{1}{2} \delta AC$. On sait d'ailleurs que le cosinus d'un arc et celui de son supplément diffèrent pour le signe (36); on aura donc $\cos.(AB + \frac{1}{2} \delta AB)$, au lieu de $-\cos.(C - \frac{1}{2} \delta C)$, et $\cos.(AC - \frac{1}{2} \delta AC)$ au lieu de $-\cos.(B + \frac{1}{2} \delta B)$. Mais au lieu de $\cos. \frac{1}{2} \delta C$, on a $\cos. \frac{1}{2} \delta AB$; et $\cos. \frac{1}{2} \delta AC$ au lieu de $\cos. \frac{1}{2} \delta B$, sans aucun changement de signe (154). C'est d'après ces observations que se forme la première analogie (579).

706. Substituons dans l'analogie (582) la valeur (VII. 8°) de $\cos.A$; mettons $1 - \sin.^2 B$ au lieu de $\cos.^2 B$, et $1 - \sin.^2 C$ au lieu de $\cos.^2 C$; puis divisons le second rapport par $\sin.B \cos.B \times \sin.^2 C$, et nous trouverons l'analogie (583).

Quand $A = 90^\circ$, on a (VII. 25°), $\cos.BC = \cot.B \cot.C$, ou $\cos.BC \tan.C = \cot.B$. Différentions à l'ordinaire (683), et nous aurons la première analogie (584).

Dans le même cas, $\cos.B = \cos.AC \sin.C$, (VII. 10°), et par la même raison, $\cos.D = \cos.AE \sin.E$, ou $\cos.(C + \delta C) = \cos.(AB + \delta AB) \sin.(B - \delta B)$. Ces substitutions dans l'analogie finie (584) donneront les deux premiers rapports (585). De plus (VI. 13°), $\cos.BC = \cos.AB \cos.AC = \cos.AE \cos.AD = \cos.(AB + \delta AB) \cos.(AC - \delta AC)$. Donc $\cos.(AB + \delta AB) : \cos.AC :: \cos.AB : \cos.(AC - \delta AC)$, second et troisième rapports (585).

En changeant les signes dans les analogies (575), puis employant le triangle supplémentaire comme nous l'avons fait (705), on obtiendra les analogies (587).

707. Prenant les différentielles finies dans l'équation $\sin.BC \times \sin.C = \sin.AB \sin.A$, (VII. 1°), puis substituant $\frac{\sin.AB}{\sin.C}$ à la quantité constante $\frac{\sin.BC}{\sin.A}$, on aura la première analogie (588).

En changeant B en C et C en B dans les analogies (588 à 592); on obtient les analogies (593 à 597). On pourroit donner dans celles-ci le signe positif aux deux variations, puisqu'elles sont dans un même sens; mais je leur ai donné le signe négatif, pour conserver l'uniformité entre ces analogies et les analogies (570 et suiv.).

Lorsque A ou que $BC = 90^\circ$, il n'en résulte aucune analogie différente des précédentes (588 à 597); mais alors ces analogies se simplifient, comme je l'indiquerai (728).

708. La première analogie (598), se trouve en prenant le produit, terme à terme, des analogies finies (570, 593).

Mettant dans l'analogie (598), $\sin.AB : \sin.C$ au lieu de $\sin.AC : \sin.B$, on a la première (599).

Substituons la valeur (VII. 18°) de $\tan.C$ dans l'analogie (601); réduisons le second rapport à un même dénominateur que nous supprimerons; écrivons $1 - \sin.^2 BC$ au lieu de $\cos.^2 BC$; enfin

Fig.65 livisons le second rapport par $\sin.BC \cos.BC \cot.AB$; nous aurons l'analogie (602).

Substituons dans celle-ci la valeur (VII. 31°) de $\tan.BC$; réduisons encore le second rapport à un même dénominateur que nous supprimerons, et mettons $1 - \sin.^2B$ au lieu de $\cos.^2B$. Divisons ensuite ce second rapport par $\sin.B \cos.B$, multiplions-le par $\cos.AB \tan.A$, et observons que $\sin.^2AB + \cos.^2AB = 1$: nous trouverons l'analogie (603).

Les analogies (604 à 609) s'obtiennent en changeant B en C et C en B dans les analogies (598 à 603), et changeant les signes des différentielles, pour conserver l'uniformité, comme nous l'avons dit (707); ce qu'on remarquera aussi dans les analogies (611), qui sont tirées des analogies (610).

La première (610) se trouve en différentiant à l'ordinaire l'équation $\cos.B = \tan.AB \cot.BC$, donnée par la formule (VII. 31°), dans le cas où $A = 90^\circ$.

Quand $BC = 90^\circ$, de la formule (VII. 13°) on tire $\tan.A \times \cos.AB = -\tan.B$. Différentiant et se rappelant ce qui a été dit (690) sur le changement de signe, on aura la première analogie (612).

En changeant dans celle-ci B en C, on a la première (613).

Fig.66 709. Soit converti en ABD le triangle ABC, de sorte qu'on ait $AD = AC$. Les deux côtés AB, AC seront constants, et on aura $\sin.AB : \sin.AC :: \sin.C : \sin.B :: \sin.D : \sin.ABD$. La dernière de ces analogies fait voir qu'en supposant, comme nous l'avons prescrit (459), tous les angles aigus, le sinus le plus grand correspondant au plus grand angle, et le plus petit au plus petit angle, ~~de sorte~~ ~~que~~ si on a $ABD > B$, comme dans la figure, on doit avoir $D > C$. Nous ferons donc, pour employer nos expressions ordinaires, $CBD = \delta B$, $ABD = B + \delta B$, $D = C + \delta C$, $CAD = -\delta A$, (A désignant l'angle BAC du triangle primitif ABC), et $BD = BC - \delta BC$; car il est aisé de conclure de l'équation (VII. 26°) que si A diminue, BC doit aussi diminuer.

710. La dernière analogie $\sin.C : \sin.B :: \sin.D : \sin.ABD$ donne (II. 12°), $\text{tang.} \frac{1}{2}(ABD + B) : \text{tang.} \frac{1}{2}(ABD - B) :: \text{tang.} \frac{1}{2}(D + C) : \text{tang.} \frac{1}{2}(D - C)$. Substituez les expressions ci-dessus, vous aurez la première analogie (614).

Les arcs finis qui se trouvent ensemble dans l'une quelconque des analogies (615 à 618) ne sont réunis dans aucune autre de ces analogies. C'est en général ce que j'ai eu l'attention d'observer dans la Table. Il seroit inutile, il seroit même nuisible de multiplier les analogies par ce moyen. Cependant celles que donne La Caille dans le cas présent sont $\delta B : \delta C :: \text{tang.} B : \text{tang.} C :: \sin.AC \cos.C : \sin.AB \cos.B :: \sin.B \cos.C : \sin.C \cos.B$. Je ne sais de quel usage peuvent être les deux derniers rapports, qu'il l'un et l'autre supposent que l'on connoisse les angles B et C; et quel sera le Calculateur qui, dans ce cas, ne préférera pas de se servir du rapport $\text{tang.} B : \text{tang.} C$? Les analogies de La Caille sont plus d'une fois susceptibles de cette légère critique; et j'ai cru devoir en faire l'observation, d'autant plus que d'autres Auteurs les ont adoptées.

Lorsque l'un des côtés constants égale 90°, il n'en résulte d'autres analogies que celles données (614 à 618).

711. Dans le triangle BCD, on a (IX. 2°), $\sin. \frac{1}{2}(BC + BD) : \sin. \frac{1}{2}(BC - BD) :: \cot. \frac{1}{2}CBD : \text{tang.} \frac{1}{2}(BDC - BCD)$. Mais $BDC - BCD = D + ADC - (ACD - C) = D + C$, le triangle CAD étant isoscele. En substituant cette valeur et les expressions (709) dans l'analogie ci-dessus, on aura la première (619).

712. Puisque (VII. 9°), $\sin.BC \sin.AB \cos.B = \cos.AC - \cos.BC \cos.AB$; en employant la cosécante, on aura $\sin.AB \cos.B = \cos.AC \coséc.BC - \cot.BC \cos.AB$. La différentielle finie de la cosécante se déduit de la formule (II. 22°), en opérant comme nous l'avons fait (703), pour trouver la différentielle de la sécante: sa valeur est

$$- \delta \coséc.B = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} \delta B \cos.(B + \frac{1}{2} \delta B)}{\sin.B \sin.(B + \delta B)} r$$

B désignant un arc quelconque.

Fig. 66 Différentions maintenant l'équation précédente, après en avoir changé les signes pour avoir δB positive, et en adoptant le signe négatif pour δBC ; le tout pour conserver l'uniformité avec l'analogie (619). Nous aurons $2 \sin. \frac{1}{2} \delta B \sin. (B + \frac{1}{2} \delta B) \sin. AB = - \cos. AC \times \frac{-2 \sin. \frac{1}{2} \delta BC \cos. (BC - \frac{1}{2} \delta BC)}{\sin. BC \sin. (BC - \delta BC)} - \frac{\sin. \delta BC \cos. AB}{\sin. BC \sin. (BC - \delta BC)}$. Substituons au lieu de $\cos. AC$ sa valeur (VII. 28°), $2 \sin. \frac{1}{2} \delta BC \cos. \frac{1}{2} \delta BC$ au lieu de $\sin. \delta BC$, et (II. 4°) $\cos. BC \cos. (BC - \frac{1}{2} \delta BC) + \sin. BC \sin. (BC - \frac{1}{2} \delta BC)$ au lieu de $\cos. \frac{1}{2} \delta BC$: réduisons et divisons l'équation par $2 \sin. AB$; nous aurons la première analogie (620).

En changeant B en C et C en B dans les analogies (619 à 622), on a les analogies (623 à 626).

713. Quand $AC = 90^\circ$, on a (VII. 9°), $\cos. B = - \cot. BC \cot. AB$. Changez les signes, différenciez à l'ordinaire (690), vous aurez la première analogie (627).

Dans ce même cas, on a aussi (VII. 30°), $\cos. AB = \cos. C \sin. BC$, ou $\sin. BC = \frac{\cos. AB}{\cos. C}$. Substituez cette valeur dans l'analogie infinitésimale (619), vous aurez l'infinitésimale (628).

714. Si au lieu de $AC = 90^\circ$, on avoit $BC = 90^\circ$, on auroit alors (VII. 11°), $\cos. C = \frac{\cos. AB}{\sin. AC}$, et (619), $-\delta BC : \delta B :: 1 : \cot. C$. Connoissant les deux côtés constants, on trouveroit, par l'équation, l'angle C, qui serviroit ensuite pour résoudre l'analogie. C'est à quoi se réduit la formule compliquée $\delta B : \delta BC :: \cos. AB : \sqrt{(\sin.^2 AC - \cos.^2 AB)}$ que donne l'*Almanach astronomique* de Berlin pour l'année 1750. Mais nous verrons (764), que cette analogie est assez défectueuse pour l'usage auquel on l'applique.

715. La première analogie (629) se trouve en différenciant l'équation (VII. 26°). Le second rapport contient quatre parties du triangle, ce qui s'écarte du système général de la table; mais il n'est pas possible de simplifier davantage cette analogie, l'une des plus utiles de cette table, comme on le verra (Chap. XXI).

Quand un des côtés constants est de 90° , la formule (VII. 26°) devient $\cos.BC = \cos.A \sin.AB$, ou $\cos.BC = \cos.A \sin.AC$. En différentiant l'une ou l'autre de ces équations, on aura la première analogie (632).

716. Quand $BC = 90^\circ$, on a (VII. 11°), $\cos.C = \frac{\cos.AB}{\sin.AC}$. Les deux côtés constants supposés connus, cette équation donnera l'angle C, qu'on emploiera ensuite pour résoudre l'analogie (631), sans qu'il soit besoin d'introduire un radical (760) de la forme de l'expression citée (714).

717. La formule (VII. 16°) donne $\cot.B = \sin.AB \cot.AC \times \coséc.A - \cos.AB \cot.A$. Changeons les signes; différencions, en prenant (712) la différentielle de la cosécante; adoptons pour δA le signe négatif; mettons $2 \sin.\frac{1}{2} \delta A \cos.\frac{1}{2} \delta A$ au lieu de $\sin.\delta A$: enfin substituons la valeur (VII. 34°) de $\cot.AC$, et (II. 4°) $\cos.A \cos.(A - \frac{1}{2} \delta A) + \sin.A \sin.(A - \frac{1}{2} \delta A)$ au lieu de $\cos.\frac{1}{2} \delta A$; réduisons et nous aurons la première analogie (633).

En substituant dans celle-ci la valeur (VII. 29°) de $\cos.AB$, réduisant le dernier terme de l'analogie à un même dénominateur, et observant que $\sin.A \cos.\overline{A} - \frac{1}{2} \delta \overline{A} - \cos.A \sin.\overline{A} - \frac{1}{2} \delta \overline{A} = \sin.\frac{1}{2} \delta A$, (II. 2°), on aura la première analogie (634).

La première (635) s'obtient en divisant l'une par l'autre les analogies différentielles finies (619, 629), et substituant la valeur (VII. 24°) de $\sin.AB$. Quoique cette analogie contienne quatre parties du triangle dans le second rapport, j'ai cru ne devoir pas l'omettre, parcequ'elle correspond à une infinitésimale qui n'en contient que trois.

Les analogies (638 à 642) s'obtiennent en changeant B en C et C en B dans les analogies (633 à 637).

718. Quand $AB = 90^\circ$, on a (VII. 16°), $\tan.B = \sin.A \tan.AC$, et (VII. 17°), $\cot.C = -\cos.AC \cot.A$. En différenciant (683) chacune de ces deux équations, on aura les premières analogies (643, 644).

Fig. 66 Dans le même cas, on a (VII. 12°), $\cos.C = -\cos.A \cos.B$. Si l'on substitue cette valeur dans la première analogie (644), $\sin.\delta A$ devient négatif, et l'analogie se change en celle-ci, $-\sin.\delta A : \sin.\delta C :: \sin.(A - \delta A) : \sin.(C + \delta C) \cos.B$. Mais dans le triangle ABD, on a $\sin.BAD = \sin.BD \sin.D$, (448), ou $\sin.(A - \delta A) = \sin.(BC - \delta BC) \sin.(C + \delta C)$. Substituons cette valeur dans la dernière analogie ci-dessus, et nous en tirerons la première (645).

Enfin quand $AB = 90^\circ$, le triangle ABD donne (VII. 28°), $\cos.AD = \cos.ABD \sin.BD$, ou $\sin.(BC - \delta BC) = \frac{\cos.AC}{\cos.(B + \delta B)}$. En substituant cette valeur dans la première analogie (645), on aura la première (646).

719. Toutes les analogies (647 à 679) se trouvent en prenant les parties du triangle opposées à celles que renferment les analogies (614 à 646), et faisant usage du triangle supplémentaire, après avoir changé les signes conformément à ce que nous avons fait (705). Au surplus, pour diminuer la difficulté relativement aux signes, j'ai renvoyé à la table VII : c'est de cette table que j'ai tiré les valeurs dont les substitutions m'ont donné celles d'entre les analogies infinitésimales, que j'ai formées par cette voie.

Dans la première analogie (652) on observera qu'au lieu de donner au troisième terme le signe négatif, tel qu'il devoit l'avoir, j'ai rendu le premier terme positif : ce qui a lieu dans plusieurs des analogies suivantes. Dans l'analogie (661), le quatrième terme est celui qui seroit négatif, si l'on ne rendoit pas le premier terme positif.

Pour tirer la première analogie (662) de la première (629), il ne faut pas changer les signes dans celle-ci.

Dans le premier rapport de l'analogie finie (665), j'ai préféré les signes positifs, pour conserver l'uniformité avec les analogies précédentes.

S'il reste quelques difficultés pour l'intelligence des signes dans
les

les analogies (647 à 679), on pourra chercher la démonstration directe de ces analogies, par les méthodes que j'ai employées pour démontrer les analogies correspondantes (614 à 646).

720. On observera que la dernière analogie (679), dont nous ferons usage (775), n'exigeant que deux données AC et B pour faire connaître le rapport entre les deux différentielles, cette analogie est préférable à celle que La Caille a donnée, et qui est, en changeant les lettres employées par cet Auteur, $\Delta BC : \Delta AB :: \sin. B \sin. BC : \frac{1}{2} \sin. 2 AC$; de sorte qu'elle exige que l'on connoisse non seulement AC et B, mais encore BC.

Réflexions et explications sur l'usage des analogies (541 à 679).

721. Peut-être ne verra-t-on pas au premier coup d'œil quelle est l'utilité des analogies différentielles finies, analogies absolument nouvelles, et dont la forme est souvent compliquée.

1°. Ces analogies renferment la solution immédiate, et ordinairement la plus simple, des problèmes relatifs à deux triangles obliquangles ayant deux parties communes ou égales, lorsque l'énoncé du problème conduit à la considération de quelques différences entre les parties de l'un de ces triangles et les parties de l'autre : nous en verrons divers exemples (Chap. XXI).

2°. Les analogies différentielles finies apprendront au Calculateur ce qu'il y a de négligé dans les infinitésimales correspondantes; de sorte qu'en se servant de celles-ci, il saura à-peu-près à quelle erreur il s'expose, et qu'il pourra ou diminuer cette erreur ou l'éviter, en ayant recours aux analogies finies; avantage réel, surtout quand les différentielles sont divisées ou multipliées par des quantités voisines de zéro ou de l'infini, parcequ'alors les analogies infinitésimales sont sujettes à des erreurs énormes, et même infiniment grandes.

3°. Cet avantage s'étend aussi aux analogies infinitésimales qui n'ont point d'analogies finies correspondantes. Car on peut former

celles-ci, sinon rigoureusement, du moins très approchées, même lorsque les *différences* sont de quelques degrés, en procédant comme il suit.

722. Je suppose, par exemple, qu'ayant à employer l'analogie infinitésimale (636), on desire d'atteindre la plus grande exactitude qu'il sera possible. Comme cette analogie est tirée de la précédente, je simplifie d'abord le second rapport de l'analogie différentielle finie (635), par une supposition à-peu-près exacte. Pour cet effet, j'établis ce principe, que toutes les parties variables d'un triangle quelconque ABC arrivent en même temps à la moitié de leurs variations respectives, que, par exemple, quand A est devenu $A - \frac{1}{2}\delta A$, alors aussi BC se trouve être $BC - \frac{1}{2}\delta BC$, et ainsi des autres variables. Cette supposition n'est certainement pas rigoureuse; mais en général elle approche très fort de la vérité, lorsque les variations ne sont que de peu de degrés; elle est même très exacte dans les cas ordinaires, où les *différences* sont rarement d'un degré. Cela posé, comme AB, AC sont les parties constantes dans les analogies que nous avons à considérer, nous aurons, par la règle (448), $\sin.(BC - \frac{1}{2}\delta BC) : \sin.(A - \frac{1}{2}\delta A) :: \sin.AB : \sin.(C + \frac{1}{2}\delta C)$. Substituant le second au premier de ces rapports dans l'analogie finie (635), et écrivant aussi $\sin.AB : \sin.C$ au lieu de $\sin.BC : \sin.A$, cette analogie deviendra $\sin.\frac{1}{2}\delta A : \text{tang}.\frac{1}{2}\delta B :: \sin.(BC - \frac{1}{2}\delta BC) : \sin.AC \cos.(C + \frac{1}{2}\delta C)$, et, pour le remarquer en passant, elle pourroit sous cette forme moins compliquée servir de même à guider dans l'usage de l'infinitésimale (635). Substituons actuellement la valeur de $\cos.(C + \frac{1}{2}\delta C)$, qui, prise (VII. 11^e) et exprimée d'après notre supposition, sera $\frac{\cos.AB - \cos.AC \cos.(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}{\sin.AC \sin.(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}$; nous aurons

$$- \sin.\frac{1}{2}\delta A : \text{tang}.\frac{1}{2}\delta B :: 1 : \frac{\cos.AB - \cos.AC \cos.(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}{\sin.^2 (BC - \frac{1}{2}\delta BC)}.$$

C'est l'analogie dont il faudroit se servir au lieu de l'analogie (636), si l'on desiroit une grande approximation.

723. On peut employer $-\delta A : \delta B$ au lieu de $-\sin.\frac{1}{2}\delta A : \text{tang}.\frac{1}{2}\delta B$, en ayant égard aux limites que j'ai assignées (259); et l'usage apprendra que souvent même on peut passer ces limites sans inconvénient dans les analogies différentielles des triangles sphériques, parceque les deux premiers termes sont de même nature, et que, par conséquent, en employant les arcs au lieu de leurs lignes trigonométriques, les deux erreurs se compensent de manière que celle qui peut affecter le résultat est ordinairement insensible.

724. Essayons pour second exemple de convertir l'analogie (637) en une autre à très peu près rigoureuse; opération moins facile que la précédente, parceque cette analogie est tirée d'une autre infinitésimale (636) qui n'a point d'analogie différentielle finie correspondante, de sorte qu'il faut remonter à la première analogie (635). J'emploie les réductions déjà faites, et je substitue dans la dernière analogie (722) la valeur (VII. 28^e) de $\cos.AC$ prise comme il suit : $\cos.AC = \cos.(B + \frac{1}{2}\delta B) \sin.(BC - \frac{1}{2}\delta BC) \sin.AB + \cos.(BC - \frac{1}{2}\delta BC) \cos.AB$. Au lieu de $\cos.^2(BC - \frac{1}{2}\delta BC)$, je mets $1 - \sin.^2(BC - \frac{1}{2}\delta BC)$, je réduis et j'ai

$$-\sin.\frac{1}{2}\delta A : \text{tang}.\frac{1}{2}\delta B :: 1 : \cos.AB - \frac{\sin.AB \cos.(B + \frac{1}{2}\delta B)}{\text{tang}.(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}.$$

725. On ne se sert ordinairement des analogies infinitésimales que pour chercher la valeur d'une différentielle; et l'on pourroit penser que mes analogies finies ne sont pas susceptibles du même usage, puisqu'elles renferment souvent dans le second rapport les différentielles contenues dans le premier. Mais j'ai déjà donné (281, 282) deux méthodes pour calculer la valeur d'une différentielle précisément dans ce cas. De plus il est nécessaire d'observer que les analogies finies sont toutes rigoureuses, et par conséquent propres à donner la valeur exacte de l'une quelconque des quantités qu'elles contiennent, et non pas seulement de l'une des différentielles.

J'ai marqué d'un astérisque * les analogies au lieu desquelles

Xx ij

on peut employer, et quelquefois même avec avantage, la méthode suivante qui est rigoureuse et que me fournit la table VII. Huit de ces analogies (573, 574, 582, &c.) sont infinitésimales, et n'ont point d'analogie finie correspondante; c'est sur-tout dans le cas de ces huit analogies que la méthode que je vais proposer est avantageuse.

Soit par exemple δC l'inconnue dans l'analogie (546). Puisque AB et A sont les parties constantes relativement à cette analogie, qui d'ailleurs ne renferme point AB, je cherche dans la table VII une valeur de AB exprimée par le moyen de AC, A et C, parties contenues dans cette même analogie. La formule 35^e me donne

Fig. 64 pour le triangle ABC, $\text{tang. AB} = \frac{\sin. AC}{\sin. A \cot. C + \cos. A \cos. AC}$; et pour le triangle ABD, $\text{tang. AB} = \frac{\sin. AD}{\sin. A \cot. D + \cos. A \cos. AD}$. En mettant en équation ces deux valeurs de tang. AB, dans la seconde desquelles je substitue les expressions (680), j'ai
 $(\sin. A \cot. C - \delta C + \cos. A \cos. AC + \delta AC) \sin. AC =$
 $(\sin. A \cot. C + \cos. A \cos. AC) \sin. AC + \delta AC$. Pour simplifier, je divise par cos. A; il reste $\cot. C - \delta C \sin. AC \text{ tang. A}$
 $= (\text{tang. A} \cot. C + \cos. AC) \sin. AC + \delta AC - \sin. AC$
 $\cos. AC + \delta AC$; équation qui donne immédiatement la valeur de $\cot. C - \delta C$, et par conséquent aussi celle de δC .

Si de cette équation on vouloit déduire la valeur de AC, ou celle de $(AC + \delta AC)$, on auroit recours à la méthode (369). Il suffit d'en prévenir une fois pour tous les cas semblables.

726. On peut avoir compris, par les démonstrations que j'ai données des analogies de la table, quel est l'usage qu'on doit faire des signes qui précèdent les différentielles. Mais pour éviter toute équivoque, je préviens 1^o. que dans le second rapport des analogies finies, il est nécessaire d'employer les différentielles avec le signe qui convient au cas que l'on considère. Si, par exemple, on fait usage de l'analogie (545), on doit employer $\text{tang.}(BC + \frac{1}{2}\delta BC)$;

quand le côté BC croît en variant, et $\text{tang.}(BC - \frac{1}{2}\delta BC)$, quand ce côté décroît en variant. 2°. Dans les analogies finies ou infinitésimales, les signes que j'ai adoptés, dans le premier rapport, pour les différentielles ou pour leurs lignes trigonométriques, servent seulement à indiquer que les variations se font toutes deux en un même sens, si les différentielles ont un même signe; ou l'une en croissant, l'autre en décroissant, si les différentielles ont un signe différent. Cette règle suppose que le résultat du second rapport soit positif; elle doit se renverser, lorsque ce résultat est négatif. Ainsi en employant la première analogie (545), on saura, par exemple, que AC et C varient en sens contraire, quand on aura $(BC + \frac{1}{2}\delta BC) < 90^\circ$; et que AC et C varient dans le même sens quand on aura $(BC + \frac{1}{2}\delta BC) > 90^\circ$, car alors $\text{tang.}(BC + \frac{1}{2}\delta BC)$ étant négative, les deux signes négatifs des termes moyens donnent un produit positif. Tel est l'avantage qu'on retirera des signes des différentielles : ils sont aussi d'une utilité réelle (730) pour l'application des méthodes (284, 285).

727. Il y a, dans ma table, plus de 70 analogies qui renferment le cosinus de quelque côté ou de la variation de quelque côté, et qui cependant peuvent se transférer aux triangles rectilignes par le moyen des règles que j'ai données (425). C'est sur-tout en cela que ces règles me paroissent utiles, puisqu'en supposant leur application, une seule table renferme une collection abondante et complète dans son genre des analogies différentielles des triangles soit sphériques soit rectilignes. Ces derniers ne fournissent que quatre analogies finies (279, 10° à 13°) qui soient plus simples que celles qu'on déduiroit des analogies correspondantes des triangles sphériques (635, 640, 629).

Il est clair 1°. que les analogies relatives au cas où l'un des côtés est de 90°, ne peuvent par leur nature se transférer aux triangles rectilignes, puisqu'il est nécessaire pour cela que l'analogie soit applicable à un triangle infiniment petit (425); 2°. que dans le cas où un angle est constant, les analogies qui contiennent dans le

premier rapport les variations des deux autres angles ne peuvent être d'aucune utilité pour les triangles rectilignes, dans lesquels ces deux variations sont nécessairement égales entre elles; 3°. que dans le cas où deux angles sont constants, les analogies qui contiennent la variation du troisième dans le premier rapport, sont encore opposées à la nature des triangles rectilignes. À l'exception de ces trois classes d'analogies, on pourra traduire utilement pour l'usage des triangles rectilignes les autres analogies de ma table : une seulement (573) de ces analogies se réduit à zéro, lorsqu'on lui applique les règles (425).

Observons encore que le premier terme du conséquent du second rapport de l'analogie finie (666) doit se négliger, suivant l'esprit des règles (425), dans l'application de cette analogie aux triangles rectilignes; puisque le produit $\sin.(AC + \frac{1}{2}\delta AC) \sin.AC \sin.(BC + \frac{1}{2}\delta BC)$ représente un infiniment petit du troisième ordre. Cette observation a lieu de même pour la première analogie (671).

Pour donner un exemple de l'application des analogies différentielles sphériques aux triangles rectilignes; si dans la première (546) on fait $\sin.\frac{1}{2}\delta AC = \frac{1}{2}\delta AC$, $\sin.AC = AC$, et qu'on fasse encore $\cos.\frac{1}{2}\delta AC = 1$, $\cos.(AC + \frac{1}{2}\delta AC) = 1$, (425), l'analogie devient $\delta AC : -\sin.\delta C :: AC : \sin.C \sin.(C - \delta C) \cot.A + \sin.(C - \delta C) \cos.C$; et c'est ce qu'on trouve par la Trigonométrie rectiligne, en substituant la valeur de BC (III. 21°) dans l'analogie (279, 1°).

728. J'ai donné des analogies pour le cas où quelque une des parties constantes est de 90°; mais il ne faut pas en conclure que ces analogies sont les seules dont on puisse se servir en pareil cas. Par exemple les analogies (627, 628) données pour le cas où $AC = 90^\circ$ n'excluent pas l'usage des précédentes (619 à 626), dont quelques-unes sont même simplifiées dans ce cas, parcequ'on a $\sin.AC = 1$, $\cos.AC = 0$ et $\cot.AC = 0$, (42). Mais nous avons cru devoir donner aussi les analogies (627, 628), parce-



qu'elles ne se déduisent pas immédiatement des précédentes simplifiées. Il en est de même des autres analogies pareilles, à l'exception des analogies (548, 564, 568) : si je n'ai pas omises celles-ci, c'est à cause de leur rapport avec les analogies (549, 563, 569).

On observera que, lorsque le second rapport d'une analogie contient la tangente de l'arc de 90° , il faut éliminer cette tangente, en multipliant le rapport par la cotangente du même arc : autrement l'analogie ne pourroit être simplifiée et ne seroit d'aucun usage, puisqu'elle contiendrait une expression de valeur infinie.

729. La Caille et d'autres Auteurs ont donné quelques analogies infinitésimales pour le cas où quelque'une des parties variables est de 90° . Pour moi, je me suis borné à la considération des cas où quelque'une des parties constantes est de 90° , afin que ma table fournît les analogies différentielles finies même pour les triangles constamment ou rectangles ou rectilignes : quoique souvent elles soient moins commodes pour le calcul numérique que ne le sont les proportions (441 à 457), il m'a semblé qu'elles devoient être rapportées, ne fût-ce, comme nous l'avons dit (721, 2°.), que pour servir d'avertissement au Calculateur qui emploiera les infinitésimales correspondantes.

Mais si j'eusse voulu considérer aussi chacune des parties variables comme étant de 90° , et donner les analogies relatives à chacune de ces suppositions, ma table seroit devenue beaucoup plus longue, et n'eût pas été beaucoup plus utile. Je me contenterai donc d'indiquer par un exemple comment on peut parvenir en pareils cas à des expressions fort simples. Je suppose qu'on ait à employer la première analogie (551), et que $BC = 90^\circ$: on aura $\cos. BC = 0$, et $\sin.(BC + \frac{1}{2}\delta BC) = \cos.\frac{1}{2}\delta BC$; ensorte que l'analogie deviendra $\sin.\frac{1}{2}\delta AC : \sin.\frac{1}{2}\delta BC :: \cos.\frac{1}{2}\delta BC \sin.AC : \cos.\frac{1}{2}\delta AC \cos.AB$. Convertissant cette analogie en équation, et

réduisant à l'aide de la formule (I. 6^e), on trouve $\sin. \delta AC : \sin. \delta BC :: \sin. AC : \cos. AB$, analogie déjà fort simple. Mais quand $BC = 90^\circ$, $\cos. C = \frac{\cos. AB}{\sin. AC}$, (VII. 11^e); donc on a $\sin. \delta AC : \sin. \delta BC :: 1 : \cos. C$, analogie plus simple encore, et qu'on peut employer au lieu de la première (550), lorsque $BC = 90^\circ$.

730. Lorsque le triangle variable n'aura *qu'une partie constante*, ou même *qu'il n'en aura point*, les analogies (541 à 679) serviront également, avec les conditions et en suivant les règles exposées (283, 284, 285) pour les triangles rectilignes.

Il me reste à observer qu'il n'y a jamais lieu d'employer R'' , (272), dans les analogies infinitésimales de la Trigonométrie sphérique, attendu que les deux variations qui forment le premier rapport sont toujours de même nature, et que par conséquent l'une et l'autre se prennent également en secondes.

Exemples du calcul des Analogies différentielles des Triangles sphériques.

Fig. 48 731. Supposons que dans l'exemple III, (500), il puisse y avoir une erreur de 1° sur le côté BD, ou, ce qui revient au même, que les moyens employés pour mesurer le chemin du bâtiment puissent laisser une incertitude d'un degré. On demande quelle seroit en ce cas l'erreur dans la longitude calculée ou dans l'angle au pôle. Il y a alors dans le triangle ABD deux côtés constants AB, AD, et on cherche la variation de A dépendante de celle du côté opposé BD; circonstances qui sont celles des analogies (629), dans lesquelles il faut seulement changer C en D.

On observera d'abord que si l'on ne sait pas en quel sens l'erreur δBD a été commise, on ne peut pas faire usage de l'analogie différentielle finie, dans laquelle il faut employer $(BD \pm \frac{1}{2} \delta BD)$. Je fais donc comme il suit le calcul de l'infinitésimale.

log.

$$\begin{aligned}
 \log.(\delta BD = 3600'') &= 3,556303 \\
 \log.\sin.(BD = 37^\circ 25') &= 9,783623 \\
 (500), \text{ compl. log.}(\sin.AB \sin.AD) &= 0,204796 \\
 \text{compl. log.}\sin.(A = 27^\circ 8') &= 0,340975 \\
 \log.\delta A &= \underline{3,885697}
 \end{aligned}$$

Donc un degré d'erreur sur le côté BD en produit une de $2^\circ 8'$ environ sur l'angle A, dans le même sens (726).

732. Si l'on n'avoit pas les analogies infinitésimales, il faudroit, pour arriver à ce résultat, calculer deux fois l'exemple III, (500); une première fois en faisant $BD = 36^\circ 25'$, et une seconde en faisant $BD = 38^\circ 25'$; ensuite on prendroit la demi-différence des deux valeurs de A que fourniroient ces deux calculs. Les analogies infinitésimales sont donc précieuses lorsqu'on ignore si la variation donnée est positive ou négative. Mais au contraire si on le sait, comme il arrive dans la plupart des cas auxquels on les a appliquées jusqu'à présent, ce même exemple fait reconnoître leur imperfection, et par conséquent l'utilité des analogies finies que j'ai proposées.

733. En effet supposons que l'erreur δBD soit en plus. En employant dans le calcul (731), $\sin.(BD + \frac{1}{2}\delta BD) = \sin.37^\circ 55'$ au lieu de $\sin.BD$, et $\sin.(A + \frac{1}{2}\delta A) = \sin.28^\circ 12'$ au lieu de $\sin.A$, comme le prescrit l'analogie finie, on trouve $\delta A = 2^\circ 5' 2''$. L'usage de l'analogie infinitésimale en pareil cas produiroit donc environ $3'$ d'erreur dans la valeur de δA .

Si on vouloit cette valeur avec toute la précision possible, on emploieroit dans le calcul précédent $\sin.28^\circ 10' \frac{1}{2}$ au lieu de $\sin.28^\circ 12'$, et on trouveroit $\delta A = 2^\circ 5' 8''$.

Quant à l'emploi des arcs au lieu des sinus dans le premier rapport de l'analogie, l'épreuve démontreroit que la différence qui en résulte dans le calcul est insensible, comme je l'ai avancé (723).

734. Avec les mêmes données dans le triangle ABD, je sup-

Y. y

pose actuellement que les valeurs de AB et BD soient considérées comme exactes, et qu'il y ait une incertitude d'un degré sur le côté AD, c'est-à-dire sur la latitude du lieu où se trouve le vaisseau. On demande quelle erreur il en résultera pour la longitude, c'est-à-dire pour la valeur de Λ . Alors les deux côtés AB, BD sont constants, et l'on cherche la variation de l'angle opposé à BD, dépendante de celle du troisième côté. Changeant B en A, A en B et D en C, pour que le triangle BAD de la figure puisse se comparer au triangle ABC de la table, j'observe que c'est le cas des analogies (619 à 622). Mais comme nos données sont $B = 27^{\circ} 8'$, $AB = 71^{\circ} 30'$, $AC = 37^{\circ} 25'$, $BC = 41^{\circ} 9'$, et $\angle BC = 1^{\circ}$, il est facile de voir qu'il faut avoir recours aux analogies (620). Je prends l'infinitésimale, et je fais le calcul comme il suit :

log. (ΔBC = 3600")	= 3,556303	...	3,556303
compl. log. sin. B	= 0,340975	log. cot. B	= 0,290340
log. cot. AB	= 9,524520	log. — cot. BC	= 0,058541
	<u>3,421798</u>		<u>3,905184</u>

Ces deux logarithmes répondent à $44^{\circ} 1''$, 2 et à $-2^{\circ} 13' 58''$, 7; et par conséquent on a $\delta B = -1^{\circ} 29' 57''$. Dans ce cas les variations δBC et δB se font dans le même sens, puisqu'elles ont un signe différent dans le premier rapport de l'analogie, et que le résultat du second rapport est négatif (726).

J'ai donné le signe négatif au logarithme 3,905184, non qu'il soit en effet un logarithme négatif (164), mais parcequ'il correspond à une quantité négative. C'est au surplus ce qu'il est toujours facile de distinguer.

735. Cherchons maintenant quelle est l'erreur de la formule infinitésimale dont nous venons de nous servir. Pour cela je suppose que l'on sache que la variation de BC est en moins. Je ferai usage du second rapport de l'analogie finie (620), et en faisant le calcul je supposerai la valeur de δB absolument inconnue, pour donner un exemple de la méthode enseignée (281).

$\log.(\Delta BC = 3600'') = 3,556303$	$3,556303$
$\log. \cot. AB = 9,524520$	$\log. - \cos. B = 9,949364$
$\log. \sin. (BC - \frac{1}{2} \Delta BC) = 9,813872$	$\log. \cos. = 9,880072$
$\text{compl. log. sin. } (BC - \Delta BC) = 0,190581$	$0,190581$
$\log. \text{constant } 3,085276$	$\log. \text{const.} - 3,576320$
$\text{compl. log. sin. } B = 0,340975$	$0,340975$
$3,426251$	$- 3,917295$

Ces logarithmes donnent, pour valeur approchée, $\Delta B = 44' 28'' - 2^\circ 17' 46'' = - 1^\circ 33' 18''$. Ce résultat étant négatif, la variation de ΔB est dans le même sens que celle de BC par les raisons déjà exposées; aux logarithmes constants ci-dessus on doit donc ajouter $\text{compl. log. sin. } (B - \frac{1}{2} \Delta B = 26^\circ 21')$; ce qui donne, pour valeur plus approchée, $\Delta B = 45' 42'' - 2^\circ 21' 33'' = - 1^\circ 35' 51''$. Enfin employant, d'après cette approximation, $\sin. (B - \frac{1}{2} \Delta B = 26^\circ 20')$, on a pour valeur exacte, $\Delta B = - 1^\circ 35' 55''$.

Donc dans cet exemple l'analogie infinitésimale seroit en erreur de 6'.

On verra (760, 764) des erreurs plus graves résultantes de l'emploi des analogies infinitésimales, qui cependant sont les seules qui aient été en usage jusqu'à présent.

736. Si l'on vouloit avoir directement et par un seul calcul la valeur de ΔB , quelle que fût d'ailleurs sa grandeur, on développeroit $\sin. (B + \frac{1}{2} \Delta B)$, comme nous l'avons dit (282), ou bien on mettroit $\frac{1}{2} \cos. B - \frac{1}{2} \cos. (B + \Delta B)$ au lieu de $\sin. (B + \frac{1}{2} \Delta B)$ $\sin. \frac{1}{2} \Delta B$, (II. 16'). Alors appelant p le produit du premier et du quatrième terme de l'analogie, on auroit $\cos. (B + \Delta B) = \cos. B - 2p$. Si dans le calcul précédent on met $\sin. (\frac{1}{2} \Delta BC = 30')$ au lieu de ΔBC , on trouve $p = - 0,0061882$, en faisant abstraction du signe négatif de $\sin. \frac{1}{2} \Delta BC$, qui ne doit servir que d'avertissement (726). Mais en faisant usage des sinus naturels, $\cos. B = 0,8899476$: donc $\cos. (B + \Delta B) = 0,8899476 +$

Yy ij

$0,0123764 = 0,9023240 = \cos. 25^{\circ} 32' 5''$. Or $B = 27^{\circ} 8'$; donc $\delta B = - 1^{\circ} 35' 55''$.

Si l'on cherchoit de même directement la valeur finie de δBC , l'opération seroit plus compliquée : on arriveroit à une équation dans laquelle seroient contenus $\sin. \delta BC$ et $\cos. \delta BC$, et l'on résoudroit cette équation par la méthode expéditive que j'ai donnée (369). Mais cette recherche de δBC est un des cas dans lesquels il est mieux d'avoir recours à la méthode (725).

CHAPITRE XX.

Résumé sur l'application de la Trigonométrie à la résolution des problèmes.

737. ÉTANT donné un problème quelconque, pourvu qu'il puisse se résoudre par la seule considération des triangles, on en cherchera la solution dans cette Trigonométrie de la manière suivante. 1°. Si les données et la chose cherchée appartiennent à un seul triangle, la solution se trouvera dans l'un des Chapitres VIII, IX, XV, XVI, XVIII. 2°. Si les données et la chose cherchée se trouvent distribuées en deux triangles, on en aura la solution dans les Chapitres X ou XIX, ou en opérant d'après les méthodes (322, 323, 342), ou en ayant recours aux formules (441 à 457) selon les cas. 3°. Si les données et la chose cherchée sont tirées de plus de deux triangles, on considérera deux triangles à la fois, on en cherchera les solutions d'après ce que nous venons de dire, et on les liera l'une à l'autre, selon que le cas le permettra, pour arriver à la solution finale demandée.

738. Au premier aspect ces avertissements pourront sembler au moins inutiles. Mais on verra dans le Chapitre suivant avec

quelle facilité , quelle simplicité nous avons résolu la plus grande partie des problèmes de l'Astronomie ; soit parce qu'en considérant leurs conditions nous avons suivi la marche facile que nous venons d'indiquer , soit parceque nous avons fait usage d'expressions commodes des différences finies des lignes trigonométriques , expressions qui jusqu'à présent manquoient aux Traités de Trigonométrie : et cet essai sur les problèmes de l'Astronomie nous donne lieu de croire que dans les autres Sciences ou Arts soumis au Calcul , il y a peu de problèmes dont ce Traité ne donne promptement la solution , lorsqu'ils peuvent être résolus par la seule considération des triangles.

CHAPITRE XXI.

Applications de la Trigonométrie à l'Astronomie.

739. CE Chapitre suppose le Lecteur initié dans l'Astronomie dont les éléments ne peuvent entrer dans ce Traité : ceux qui ne les connoîtront pas feront abstraction des théories et des dénominations , s'ils veulent parcourir ce qui suit , et se borneront à étudier les opérations analytiques , qui sont d'un usage général dans les Mathématiques. Je suivrai autant qu'il me sera possible l'ordre des problèmes contenus dans l'Astronomie de M. de la Lande , et je renverrai souvent à cet Ouvrage , le meilleur sans contredit , le plus complet et le plus accrédité sur la science sublime de l'Astronomie dont il augmente encore l'intérêt. J'omettrai les problèmes de moindre importance , ainsi que ceux qui regardent la détermination des éléments de l'orbite d'une planete ou d'une comete , problèmes dont je me réserve de parler ailleurs. J'omettrai de même , pour ne me pas répéter , les problèmes du plus court cré-

puscule et du plus grand éclat de Vénus, dont j'ai donné les solutions dans l'*Encyclopédie méthodique* qui s'imprime actuellement à Paris.

740. *Connoissant l'ascension droite et la déclinaison d'un astre, et l'obliquité de l'écliptique, trouver la longitude et la latitude de cet astre.*

Fig. 67 Soit P le pôle boréal de l'équateur LQ, E le pôle boréal de l'écliptique LT, L le premier point du belier, S l'astre que je suppose dans la latitude boréale et dans le premier quart de l'équateur et de l'écliptique; position à laquelle il est à propos de rapporter la solution générale des problèmes, parcequ'en faisant sur les signes des lignes trigonométriques les changements convenables, la solution satisfait de même à toute autre position. On a donc $PL = 90^\circ = EL$, (382), et $LPE = 90^\circ = LEP$, (390). Or LM ou LPM, (386), est l'ascension droite donnée; donc $SPE = 90^\circ + asc. dr.$ La déclinaison donnée est SM, et par conséquent $PS = 90^\circ - décl.$ L'obliquité de l'écliptique est $TLQ = PE$, (391). On connoît donc trois parties du triangle PSE, savoir PS, PE et SPE. On cherche 1°. la longitude LN ou LEN, qu'on peut connoître par le moyen de l'angle $PES = 90^\circ - long.$; 2°. la latitude SN, qu'on trouvera par le moyen de $ES = 90^\circ - lat.$ Par conséquent le problème n'exige que la résolution du seul triangle PES.

Étant donnés deux côtés PS, PE, et l'angle compris SPE, il y a (470 et suiv.) quatre manieres de déterminer l'angle PES. La seconde est la plus courte : la quatrième est un peu plus laborieuse; mais elle a l'avantage de faire connoître en même temps l'angle de position PSE. Lorsque la connoissance de cet angle est inutile, je préfère la maniere qui, en apparence, est la plus longue, c'est-à-dire la première, parcequ'elle n'exige d'attention que pour les signes, (42, 744); tandis que les trois autres peuvent induire en erreur dans bien des cas, si l'on n'a pas sous les yeux une figure à-peu-près exacte. Appliquant donc la première solution au triangle

PES, on a $\text{tang. PES} = \frac{\sin. \text{SPE}}{\sin. \text{PE} \cot. \text{PS} - \cos. \text{PE} \cos. \text{SPE}}$, on $\cot. \text{PES} = \frac{\sin. \text{PE} \cot. \text{PS}}{\sin. \text{SPE}} - \cos. \text{PE} \cot. \text{SPE}$. Substituant dans cette équation les dénominations ou valeurs de PES, PE, &c. données ci-dessus, et observant que $\cot. \text{SPE} = -\cot. (90^\circ + \text{asc. dr.})$, (36), on a

$$\text{tang. long.} = \frac{\sin. \text{obl. tang. décl.}}{\cos. \text{asc. dr.}} + \cos. \text{obl. tang. asc. dr.}$$

ou, pour plus de commodité dans le calcul,

$$\text{tang. long.} = \cos. \text{obl. tang. asc. dr.} \left(\frac{\text{tang. obl. tang. décl.}}{\sin. \text{asc. dr.}} + 1 \right).$$

En observant les regles des signes, (42, 744), on aura toujours la longitude dans le quart de l'écliptique auquel l'astre correspondra, pourvu qu'on fasse encore attention que si l'ascension droite est dans le premier ou dans le dernier quart, la longitude ne peut jamais être dans le second ou dans le troisième, et que si l'ascension droite est dans le second ou dans le troisième, la longitude ne peut jamais être dans le premier ou dans le dernier.

741. Si dans la formule que nous venons de trouver il déplaît d'avoir à chercher des logarithmes dans deux tables, on pourra n'employer que les tables trigonométriques, en divisant le calcul en deux équations formées comme je l'ai enseigné (198, 203, 202):

$$\text{tang. B} = \sqrt{\frac{\text{tang. obl. tang. décl.}}{\sin. \text{asc. dr.}}};$$

$$\text{tang. long.} = \frac{\cos. \text{obl. tang. asc. dr.}}{\cos. B}.$$

Lorsque la quantité sous le radical sera négative, au lieu de ces formules on aura recours aux suivantes :

Si $-\frac{\text{tang. obl. tang. décl.}}{\sin. \text{asc. dr.}}$ est < 1 , on a

$$\cos. B = \sqrt{-\frac{\text{tang. obl. tang. décl.}}{\sin. \text{asc. dr.}}},$$

$$\text{tang. long.} = \cos. \text{obl. tang. asc. dr.} \sin. B.$$

Si $-\frac{\text{tang. obl. tang. décl.}}{\sin. \text{asc. dr.}}$ est > 1 , on a

$$\frac{1}{\cos. B} = \sqrt{-\frac{\text{tang. obl. tang. décl.}}{\sin. \text{asc. dr.}}},$$

$$\text{tang. long.} = -\cos. \text{obl. tang. asc. dr.} \text{ tang. } B.$$

Fig. 67 On observera que pour passer d'une ligne trigonométrique de l'angle auxiliaire B à une autre ligne trigonométrique du même angle, il n'est pas nécessaire de calculer cet angle lui-même en degrés, minutes, &c., ainsi que nous l'avons fait voir (200).

742. Pour trouver la latitude, seconde partie du problème (740), je préfère de même la première solution (476), d'autant plus que les logarithmes, à l'exception d'un seul, se trouvent dans le calcul de la longitude. J'ai $\cos. SE = \cos. PE \cos. PS + \sin. PE \sin. PS \cos. SPE$, et substituant les dénominations (740),

$$\sin. lat. = \cos. obl. \sin. décl. - \sin. obl. \cos. décl. \sin. asc. dr.$$

ou, pour plus de commodité dans le calcul,

$$\sin. lat. = \cos. obl. \sin. décl. (1 - \tan. obl. \cot. décl. \sin. asc. dr.).$$

743. Et à l'imitation de ce que nous venons de faire (741);

Si $\tan. obl. \cot. décl. \sin. asc. dr.$ est < 1 , on a

$$\cos. C = \sqrt{\tan. obl. \cot. décl. \sin. asc. dr.}$$

$$\sin. lat. = \cos. obl. \sin. décl. \sin.^2 C.$$

Si $\tan. obl. \cot. décl. \sin. asc. dr.$ est > 1 , on a

$$\frac{1}{\cos. C} = \sqrt{\tan. obl. \cot. décl. \sin. asc. dr.}$$

$$\sin. lat. = - \cos. obl. \sin. décl. \tan.^2 C.$$

Lorsque la quantité sous le signe radical sera négative, au lieu des formules précédentes on aura

$$\tan. C = \sqrt{- \tan. obl. \cot. décl. \sin. asc. dr.}$$

$$\sin. lat. = \frac{\cos. obl. \sin. décl.}{\cos.^2 C}.$$

Les solutions que j'ai données pour le problème (740) exigent la recherche de douze logarithmes, c'est-à-dire d'un seul de plus que si j'eusse fait usage des solutions (472, 477): mais deux ou trois de ces logarithmes ne varient point pour une même époque,

ce

ce qui est un avantage lorsqu'on a plusieurs calculs à faire pour cette époque. Les solutions données par M. de la Lande (*Astr.* 900) exigent de même douze logarithmes.

744. Dans les formules précédentes, et dans toutes celles de ce Chapitre, on observera que pour la *déclinaison australe*, *sin. décl.* est *négalif*, puisque $\sin. décl. = \cos. PS$, et qu'alors PS est $> 90^\circ$. La même règle a lieu pour *tang. décl.* et *cot. décl.* Mais $\cos. décl.$ ou $\sin. PS$ est toujours positif, puisqu'on ne peut jamais avoir $PS > 180^\circ$.

Ces observations s'appliquent de même aux lignes trigonométriques de la latitude.

745. *Connoissant la longitude et la latitude d'un astre, avec l'obliquité de l'écliptique, trouver l'ascension droite et la déclinaison de cet astre.*

En faisant (VII. 13°, 28°), $A = P$, $B = E$, $C = S$, on a, dans le triangle PES, $\cot. P = \frac{\sin. PE \cot. ES - \cos. PE \cos. E}{\sin. E}$, et $\cos. PS = \cos. E \sin. ES \sin. PE + \cos. ES \cos. PE$. Changeant les signes dans la première de ces formules, et substituant les dénominations (740), on a

$$\tan. asc. dr. = \tan. long. \cos. obl. - \frac{\tan. lat. \sin. obl.}{\cos. long.},$$

$$\sin. décl. = \sin. long. \cos. lat. \sin. obl. + \sin. lat. \cos. obl.$$

Comme on fait usage de ce problème bien moins souvent que de l'inverse (740), je laisse à ceux qui désireront des transformations analogues à celles que j'ai données (741, 743) le soin de les composer.

746. *Connoissant les différences d'ascension droite et de déclinaison entre deux astres, et la distance réciproque de ces astres étant un arc sensiblement rectiligne, trouver les différences de longitude et de latitude.*

Les méthodes que j'ai vu employer jusqu'à présent pour la solution de ce problème important, dont l'usage est continuel,

sont toutes sujettes à une erreur de quelques secondes, plus ou moins, selon les cas.

Fig. 67 Soient L, S les centres de deux astres, et leur distance LS un petit arc sensiblement rectiligne (tel que seroit par exemple un arc de $1^{\circ} 20'$, dont la différence à la corde n'est (152) que de $0''$, 1); soit LQ l'un des parallèles de l'équateur, et P son pôle, LT l'un des parallèles de l'écliptique, et E son pôle: la différence donnée d'ascension droite est LPS, SM celle de déclinaison; les différences cherchées de longitude et de latitude sont LES et SN.

En multipliant LPS par $\sin.PL$, on a l'arc de parallèle LM, (394); de même, si l'on avoit la valeur de LN, en la divisant par $\sin.EL$, on auroit celle de LES: et alors, pour avoir la solution cherchée, il suffiroit de résoudre les petits triangles SML, SNL qui contiennent les quantités LM, LN, SM, SN. Aussi la méthode la plus usitée consiste-t-elle en effet à résoudre ces triangles en les considérant comme rectilignes rectangles, et en supposant connu l'angle de position $PSE = NSH$, et de plus que $NSH = 90^{\circ} - NHS = MLN$. De cette dernière supposition et de celle des angles droits naît l'erreur que j'ai démontrée (534 à 539).

Si l'on suppose $M = 90^{\circ} = N$, et qu'on observe que l'hypothénuse du triangle LMS est commune au triangle LNS; alors, en employant les formules (270, 271), dans lesquelles on substituera L à C, S à B, N à D, M à A, on aura pour tous les cas, $LN = LM \times \cos.MLN \pm SM \times \sin.MLN$, et $SN = SM \times \cos.MLN \mp LM \times \sin.MLN$, ou

$$\delta long. = \frac{1}{\cos.lat.} (\delta asc.dr. \cos.décl. \cos.ang.posit. \pm \delta décl. \sin.ang.posit.);$$

$$\delta lat. = \delta décl. \cos.ang.posit. \mp \delta asc.dr. \cos.décl. \sin.ang.posit.$$

En examinant les différents cas, on trouve que les signes inférieurs ont lieu en deux circonstances, pourvu néanmoins qu'elles n'existent pas en même temps; c'est-à-dire 1°. dans les signes descendants, ou, ce qui revient au même, quand les astres corres-

pondent au second ou au troisieme quart de l'écliptique; 2°. lorsque l'astre le plus avancé en ascension droite est aussi le plus éloigné du pôle boréal de l'équateur. Dans les autres cas, ou lorsque ces deux circonstances existent en même temps, ce sont les signes supérieurs qui ont lieu.

De plus, lorsque par la formule, $\Delta long.$ se trouvera négative; dans ce cas l'astre le plus avancé en ascension droite sera le moins avancé en longitude; et lorsque par la formule, $\Delta lat.$ se trouvera négative, l'astre le plus voisin du pôle boréal de l'équateur sera le plus éloigné du pôle boréal de l'écliptique.

747. Pour vérifier les formules précédentes; soit L le centre de la lune, S le centre du soleil, et par conséquent $ES = 90^\circ$; soit $LS = 32'$, $MS = 16' = \Delta decl. \odot \odot$, $PE = 23^\circ 28'$, $PS = 67^\circ$, et par conséquent $PM = 67^\circ 16' = PL$.

Dans le triangle rectilatre PES, connoissant PE, PS, on trouve (440) pour la valeur de l'angle de position PSE du soleil, $4^\circ 47' 18''$, 7; pour celle de l'angle SPE, $167^\circ 53' 57''$, 3, ce qui donne $asc.dr. \odot = 77^\circ 53' 57''$, 3; et pour la valeur de l'angle PES, $11^\circ 7' 33''$, 5, ce qui donne $long. \odot = 78^\circ 52' 26''$, 5. En résolvant le triangle PLS dans lequel les trois côtés sont donnés, on trouve $PSL = 119^\circ 54' 8''$, 6, et $SPL = 30' 4''$, 6 $= \Delta asc.dr. \odot \odot$. Enfin dans le triangle rectilatre LES, connoissant LS et $ESL = PSL - PSE = 115^\circ 6' 49''$, 8, on trouve $SEL = 28' 58''$, 5 $= \Delta long. \odot \odot$, et $EL = 90^\circ 13' 34''$, 9, ce qui donne $\Delta lat. \odot \odot$ ou $lat.austr. \odot = 13' 34''$, 9. Ces éléments, tous déterminés rigoureusement, serviront de comparaison.

748. En employant $decl. \odot$ dans les formules (746), ainsi que l'indique la figure, et faisant, comme on le peut sans erreur, $\cos. lat. \odot = 1$; on a $\Delta long. \odot \odot = 30' 4''$, 6 $\cos. 22^\circ 44'$ $\cos. 4^\circ 47' + 16' \sin. 4^\circ 47' 20'' = 27' 38''$, 6 $+ 1' 20''$, 1 $= 28' 58''$, 7; résultat dont l'erreur pourroit à la rigueur se négliger. Les logarithmes employés dans le calcul de la premiere formule

Fig. 67 servent à calculer la seconde, et on trouve $\delta lat. \odot \oslash = 13' 37'' , 7$; c'est-à-dire $2'' , 8$ de plus que la valeur exacte.

749. Cette erreur provient de la cause exposée (539). En effet toute erreur disparoît si on a recours aux corrections que j'ai indiquées au même lieu. La table (536) fait connoître que l'erreur sur l'angle droit N est absolument insensible, NE différant peu de 90° , et que par conséquent on doit employer dans les calculs (748) l'angle de position NSII *augmenté* de la quantité de l'erreur de l'angle droit M.

Cette erreur, à la distance MP, ou $67^\circ 16'$, du pôle, est selon la table (536), $0', 209 \times ML = 0', 209 \times 30 \cos. 22^\circ 44' = 5', 78 = 5' 47''$. On doit aussi (537) employer dans les calculs (748) ML *diminué* de la quantité $0'' , 01745 \times SM \times 5,78$: mais comme il est plus commode d'appliquer cette correction à l'angle au pôle MPL, on divisera cette même quantité par $\cos. 22^\circ 44'$, ou, au lieu de $5,78$, on emploiera, en la calculant, $0', 209 \times MPL = 0, 209 \times 30$; ce qui donnera $0'' , 01745 \times 16 \times 6, 27 = 1'' , 75$.

Mettons à présent, dans le calcul (748), $\delta asc. dr. = 30' 2'' , 85$, et $ang. posit. = 4^\circ 53' 6''$, et nous trouverons $\delta long. \odot \oslash = 28' 58'' , 5$; et $lat. austr. \oslash = 13' 34'' , 9$; ce qui est absolument conforme aux résultats du calcul rigoureux (747).

750. Si les points S; L indiquent l'un le centre d'un astre, et l'autre une *tache* sur le disque de ce même astre, il est évident que les mêmes formules (746), calculées avec les mêmes corrections (749) dans le cas où les distances de l'astre aux deux pôles diffèreroient sensiblement entre elles, donneront exactement la solution du problème.

751. Pour trouver les différences de longitude et de latitude entre le soleil et la lune, Mayer a donné les deux formules suivantes que je tire de M. Trembley (*Essai de Trigon. sphérique*, Chap. IX) : $\delta long. = \delta asc. dr. \cos. obl. \mp \delta décl. \sin. obl. \times$

$\cos.asc.dr. \odot$, et $\Delta lat. = \frac{\Delta decl. \cos.obl.}{\cos.decl. \odot} - \Delta asc.dr. \sin.obl. \times \cos.long. \odot$. En calculant ces formules avec les éléments (747), on a $\Delta long. = 28' 55''$, 5, et $\Delta lat. = 13' 38''$. L'erreur est de $3''$ pour chacune de ces valeurs; ces formules n'ont donc pas l'exactitude que desirent aujourd'hui les Astronomes.

752. *Connoissant les différences de hauteur et d'azimuth entre deux astres, trouver les différences d'ascension droite et de déclinaison.*

Si dans la solution (746) on prend P pour le zénith, E pour le pôle de l'équateur, les formules donneront (753)

$$\Delta asc.dr. = \frac{1}{\cos.decl.} (\Delta azimuth. \cos.haut. \cos.ang.de var. \pm \Delta haut. \sin.ang.de var.)$$

$$\Delta decl. = \Delta haut. \cos.ang.de var. \mp \Delta azimuth. \cos.haut. \sin.ang.de var.$$

Les signes inférieurs ont lieu lorsque l'astre le plus bas a le moindre azimuth oriental, ou le plus grand azimuth occidental. L'azimuth est le supplément de l'angle SPE.

753. Pour distinguer entre eux les deux angles qui se trouvent désignés l'un et l'autre, dans différents Auteurs, sous la dénomination d'*angle parallactique*, j'appellerai toujours de ce nom l'angle du vertical avec le cercle de latitude; et je nomme *angle de variation* l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison, par contraste avec l'*angle de position* qui lui est contigu; l'un changeant à chaque moment, tandis que l'autre est sensiblement constant pour toutes les étoiles.

754. Les formules (746) s'appliquent encore facilement à la résolution du problème suivant et de son inverse : *Connoissant les différences de hauteur et d'azimuth, trouver les différences de longitude et de latitude.* Je me dispenserai de faire ces applications, parceque les regles des signes deviennent plus compliquées; que la formation de l'angle parallactique exige encore d'autres regles, et que M. de la Lande (*Astr.* 2125 à 2129; et 1883 et suiv.) a.

résolu ces problèmes par une autre méthode et avec les explications les plus détaillées. Je prévien seulement que soit dans ces problèmes, soit dans le précédent (752), mes corrections (539) seront d'autant plus nécessaires, que les astres seront plus élevés sur l'horizon. Elles deviennent pourtant inutiles dans la belle Méthode de M. de la Lande pour le calcul des éclipses, parcequ'on y résout successivement les deux problèmes, l'un par rapport au lieu vrai des astres, l'autre par rapport au lieu apparent, et que les erreurs des deux opérations se compensent comme je l'ai souvent éprouvé.

755. *Trouver une méthode expéditive pour calculer une table des azimuths, des distances au zénith, et des angles de variation (753), pour une latitude terrestre donnée, en prenant pour arguments la déclinaison et l'angle horaire.*

Une pareille table est très utile pour pointer de jour la lunette d'un quart de cercle sur un astre qu'on n'apperçoit point à l'œil nud, et de nuit sur un astre peu visible; pour calculer l'effet de la réfraction sur l'ascension droite et sur la déclinaison; et pour d'autres circonstances qui se présentent continuellement. Par-tout où il se trouve un Observatoire en activité, on devroit avoir cette table calculée en minutes, sur le modele de celle qu'on a insérée pour Paris dans la *Connoissance des Temps*, de 1782. M. Prevost, à qui cette table est due en partie, m'a dit avoir calculé avec exactitude les azimuths et les distances au zénith, par le moyen des formules (VIII. 7°, 8°). Par la méthode que je vais indiquer, il auroit encore obtenu, et sans plus de travail, les angles de variation qui depuis ont été calculés par M. Lévêque.

Fig.68

Soit P le pôle de l'équateur, Z le zénith, S un astre situé dans une partie quelconque du Ciel visible. Connoissant les côtés PZ, PS, et l'angle compris P, on trouve à la fois, par l'élégante solution de Neper (IX. 2°), *l'azimuth et l'angle de variation*: la déclinaison restant la même, il suffit de changer seulement $\log. \cot. \frac{1}{2} \text{ang. horaire}$ pour trouver successivement l'azimuth et

l'angle de variation correspondants à chacun des angles horaires de la table. On fera de même pour chaque déclinaison différente. Ensuite, ayant $\sin.S : \sin.PZ :: \sin.P : \sin.ZS$, comme, dans cette analogie, PZ est toujours constant, il suffira, pour un même angle horaire, de chercher deux logarithmes pour connoître les *distances au zénith* correspondantes à chaque déclinaison. On fera de même pour chaque angle horaire différent. Donc en général, par cette méthode, pour déterminer trois quantités on n'a que quatre logarithmes à chercher.

756. *Connoissant la hauteur du pôle, ayant observé dans un même vertical deux étoiles, et connoissant leurs déclinaisons et leurs ascensions droites, et par conséquent les moments de leur passage au méridien, trouver l'heure à laquelle l'observation a été faite.*

Soit P le pôle de l'équateur, Z le zénith, T, S les deux étoiles. Fig. 69
Les choses connues sont PZ, PT, PS , et TPS différence des ascensions droites : on cherche l'angle TPZ .

Comme on a $PTZ = 180^\circ - PTS$, les lignes trigonométriques de l'angle T sont communes aux triangles PTZ, PTS ; de sorte que si l'on trouve, par la table VII, que l'une de ces lignes puisse être exprimée dans chacun des deux triangles par les lignes trigonométriques des parties connues et de l'angle cherché, le problème sera résolu. Or faisant $A = T, B = P, C = Z$, on a (VII. 13°), $\text{tang.} PTZ = \frac{\sin.TPZ}{\sin.PT \cot.PZ - \cos.PT \cos.TPZ}$; et faisant $C = S$, — $\text{tang.} PTS = \frac{\sin.TPS}{\sin.PT \cot.PS - \cos.PT \cos.TPS}$. Mettant en équation ces deux valeurs de $\text{tang.} T$, chassant les fractions et divisant l'équation par $\cos.PT$, on trouvera $\sin.TPS \cos.TPZ + (\cos.TPS - \text{tang.} PT \cot.PS) \sin.TPZ = \text{tang.} PT \cot.PZ \sin.TPS$. Et par conséquent (369)

$$\text{tang.} B = \cot.TPS \left(1 - \frac{\text{tang.} PT \cot.PS}{\cos.TPS} \right), \text{ et}$$

$$\cos.(TPZ \simeq B) = \text{tang.} PT \cot.PZ \cos.B.$$

Pour la commodité des Calculateurs, j'ajoute les valeurs ci-après :
 TPS = la différence d'ascension droite des deux étoiles prise du côté où elle est moindre que de 180° .

PT = la distance au pôle, de l'étoile la plus élevée.

PS = la distance au pôle, de l'étoile la moins élevée.

PZ = la distance du pôle au zénith.

TPZ = l'angle horaire cherché de l'étoile la plus élevée.

Si TPZ est $> 90^\circ$, on fera négatif le second membre de chacune des deux formules; et on aura le supplément de la valeur cherchée de TPZ.

757. *Déterminer de combien de temps la réfraction accélère le lever ou retarde le coucher des astres.*

Fig. 70 Soit P le pôle de l'équateur, Z le zénith, OR l'horizon, T un astre qui élevé, par la réfraction, de la quantité TL déterminée par les Astronomes de $33\frac{1}{2}$ environ, paroisse se lever au point L. Sans cette élévation apparente, on ne verroit l'astre se lever que quand il arriveroit au point S, en supposant PS = PT. Son lever est donc accéléré, et, par la même raison, son coucher retardé de la quantité de temps mesurée par le petit angle TPS.

J'observe que les triangles PZS, PTZ ont un côté commun PZ; que PS = PT, et que connoissant TL = ZT — ZS = δ ZS, il s'agit de trouver TPS = δ ZPS que je désigne par δ P.

J'ai recours aux analogies différentielles correspondantes à ce cas, et faisant (629), A = P, B = Z, C = S, je trouve $\sin.\frac{1}{2}\delta$ ZS : $\sin.\frac{1}{2}\delta$ P :: $\sin.$ PZ $\sin.$ PS $\sin.(P + \frac{1}{2}\delta$ P) : $\sin.(ZS + \frac{1}{2}\delta$ ZS). Mais parceque ZS = 90° , $\sin.(ZS + \frac{1}{2}\delta$ ZS) = $\cos.\frac{1}{2}\delta$ ZS. Donc (I. 6°)

(A)... $\sin.\delta$ ZS : $2 \sin.\frac{1}{2}\delta$ P :: $\sin.$ PZ $\sin.$ PS $\sin.(P + \frac{1}{2}\delta$ P) : 1;

ou (723), en désignant dans le second membre le temps cherché par t ,

(B)... Temps cherché = $\frac{\text{réfraction horizontale}}{15 \cos.\text{lat.} \cos.\text{décl.} \sin.(\text{ang. hor.} + \frac{1}{2}t)}$.

Comme la valeur de t se connoît toujours à-peu-près, il est rare

rare qu'on ait à calculer cette formule plus d'une fois par la méthode (281). Si on veut faire usage de l'autre méthode (282), on observera que $2 \sin. \frac{1}{2} \delta P \sin. (P + \frac{1}{2} \delta P) = \cos. P - \cos. (P + \delta P)$, (II. 16°); et l'analogie (A) donnera

$$(C) \dots \cos. (P + \delta P) = \cos. P \left(1 - \frac{\sin. \delta ZS}{\sin. PZ \sin. PS \cos. P} \right); \text{ ou}$$

$$(D) \dots \cos. (ang. hor. + 15 t) = \cos. ang. hor. \left(1 - \frac{\sin. \text{réfr. horiz.}}{\cos. lat. \cos. décl. \cos. ang. hor.} \right)$$

758. Dans les formules précédentes, on doit employer pour P , ou pour l'angle horaire, l'angle ZPS , c'est-à-dire l'angle horaire de l'astre considéré dans le plan de l'horizon. Il est facile de trouver cet angle : car le triangle rectilatre PZS donne (VII. 7°), $\cos. P = - \cot. PZ \cot. PS$, ou

$$\cos. ang. hor. = - \tan. lat. \tan. décl.$$

Cette équation fait voir qu'à déclinaison égale, l'angle horaire correspondant à la déclinaison boréale est obtus, et supplément de l'angle horaire correspondant à la déclinaison australe. Mais lorsque P est obtus, $\sin. (P + \frac{1}{2} \delta P)$ est $< \sin. P$, et lorsque P est aigu, $\sin. (P + \frac{1}{2} \delta P)$ est $> \sin. P$. L'analogie (A) fait donc connaître qu'à déclinaison égale, l'effet de la réfraction ne peut être le même pour la déclinaison boréale et pour l'australe, et que par conséquent les tables qu'on a données jusqu'à présent induisent en erreur sur ce point.

C'est à M. l'Abbé Pieracchi, Internonce apostolique à Paris, et amateur distingué de l'Astronomie, que je dois la première notion de cette erreur qu'il a reconnue en résolvant séparément les deux triangles ZPS , ZPT , au moyen des trois côtés, pour avoir la valeur des angles au pôle dans les deux cas. Je n'avois pas encore essayé d'appliquer mes analogies différentielles finies au problème (757); cette application m'eût conduit à la découverte de l'erreur dont il s'agit, erreur qui dans certains cas est assez grave, ainsi qu'on va le voir.

Fig. 70 759. Soit $PZ = 30^\circ$: en faisant $PS = 61^\circ$, on a, par la formule (758), $P = 163^\circ 45' 31''$; et, en faisant $PS = 119^\circ$, $P = 16^\circ 14' 29''$. Avec ces éléments, et en supposant $\delta ZS = 33' 30''$, la formule (C) donne, dans le cas de la déclinaison boréale, $P + \delta P = 169^\circ 13' 36''$, et par conséquent l'effet de la réfraction ou $\delta P = 5^\circ 28' 5''$; et dans le cas de la déclinaison australe, $P + \delta P = 20^\circ 18' 48''$, et par conséquent $\delta P = 4^\circ 4' 19''$. La première valeur de δP réduite en temps, est $21' 52''$ pour la déclinaison boréale; la seconde, $16' 17''$ pour la déclinaison australe. La différence est de $5' 35''$ de temps. On auroit donc une erreur de près de $6'$ de temps, si l'on employoit dans le cas de la déclinaison boréale la quantité de $16' 9''$ assignée dans la table de la *Connaissance des Temps*, 1782, p. 302, pour le cas de la déclinaison de 29° et de la latitude de 60° . La table donnée à la suite, pour les arcs semi-diurnes apparents, à la latitude de Paris, paroît avoir été construite rigoureusement, et calculée séparément pour les déclinaisons boréales et pour les déclinaisons australes.

760. Si dans l'exemple (759) on eût calculé la valeur de δP au moyen de l'analogie que plusieurs Astronomes ont employée, $\delta P : \delta ZS :: 1 : \sqrt{(\sin.^2 PS - \cos.^2 PZ)}$, laquelle se résout facilement par la méthode (716), on eût trouvé $\delta P = 4^\circ 33' 54''$, et par conséquent l'erreur de l'analogie infinitésimale seroit de $54'$ pour la déclinaison boréale, et de $30'$ pour l'australe : ce qui prouve l'utilité de mes analogies différentielles finies, dont j'ai déduit la formule (C) que je crois plus expéditive que la résolution du triangle par les trois côtés; d'autant plus qu'avec le seul changement d'un signe, elle s'emploie et pour la déclinaison boréale et pour l'australe. Mais si l'on connoît à-peu-près la valeur de δP ou de $15 t$, ce qui arrive lorsqu'on calcule une table, je crois que les solutions (A), (B) paroîtront préférables à toute autre méthode employée jusqu'à présent.

761. Si à la réfraction horizontale on substitue le diamètre du

soleil, les formules (757) feront connoître *le temps que le disque du soleil emploie à se lever ou à se coucher.*

Et si à la réfraction horizontale on substitue la dépression du cercle crépusculaire, dépression qu'on a fixée à 18° , on aura par la formule (D) *la durée du crépuscule.*

762. *Trouver le changement d'amplitude produit par la réfraction sur un astre qui se leve ou qui se couche.*

Conservons les dénominations (757; l'arc SL de l'horizon, ou le petit angle LZS, que nous nommerons comme à l'ordinaire δZ , est celui dont on cherche la valeur.

La première analogie (620) se réduit dans ce cas, par la méthode (282), à une expression très simple; mais dans ce même cas on obtient plus promptement cette expression par la méthode (725). Désignons par Z l'angle PZS, et observons que $PT = PS$, et que $TZ = 90^\circ + \delta ZS$: le triangle PTZ nous donnera (VII. 28°), $\cos.PT = \cos.(Z - \delta Z) \cos.\delta ZS \sin.PZ - \sin.\delta ZS \cos.PZ = \cos.PS$; le triangle rectilatre PZS donne aussi $\cos.PS = \cos.Z \sin.PZ$. Égalons les deux valeurs de $\cos.PS$; nous aurons $\cos.(Z - \delta Z) = \tan\delta ZS \cot.PZ + \frac{\cos.Z}{\cos.\delta ZS}$. Ces deux dernières équations se réduisent aux suivantes, en appelant *amplitude vraie* le complément de l'angle PZS, et *amplitude apparente* le complément de PZT :

$$\sin. \text{ampl. vr.} = \frac{\sin. \text{décl.}}{\cos. \text{lat.}}$$

$$\sin. \text{ampl. app.} = \frac{\sin. \text{ampl. vr.}}{\cos. \text{réfr. horiz.}} \left(1 + \frac{\sin. \text{réfr. horiz.} \tan\text{lat.}}{\sin. \text{ampl. vr.}} \right).$$

Or la différence de l'amplitude vraie à l'amplitude apparente est ce que l'on cherche.

Un exemple nous sera utile à plus d'une fin.

763. Soit $PZ = 41^\circ 12' 20''$, $PS = 51^\circ 25' 20''$, et $\delta ZS = 33' = \text{réfr. horiz.}$. Au moyen des formules précédentes on trouvera $\text{ampl. vr.} = 71^\circ 11' 21''$, et $\text{ampl. app.} = 73^\circ 15' 17''$. Et par

Aaa ij

conséquent l'effet de la réfraction sur l'amplitude est, dans ce cas, de $2^{\circ} 4'$.

764. Si, avec les mêmes éléments, on emploie, au lieu de mes formules rigoureuses, l'analogie (714), $\delta Z : \delta ZS :: \cos. PZ : \sqrt{(\sin.^2 PS - \cos.^2 PZ)}$, on trouvera $\delta Z = 1^{\circ} 57'$. Une erreur de $7'$ sur cette quantité fait voir avec quelle précaution il faut faire usage des analogies infinitésimales.

765. Si dans l'exemple (763) on fait $\delta ZS = 32'$, mes formules donnent $\delta Z = 2^{\circ} 5'$. Une minute de variation dans la réfraction horizontale produit donc ici un changement de $4'$ sur l'amplitude apparente, et par conséquent de $8'$ si on prend la somme des changements tant pour l'amplitude ortive que pour l'amplitude occase. Il faut donc attribuer à une erreur de calcul ce qu'on a avancé, qu'une minute de variation dans la réfraction horizontale, à la latitude donnée (763), produit un changement de $29'$ sur l'amplitude ortive et occase de la Lyre.

766. *Trouver l'élongation d'une planète pour le temps de sa station apparente.*

Nous considérerons la planète comme étant dans le plan de l'écliptique, et les orbites de la planète et de la Terre comme circulaires. L'erreur de la première hypothèse est de peu de conséquence; nous donnerons un moyen facile pour obvier à l'erreur de la seconde.

Soit p l'angle à la planète ou la *parallaxe annuelle*, e l'angle à la Terre ou l'*élongation*. Dans la supposition des orbites circulaires, les côtés opposés à ces angles sont constants; de sorte qu'on a (614), $\delta p : \delta e :: \text{tang. } p : \text{tang. } e$. Si on appelle $\odot$ la longitude du soleil, g la longitude géocentrique de la planète, h la longitude héliocentrique, on aura (*Astron.* de M. de la Lande, 1142, 1141), $g = \odot - e$, $p = h \curvearrowright g$. Or une planète est dite *stationnaire*, quand sa longitude géocentrique ne varie pas; dans ce cas les dernières équations donnent $\delta \odot = \delta e$, et $\delta p = \delta h$, et par conséquent $\delta h : \delta \odot :: \text{tang. } p : \text{tang. } e$. Mais δh

et $\delta \odot$, ou les mouvements simultanés de la planète et de la Terre, sont en raison inverse de leurs révolutions périodiques, puisque le mouvement angulaire est d'autant plus grand que le temps de la révolution est plus court. Appellant R la révolution périodique de la Terre, r celle de la planète, on a donc $\delta h : \delta \odot :: R : r$, et par conséquent $R : r :: \text{tang. } p : \text{tang. } e$. Mais suivant la loi de Kepler, $R^2 : r^2 :: D^3 : d^3$, D étant la distance moyenne du soleil à la Terre, d celle du soleil à la planète. Donc $D^3 : d^3 :: \text{tang.}^2 p : \text{tang.}^2 e$, ou (9), $\frac{D^2}{d^2} : \frac{d^1}{D} :: \frac{\sin.^2 p}{\cos.^2 p} : \frac{\sin.^2 e}{\cos.^2 e}$. Or les numérateurs forment entre eux la proportion connue des côtés aux sinus des angles opposés : donc aussi (13) les dénominateurs sont en proportion. L'analogie des numérateurs donne $\sin.^2 p = \frac{D^2 \sin.^2 e}{d^2}$; celle des dénominateurs, $\cos.^2 p = \frac{d \cos.^2 e}{D}$. Mais $\sin.^2 p + \cos.^2 p = \sin.^2 e + \cos.^2 e$, (28) : donc $\frac{D^2 \sin.^2 e}{d^2} + \frac{d \cos.^2 e}{D} = \sin.^2 e + \cos.^2 e$, équation de laquelle on tire

$$\text{tang. } e = \frac{d}{\sqrt{D^2 + Dd}} = \frac{d}{D} \times \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{d}{D}\right)}}.$$

Et, en faisant $D = 1$, selon l'usage des Astronomes,

$$(E) \dots \text{tang. } elong. = \frac{\text{dist. moy. planète}}{\sqrt{1 + \text{dist. moy. plan.}}}.$$

La démonstration de cette formule très simple est tirée en grande partie des *Institutions astronomiques* de M. Le Monnier.

Pour plus d'exactitude et de commodité dans le calcul, on fera $\text{tang. } x = \sqrt{\frac{d}{D}}$, et on aura (198), $\text{tang. } e = \frac{d}{D} \times \cos. x = \text{tang.}^2 x \cos. x$. Et par conséquent, en substituant aux distances moyennes les rayons vecteurs actuels, ce qui rendra insensible l'erreur de l'hypothèse des orbites circulaires, on aura

$$\text{tang. } x = \sqrt{\frac{\text{ray. vect. planète}}{\text{ray. vect. Terre}}},$$

$$\text{tang. } elong. = \sin. x \text{ tang. } x.$$

On pourra déterminer d'abord à-peu-près le temps de la station, au moyen de la formule (E) calculée, si l'on veut, par le moyen des deux dernières équations, puis employer les rayons vecteurs donnés par les tables pour ce même temps qu'on parviendra à déterminer ainsi avec une précision beaucoup plus grande.

767. *La théorie du mouvement elliptique des planetes* donne les six équations ci-après, dont la démonstration n'appartient pas à la seule Trigonométrie, puisqu'elle dépend des observations, de la loi des aires proportionnelles aux temps, et des propriétés de l'ellipse. Soient

- a le demi-grand axe de l'orbite d'une planete,
 b le demi-petit axe, u l'anomalie vraie,
 e l'excentricité, x l'anomalie excentrique,
 r le rayon vecteur de la planete, z l'anomalie moyenne.

On aura, en adoptant les démonstrations que donne M. de la Lande dans la *seconde Édition* de son *Astronomie*, qui est celle que je cite toujours,

$$1^{\circ} \text{ ÉQUATION... } z = x + \frac{e}{a} \times \sin.x, (\text{Astr. 1241});$$

$$2^{\circ} \quad r = a + e \cos.x, (\text{Astr. 3270});$$

$$3^{\circ} \quad r = \frac{bb}{a - e \cos.u}, (\text{Astr. 3279});$$

$$4^{\circ} \quad r = b \times \frac{\sin.x}{\sin.z}, (\text{Astr. 1245});$$

$$5^{\circ} \quad \text{tang.} \frac{1}{2} u = \text{tang.} \frac{1}{2} x \sqrt{\frac{a - e}{a + e}}, (\text{Astr. 1240}).$$

Enfin l'équation suivante donne le rapport entre les quantités constantes a , b , e :

$$6^{\circ} \quad aa = bb + ee, (\text{Astr. 3269}).$$

Pour simplifier les opérations, on fait ordinairement $a = 1$; alors il faut employer, dans les calculs numériques, des valeurs de b , e , r proportionnelles à la valeur de $a = 1$. Par exemple,

les Tables de Mercure, de M. de la Lande, donnent $a = 38709,88$; $e = 7960$: si on fait $a = 1$, la valeur de e sera $\frac{7960}{38709,88}$.

Des équations précédentes se déduisent les huit suivantes, qui sont fort utiles, et que nous démontrerons immédiatement après les avoir données.

$$7^{\circ} \quad \partial x = \frac{\partial z}{1 + \frac{e}{a} \times \cos. x};$$

$$8^{\circ} \quad \partial r = - \partial z \times \frac{ae}{bR''} \times \sin. u;$$

$$9^{\circ} \quad \partial u = \partial x \times \frac{\sin. u}{\sin. x};$$

$$10^{\circ} \quad \partial u = \partial z \times \frac{ab}{rr'}.$$

Ces quatre équations ne sont exactes que lorsque les différentielles sont infiniment petites. Dans les autres cas je leur substitue les suivantes comme beaucoup plus approchées.

$$11^{\circ} \quad \partial x = \frac{\partial z}{1 + \frac{e}{a} \times \cos. (x + \frac{1}{2} \partial x)};$$

$$12^{\circ} \quad \partial r = - \partial z \times \frac{ae}{bR''} \times \sin. (u + \frac{1}{2} \partial u);$$

$$13^{\circ} \quad \partial u = \partial x \times \frac{\sin. (u + \frac{1}{2} \partial u)}{\sin. (x + \frac{1}{2} \partial x)};$$

$$14^{\circ} \quad \partial u = \partial z \times \frac{ab}{(r - \frac{1}{2} \partial r)^2}.$$

768. Démonstration des équations 7^e. . . . 14^e.

En prenant les différentielles finies dans l'équation 1^e, on a $\partial z = \partial x + \frac{e}{a} \times 2 \sin. \frac{1}{2} \partial x \cos. (x + \frac{1}{2} \partial x)$, (II. 30^e). Mettant ∂x au lieu de $2 \sin. \frac{1}{2} \partial x$, (259), le résultat est l'équation 11^e, laquelle se change en la 7^e lorsque ∂x est infiniment petit (140).

En opérant de même sur l'équation 2^e, j'ai $\partial r = - \frac{\partial x}{R''} \times e \sin. (x - \frac{1}{2} \partial x)$; ∂x devant être divisé par R'' , (262), parceque r et x ne sont pas des quantités de même nature (730). Je change

les signes, je substitue au numérateur δx sa valeur prise de l'équation 11°, et j'ai $-\delta r = \delta z \times \frac{ae}{r''} \times \frac{\sin.(x + \frac{1}{2}\delta x)}{a + e \cos.(x + \frac{1}{2}\delta x)}$. Supposons par approximation (722), que r , x et u arrivent en même temps à la moitié de leur variation : 1°. le dernier dénominateur se réduira par la 2° équation à $(r - \frac{1}{2}\delta r)$; 2°. l'équation 4° donnera $\sin.(x + \frac{1}{2}\delta x) = \frac{(r - \frac{1}{2}\delta r) \sin.(u + \frac{1}{2}\delta u)}{b}$. Substituons cette valeur dans la dernière équation ci-dessus; nous aurons la 12°, qui se réduit à la 8°, lorsque les différentielles sont infiniment petites.

En différentiant l'équation 5°, on a (132), $\frac{\frac{1}{2}\delta u}{\cos.\frac{1}{2}u \cos.(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\delta u)}$: $\frac{\frac{1}{2}\delta x}{\cos.\frac{1}{2}x \cos.(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\delta x)} :: \text{tang.}\frac{1}{2}u : \text{tang.}\frac{1}{2}x$. D'où se déduit $\delta u = \delta x \times \frac{\sin.\frac{1}{2}u \cos.\frac{1}{2}(u + \delta u)}{\sin.\frac{1}{2}x \cos.\frac{1}{2}(x + \delta x)}$. De cette équation, si l'on suppose par approximation $\frac{\cos.\frac{1}{2}(u + \delta u)}{\cos.\frac{1}{2}(x + \delta x)} = \frac{\cos.\frac{1}{2}u}{\cos.\frac{1}{2}x}$, on tire la 9°; mais comme on peut supposer avec autant de raison $\frac{\sin.\frac{1}{2}u}{\sin.\frac{1}{2}x} = \frac{\sin.\frac{1}{2}(u + \delta u)}{\sin.\frac{1}{2}(x + \delta x)}$, ce qui donne $\delta u = \delta x \times \frac{\sin.(u + \delta u)}{\sin.(x + \delta x)}$, on aura en général une expression plus exacte dans l'équation 13° qui tient le milieu entre cette dernière et la 9°.

En mettant, comme nous l'avons déjà fait, $r - \frac{1}{2}\delta r$ au lieu de $a + e \cos.(x + \frac{1}{2}\delta x)$, l'équation 11° devient $\delta x = \frac{ae \delta z}{r - \frac{1}{2}\delta r}$. Substituant dans la 13° cette valeur, et celle de $\sin.(x + \frac{1}{2}\delta x)$ employée ci-dessus, on aura la 14°, qui se réduit ensuite à la 10°.

Les formules fondamentales que j'ai réunies (767) pour la commodité des Astronomes, vont me servir utilement pour la résolution de divers problèmes, dans lesquels je suppose toujours connues les quantités a, b, e .

769. PROBLÈME DE KEPLER. Étant donnée l'anomalie moyenne, trouver l'anomalie vraie.

SOLUTION I. Toute la difficulté consiste à trouver l'anomalie excentrique, puisque, cet élément connu, l'équation 5° donne aussitôt

aussitôt la solution du problème. Nous nous bornerons donc à chercher x par le moyen de l'équation 1^e; et comme il n'y a point de méthode rigoureuse pour la résoudre, nous emploierons ici la méthode générale d'approximation que nous avons proposée (364), parcequ'aucune autre ne nous paroît plus expéditive.

Si l'on donne à x une valeur arbitraire, l'équation 1^e produira une erreur sur la valeur de z . Avec cette erreur δz on déterminera ensuite, au moyen de l'équation 11^e, la correction δx que doit subir la valeur supposée de x , pour devenir exacte. Un exemple démontrera la justesse et la brièveté de cette opération.

Soit $z = 90^\circ$, et cherchons x dans l'orbite de Mercure. Pour donner à x dans l'équation 1^e une valeur supposée, très approchée de la valeur exacte, j'observe d'abord que pour les six premiers signes de l'anomalie moyenne, c'est-à-dire lorsque x est $< 180^\circ$, on a toujours $z > x$, et au contraire $z < x$ pour les six derniers signes de l'anomalie moyenne, puisqu'alors $\sin. x$ est négatif, (42). Dans le cas proposé je dois donc supposer $x < z$. Je commence le calcul de l'équation 1^e par la réduction en degrés, de la valeur de $\frac{e}{a}$. En prenant les éléments dans les tables de M. de la Lande, je trouve

$$\begin{array}{rcl} \log.e & = & 3,9009131 \\ \text{compl.log.}a & = & 5,4121781 \\ \log.\frac{e}{a} & = & 9,3130912 \\ (262), \log.R^\circ & = & 1,7581226 \\ \log.\text{constant} & & 1,0712138 \end{array}$$

Et par conséquent $\frac{e}{a} \times R^\circ = 12^\circ$ environ. Pour achever le calcul de l'équation 1^e, il s'agit de choisir un arc x tel que son sinus multiplié par 12° donne un produit égal à $z - x$ ou à $90^\circ - x$ dans le cas présent. En ouvrant les tables des sinus naturels, je reconnois facilement que $\sin. 79^\circ$ seroit trop grand, et $\sin. 78^\circ$ trop

petit. Je fais donc $x = 78^\circ 30'$, et réduisant en secondes la valeur de $\frac{e}{a} \times R^\circ$ en multipliant cette valeur par 3600, je termine le calcul comme il suit :

$$\begin{array}{rcl}
 \log. \text{constant} & & 1,0712138 \\
 \log. 3600 & = & 3,5563025 \\
 \log. \sin. 78^\circ 30' & = & 9,9911927 \\
 \hline
 \text{Somme} & = & 4,6187090 \\
 \text{Donc } \frac{e}{a} \times R'' \times \sin. 78^\circ 30' & = & 41563'', 20 \\
 \text{Mais } z - x = 11^\circ 30' & = & 41400'', 00 \\
 \hline
 \text{Donc l'erreur } \delta z & = & 163'', 2
 \end{array}$$

Je suppose par approximation $\delta x = \delta z$, ce qui donne $\frac{1}{2} \delta x = 1' 22''$ environ. J'observe que mon calcul donnant pour z une valeur trop grande, la correction δx doit être négative, et je fais le calcul de l'équation 11°.

$$\begin{array}{rcl}
 \log. \frac{e}{a} \text{ pris ci-dessus} & = & 9,31309 \\
 \log. \cos. (x - \frac{1}{2} \delta x = 78^\circ 28' 40'') & = & 9,30048 \\
 \hline
 \text{Somme} & = & 8,61357 \\
 \text{Donc } \frac{e}{a} \times \cos. (x - \frac{1}{2} \delta x) & = & 0,041075 \\
 \text{compl. log. } 1,041075 & = & 9,98252 \\
 \log. (\delta z = 163'', 2) & = & 2,21272 \\
 \hline
 \log. \delta x & = & 2,19524;
 \end{array}$$

ce qui donne $\delta x = -156'', 76 = -2' 36'', 76$; et par conséquent $x = 78^\circ 27' 23'', 24$. Cette valeur est juste à moins d'un $\frac{1}{100}$ de seconde, comme on pourra le vérifier en l'employant pour calculer l'équation 1°.

770. Pour démontrer d'autant plus l'utilité générale de ma méthode, soit $z = 180^\circ 12' 27'', 83$, et soit demandé de trouver x

dans l'orbite de la comète de 1759, en faisant usage des éléments donnés par M. de la Lande (*Astr.* 3097).

$$\begin{array}{rcl}
 \log.(e = 17,49225) & = & 1,2428457 \\
 \text{compl. log.}(a = 18,07575) & = & 8,7429037 \\
 \log.\frac{e}{a} & = & \underline{9,9857494} \\
 \log.R^{\circ} & = & \underline{1,7581226} \\
 \log.\text{constant} & & 1,7438720
 \end{array}$$

Donc $\frac{e}{a} \times R^{\circ} = 55^{\circ}$ environ. Il faut trouver le sinus d'un arc x , de sorte que le produit de ce sinus par 55° soit égal à $z - x$. En négligeant pour cette recherche les 180° dans l'une et dans l'autre anomalie, ce produit pris en changeant les signes sera $x - 13'$. Après quelques épreuves sur les tables des sinus, je trouve que $\sin. 5^{\circ} 10' = 0,09$ peut satisfaire au cas proposé, puisque $55^{\circ} \times 0,09 = 4^{\circ}, 95 = 4^{\circ} 57' = 5^{\circ} 10' - 13'$. Je fais donc $x = 185^{\circ} 10'$.

$$\begin{array}{rcl}
 \log.\text{constant} & & 1,7438720 \\
 \log.3600 & = & 3,5563025 \\
 \log. - \sin. 185^{\circ} 10' & = & 8,9544991 \\
 \text{Somme} & - & \underline{4,2546736}
 \end{array}$$

Et par conséquent $\frac{e}{a} \times R'' \times \sin. 185^{\circ} 10' = - 17975'', 195$
 Mais $z - x = 180^{\circ} 12' 27'', 83 - 185^{\circ} 10' = - 17852, 170$

$$\text{Donc l'erreur } \delta z = \underline{123'', 025}$$

Ce calcul donne la valeur de z trop petite; celle de δx sera donc additive. Pour les comètes on ne peut supposer $\delta x = \delta z$. Ainsi, dans le calcul de l'équation 11^e, il faut employer, pour arriver à une première approximation, $\cos. x$ au lieu de $\cos. (x + \frac{1}{2} \delta x)$.

$$\begin{array}{rcl}
 \log.\frac{e}{a} \text{ pris ci-dessus} & = & 9,98575 \\
 \log. - \cos.(x = 185^{\circ} 10') & = & \underline{9,99823} \\
 \text{Somme} & - & 9,98398
 \end{array}$$

$$\text{Donc } \frac{e}{a} \times \cos. x = - 0,9638$$

Bbb ij

$$\text{compl.log.}(1 - \frac{e}{a} \cos.x = 0,0362) = 1,44129$$

$$\log.(\delta z = 123'', 025) = 2,09000$$

$$\log. \delta x = 3,53129$$

On a donc, pour première approximation, $\delta x = 56' 39''$. Cette correction étant considérable, on s'en servira pour recommencer le calcul, si l'on veut obtenir un résultat très exact. On aura alors

$$\begin{aligned} \frac{e}{a} \times R'' \times \sin. 186^\circ 6' 40'' &= - 21249'', 478 \\ z - x = 180^\circ 12' 27'', 83 - 186^\circ 6' 40'' &= - 21252, 170 \\ \text{Donc l'erreur } \delta z &= \frac{2'', 692}{2''} \end{aligned}$$

Donc $\frac{e}{a} \cos.(x = 186^\circ 6' 40'') = - 0,96222$, en faisant usage des logarithmes à six décimales, et $\delta x = \frac{2'', 692}{0,03778} = 1' 11'', 255$.

Le calcul ayant donné z trop grand, cette correction δx doit ici se soustraire. Pour l'avoir avec encore plus de précision, qu'on emploie actuellement $\cos.(x - \frac{1}{2}\delta x = 186^\circ 6' 4'')$ au lieu de $\cos.x$ dans le dernier calcul, comme le prescrit l'équation 11^e, et l'on trouvera $\delta x = - 1' 11'', 29$, correction absolument exacte, puisque si l'on calcule l'équation 1^e en faisant $x = 186^\circ 5' 28'', 71$, on trouve précisément $z = 180^\circ 12' 27'', 83$.

Comme les comètes ne sont visibles que dans le voisinage du périhélie, et que par cette raison c'est ordinairement de leur périhélie que se comptent leurs anomalies, il faut réduire ces anomalies comme si elles étoient comptées de l'aphélie, lorsqu'on voudra faire usage des équations (767) qui sont construites dans cette hypothèse. Pour cet effet on ajoutera 180° aux anomalies données, après le passage au périhélie, et avant ce passage on prendra leur supplément à 180° .

771. SOLUTION II. En poussant jusqu'à la neuvième puissance de l'excentricité les opérations de M. de la Lande (*Astr.* 3335), dans lesquelles $a = 1$, on trouve

$$z =$$

$$\begin{aligned} u + 2e \sin. u + \left(\frac{3}{4} e^2 + \frac{1}{8} e^4 + \frac{3}{64} e^6 + \frac{3}{128} e^8 \right) \sin. 2u \\ + \left(\frac{1}{3} e^3 + \frac{1}{8} e^5 + \frac{1}{16} e^7 + \frac{7}{192} e^9 \right) \sin. 3u + \left(\frac{5}{32} e^4 + \frac{3}{32} e^6 + \frac{15}{256} e^8 \right) \sin. 4u \\ + \left(\frac{3}{40} e^5 + \frac{1}{16} e^7 + \frac{3}{64} e^9 \right) \sin. 5u + \left(\frac{7}{192} e^6 + \frac{5}{128} e^8 \right) \sin. 6u \\ + \left(\frac{1}{56} e^7 + \frac{3}{128} e^9 \right) \sin. 7u + \frac{9}{1024} e^8 \sin. 8u + \frac{5}{1152} e^9 \sin. 9u. \end{aligned}$$

Cette série, convertie par la méthode que j'ai proposée (371, 372), me donne la suivante qui résout le problème :

$$u =$$

$$\begin{aligned} z - \left(2e - \frac{1}{4} e^3 + \frac{5}{96} e^5 + \frac{107}{4608} e^7 + \frac{6217}{368340} e^9 \right) \sin. z + \\ \left(\frac{5}{4} e^2 - \frac{11}{24} e^4 + \frac{17}{192} e^6 + \frac{43}{5760} e^8 \right) \sin. 2z - \left(\frac{13}{12} e^3 - \frac{43}{64} e^5 + \frac{95}{512} e^7 - \frac{973}{61440} e^9 \right) \sin. 3z \\ + \left(\frac{103}{96} e^4 - \frac{351}{480} e^6 + \frac{4183}{11520} e^8 \right) \sin. 4z - \left(\frac{1097}{760} e^5 - \frac{5257}{46080} e^7 + \frac{164921}{2350080} e^9 \right) \sin. 5z \\ + \left(\frac{1323}{760} e^6 - \frac{7213}{46080} e^8 \right) \sin. 6z - \left(\frac{47273}{32256} e^7 - \frac{1173271}{737280} e^9 \right) \sin. 7z \\ + \frac{556403}{322560} e^8 \sin. 8z - \frac{10661923}{5160960} e^9 \sin. 9z. \end{aligned}$$

M. l'Abbé Bossut (*Mémoires des Prix*, 1766) a donné, pour parvenir à cette dernière série, une méthode aussi simple qu'élégante, et qui, d'après l'épreuve que j'en ai faite, n'est pas plus laborieuse que la mienne. Mais comme celle-ci est purement trigonométrique, j'ai dû la préférer dans ce Traité à celle de ce savant Géometre. J'observerai qu'ayant trouvé par l'une et l'autre méthode les mêmes coefficients numériques jusqu'à la 8^e puissance de l'excentricité inclusivement, je ne puis douter qu'ils ne soient exacts. Je n'ai calculé les coefficients de la 9^e que par ma méthode.

M. Jeaurat (*Mémoires présentés à l'Acad.* Tom. IV, pag. 605) a donné une série poussée jusqu'à e^8 , laquelle sert à trouver de même le rayon vecteur par l'anomalie moyenne. *V. p. 370.*

772. Trouver une méthode expéditive pour calculer les tables de l'équation du centre, et du rayon vecteur d'une planète.

On peut employer les formules (767, 12°, 14°) pour faire ces calculs avec beaucoup de promptitude, et d'ailleurs avec autant

d'exactitude qu'on peut le desirer. Nous en donnerons un exemple sur l'orbite la plus elliptique, en cherchant l'équation du centre et le rayon vecteur de Mercure pour 1° d'anomalie moyenne.

Partons de $z = 0$; alors $r = a + e$, et $\delta z = 1^\circ$. En calculant l'équation 14° avec les éléments de l'orbite pris dans l'Astronomie de M. de la Lande, et employant dans le premier calcul r au lieu de $(r - \frac{1}{2}\delta r)$, parceque δr n'est pas encore connu, on a

$$\begin{array}{rcl} \log.(\delta z = 3600'') & = & 3,5563025 \\ \log.a & = & 4,5878219 \\ \log.b & = & 4,5784400 \\ \log.\text{constant} & = & 2,7225644 \\ \text{compl.log.}rr & = & 0,6619268 \\ \log.\delta u & = & 3,384491 \end{array}$$

Et par conséquent $\delta u = 40' 23''$, 77 à très peu près.

Nommant q l'équation du centre, on sait que $z - u = q$; ce qui donne $\delta z - \delta u = \delta q$. Donc, dans notre exemple, $\delta q = 60' - 40' 24'' = 19' 36''$. C'est la différence de l'équation du centre, pour les deux cas de $z = 0$ et de $z = 1^\circ$. Mais on sait encore que lorsque $z = 0$, on a de même $u = 0$, et par conséquent $q = 0$. Donc lorsque $z = 1^\circ$, $u = 40' 24''$, et $q = 19' 36''$; ce qui est précisément l'équation du centre de Mercure, à 1° d'anomalie moyenne, dans les Tables de M. de la Lande.

Pour le calcul du rayon vecteur, il est à propos de convertir l'équation 12° de manière qu'elle donne les différences des logarithmes, parceque ce sont les logarithmes que les tables renferment. En prenant le premier terme de la série (G), (175), beaucoup plus exact que le premier terme de la série (E), on a $-\delta \log.r$

$$= -M \times \frac{\delta r}{r - \frac{1}{2}\delta r}; \text{ et substituant la valeur de } \delta r, (767, 12'),$$

$$-\delta \log.r = \frac{Mae \delta z}{bR''} \times \frac{\sin.(u + \frac{1}{2}\delta u)}{r - \frac{1}{2}\delta r},$$

équation qui se calcule comme il suit :

(177), $\log. M$	$= 9,6377843$
$\log. a$	$= 4,5878219$
$\log. e$	$= 3,9009131$
$\log. \delta z$	$= 3,5563025$
$\text{compl. log. } b$	$= 5,4215600$
(262), $\text{compl. log. } R''$	$= 4,6855749$
$\log. \text{constant}$	$1,789957$
$\log. \sin. (u + \frac{1}{2} \delta u = 0^\circ 20' 12'') =$	$7,769075$
$\text{compl. log. } (r = a + e) =$	$5,330963$
$\log. (-\delta \log. r) =$	$4,889995$
Ce logarithme donne $\delta \log. r = -$	$0,0090078$
Mais $\log. r =$	$4,6690366$
Somme	$4,6690288$

Et tel est en effet dans les tables de M. de la Lande le log. du rayon vecteur de Mercure, à 1° d'anomalie moyenne.

La valeur trouvée de $\delta \log. r$ sert à corriger les deux calculs précédents où on auroit dû employer $\log. (r - \frac{1}{2} \delta r)$ au lieu de $\log. r$. Cette correction se réduit à ajouter 4 au dernier chiffre de $\log. (-\delta \log. r)$, ce qui n'altère point dans ce cas la valeur de $\delta \log. r$, et à ajouter 8 au dernier chiffre de $\log. \delta u$, ce qui donne plus exactement $\delta u = 40' 23'', 81$.

En faisant $z = 1^\circ$, on trouvera de même les valeurs de u et de q correspondantes à $z = 2^\circ$; et on procédera de la même manière de degré en degré. Pour se convaincre de la promptitude de ces opérations, il suffit d'observer 1° . que la marche des valeurs successives de $\delta \log. r$ avertit le Calculateur de la valeur très approchée de la quantité $\log. (r - \frac{1}{2} \delta r)$ qu'il doit employer dans chaque calcul; ce qui lui épargne le travail des corrections: 2° . qu'au moyen des logarithmes constants, les deux calculs de l'équation du centre et du rayon vecteur n'exigent d'autre recherche que celle de trois logarithmes pour chaque degré d'anomalie moyenne.

On pourroit craindre, en se servant de formules dont l'exactitude est à la vérité très approchée, mais non pas rigoureuse, que l'accumulation des erreurs ne devînt telle qu'elle dût mériter attention. Mais il sera facile de se rassurer en faisant de temps en temps les calculs par le moyen des équations (767, 1°, 2°, 5°), et cherchant x par la méthode (769). Je suppose par exemple que ces calculs plus rigoureux se fassent de 30° en 30° d'anomalie moyenne. Ensuite pour faire avec plus de sûreté les calculs intermédiaires au moyen de mes formules différentielles, 1°. on tiendra compte des centièmes de seconde, dans la formation des valeurs successives de u et de q ; 2°. on formera les logarithmes successifs du rayon vecteur au moins avec une décimale de plus que ce qu'on veut en donner aux logarithmes de la table; 3°. on partira de 0° d'anomalie moyenne pour monter jusqu'à 15°, et de 30° pour descendre jusqu'à 15°: on s'y prendra de même pour les autres intervalles.

Observons que les équations 12°, 14°, et au lieu de celles-là, les 8° et 10° sont singulièrement propres à fournir avec une grande précision les parties proportionnelles dans les tables déjà faites; lorsque par la règle de trois qu'on emploie ordinairement on ne pourra obtenir toute l'exactitude désirée, à cause de la trop grande inégalité des variations de l'équation du centre, et du logarithme du rayon vecteur.

773. *Trouver la plus grande équation du centre d'une planète.*

Au point de la plus grande valeur de q , on a $\delta q = 0$, (141); par conséquent l'équation (772), $\delta q = \delta z - \delta u$, donne, dans ce cas, $\delta z = \delta u$. Donc alors $ab = rr$, (767, 10°), ou $r = \sqrt{ab} = \frac{\sqrt{bb}}{a - e \cos u}$, (767, 3°). De cette dernière équation on tire

$$\cos. u = \frac{a - b \sqrt{\frac{b}{a}}}{e}.$$

Cette formule est simple et peut-être neuve. Mais comme la différence

rence entre les deux termes du numérateur se trouve ordinairement petite, ce qui peut nuire à l'exactitude des secondes dans la valeur de u , je transforme cette équation, et j'ai (I. 42°) :

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} u = \sqrt{\frac{b \sqrt{\frac{b}{a}} - (a - e)}{a + e - b \sqrt{\frac{b}{a}}}}.$$

Mais $(a - e)(a + e) = bb$, (767, 6°) : prenant dans cette équation les valeurs de $a + e = \frac{bb}{a - e}$ et de $a - e = \frac{bb}{a + e}$, les substituant dans l'équation précédente, et divisant la fraction par $b \sqrt{\frac{b}{a}}$, j'obtiens l'expression suivante qui peut être plus commode pour l'usage des logarithmes :

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} u = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{ab}}{a + e}}{\frac{\sqrt{ab}}{a - e} - 1}}.$$

L'une ou l'autre de ces deux dernières formules fera connoître avec précision l'anomalie vraie correspondante à la plus grande équation du centre. La valeur trouvée de $\operatorname{tang} \frac{1}{2} u$ sera utile pour le calcul de l'équation 5° (767), qui fera connoître l'anomalie excentrique, de laquelle on déduira ensuite l'anomalie moyenne en employant l'équation 1°; et enfin l'équation $\eta = z - u$ donnera la plus grande valeur cherchée.

774. *Trouver une méthode expéditive pour calculer la table générale du mouvement des comètes dans une orbite parabolique.*

Nommons t le temps écoulé depuis le passage au périhélie, de la comète de 109 jours : (c'est ainsi qu'on appelle la comète dont la distance périhélie seroit égale à la distance moyenne du soleil à la Terre, parceque cette comète en partant du périhélie parcourroit 90° d'anomalie vraie en 109 jours). Nous considérons le temps t comme compté en jours et décimales de jours.

On a (la Lande, *Astr.* 3034),

$$(F) \dots \dots \text{tang.}^3 \frac{1}{2} u + 3 \text{tang.}^{\frac{1}{2}} u = \frac{4t}{109,6154};$$

Et en différentiant, $\frac{3 \delta u \text{ tang.}^3 \frac{1}{2} u}{2 \cos.^2 \frac{1}{2} u} + \frac{3 \delta u}{2 \cos.^2 \frac{1}{2} u} = \frac{4 \delta t}{109,6154} =$
 $\frac{3 \delta u}{2 \cos.^2 \frac{1}{2} u} (1 + \text{tang.}^2 \frac{1}{2} u) = \frac{3 \delta u}{2 \cos.^4 \frac{1}{2} u},$ (I. 19°). Je mets, pour plus d'exactitude, $\cos. \frac{1}{2} (u + \frac{1}{2} \delta u)$ au lieu de $\cos. \frac{1}{2} u$, comme me l'indiquent par analogie les différentielles finies des lignes trigonométriques, et j'ai

$$(G) \dots \dots \delta u = \frac{4 R'' \delta t}{164,4231} \times \cos.^4 \frac{1}{2} (u + \frac{1}{2} \delta u).$$

Le facteur R'' est nécessaire pour obtenir δu en secondes.

Il est évident que la fraction $\frac{4 R'' \delta t}{164,4231}$ étant une quantité constante dans le calcul d'une table, ce calcul doit se faire très rapidement en employant la formule que je viens de donner. Il sera de plus très exact, lorsqu'on tiendra compte des centièmes de secondes dans la formation des valeurs successives de u , comme je l'ai dit (772), et lorsque pour obvier à l'accumulation des petites erreurs, on résoudra par intervalles l'équation (F), en employant la valeur de u trouvée par le moyen de l'équation (G), et cherchant celle de t : l'erreur de celle-ci étant connue, il est facile de corriger l'erreur de u , en employant la même formule (G).

La table générale du mouvement des comètes a été recalculée avec le plus grand soin et augmentée par le P. Pingré dans son excellent *Traité sur les Comètes*. Cependant les formules (F), (G) peuvent encore avoir leur application, soit pour la vérification de cette table ou de toute autre de la même espèce, soit pour trouver les quantités intermédiaires ou les parties proportionnelles avec la plus grande précision.

775. Trouver le mouvement horaire d'une planète en longitude.

En nommant δz le mouvement horaire moyen en longitude, δu le mouvement horaire vrai sur l'orbite, ces mouvements et ceux

d'anomalie correspondants étant sensiblement égaux pour un temps d'une heure; la formule (767, 14°) donne la solution de ce problème avec plus d'exactitude qu'on n'en peut desirer dans un passage de Mercure ou de Vénus sur le disque du Soleil: la 10° suffira, lorsque le problème n'exigera pas autant de précision.

Si l'on veut avoir le mouvement horaire réduit au plan de l'écliptique, qu'on représente ce mouvement par AE, et le mou- Fig. 52
vement correspondant sur l'orbite par CD. Puisque $A = 90^\circ \doteq E$, les angles A et B sont constants, et changeant C en A et A en C dans l'analogie infinitésimale (679), on aura $\delta AB : \delta BC :: \cos. B : \cos.^2 AC$. Mais AC est la latitude héliocentrique de la planete, B l'inclinaison de l'orbite, $\delta BC = CD = \delta u$. Donc en faisant AE ou $\delta AB = \delta u'$, et mettant dans l'analogie la valeur (767, 10°) de δu , on aura

$$\delta u' = \delta z \times \frac{ab}{rr} \times \frac{\cos. incl.}{\cos.^2 lat.}$$

776. Trouver le mouvement horaire d'une planete en latitude.

La distance à une planete, comptée de son nœud ascendant; selon l'ordre des signes, sur l'orbite, se nomme *argument de latitude*. Comme le mouvement du nœud est insensible dans un temps d'une heure, on a $\delta arg. lat. = \delta long. plan. = \delta u$, (775). Cela posé, je prends l'équation (*Astr. la Lande*, 1129), $\sin. lat. = \sin. incl. \sin. arg. lat. = \sin. incl. \sin. dist. \oslash$, et différentiant j'ai $\delta lat. \cos. lat. = \delta u \cos. dist. \oslash \sin. incl. = \delta u \sin. lat. \cot. dist. \oslash$. En substituant la valeur de δu , (767, 10°), et désignant encore par δz le mouvement horaire moyen en longitude, j'obtiens la formule suivante;

$$\delta lat. = \delta z \times \frac{ab}{rr} \times \tan g. lat. \cot. dist. \oslash.$$

777. Trouver le mouvement des nœuds des orbites des planetes, sur l'écliptique, produit par les attractions réciproques.

Soit AB l'écliptique, et supposons que les signes procèdent Fig. 71
de B en A; soit AC l'orbite d'une planete P, et BC l'orbite d'une

Fig.71 autre planète p . Je considère d'abord l'effet de l'attraction de la planète p , en raison duquel le nœud C des deux orbites rétrograde sur l'orbite BC , de sorte que l'orbite troublée AC se trouve, par exemple, dans la situation ac . Il est visible que cette perturbation n'altère pas l'angle B : de plus l'altération qu'éprouve l'angle C de l'inclinaison mutuelle des deux orbites est si faible, d'après les observations, que relativement au mouvement des nœuds on peut la considérer comme une quantité à-peu-près nulle, et supposer sans scrupule que $C = c$. Donc le triangle ABC , en se changeant en aBc , conserve comme constants les angles B et C ; on a par conséquent (675):

$$(H) \dots \delta BC : \delta AB :: 1 : \cos.B + \sin.B \cos.AB \cot.A.$$

Or δBC est le mouvement rétrograde Cc de l'orbite troublée, sur celle de la planète troublante, et la quantité de ce mouvement est déterminée par la théorie de l'attraction; δAB est le mouvement cherché du nœud A de l'orbite troublée, sur l'écliptique; B ou CBA est l'inclinaison de l'orbite perturbatrice; A ou BAC est le supplément de l'inclinaison de l'orbite troublée; AB est la distance entre les nœuds des deux planètes sur l'écliptique. Les trois dernières quantités sont toujours connues; et par conséquent notre formule (H) a l'avantage de résoudre immédiatement le problème, en donnant l'inconnue sans qu'on soit obligé à aucun calcul préliminaire pour déterminer la valeur de quelque autre partie du triangle ABC .

Fig.72 Pour trouver maintenant le mouvement du nœud de la planète p , produit par l'attraction de la planète P , on appellera BC l'orbite de celle-ci, AC l'orbite de p , transportée en ac par la perturbation; et l'analogie (II) résoudra encore ce problème. On observera seulement qu'ici BAC est l'inclinaison de l'orbite troublée, et B le supplément de l'inclinaison de l'orbite perturbatrice.

Si l'on nomme PP la planète troublante, pp la planète troublée, m le mouvement de l'orbite troublée sur celle de la planète

troublante, et qu'on observe qu'au lieu de l'angle d'inclinaison de celle des deux planetes dont le nœud est plus avancé en longitude, on doit employer le supplément de ce même angle, l'analogie (H) donnera généralement

(K)... Mouvement du nœud = $m (\cos.incl.PP + \sin.incl.PP \cos.dist.nœuds \cot.incl.pp)$.

778. La fig. 71 suppose *rétrograde* le mouvement Aa du nœud A sur l'écliptique; la fig. 72 le suppose *direct*. Ce seroit le contraire, si ca coupoit CA entre les points A et C, comme cela arrive aussi. Il importe donc d'avoir une regle générale pour déterminer dans quel cas le mouvement cherché est *direct*, et dans quel autre il est *rétrograde*. Les signes que j'ai donnés aux différentielles dans la construction de mes analogies conduisent à cette regle. Puisque δBC et δAB ont le même signe dans l'analogie (H), il s'ensuit (726) que ces variations se font dans un même sens lorsque le quatrieme terme de l'analogie est positif, et en sens contraires lorsque ce terme est négatif. Or dans le système de l'attraction, le mouvement Cc est toujours *rétrograde*; ensorte que BC diminue, et que δBC est *négatif*. De plus la diminution de AB indique le mouvement *rétrograde* dans le cas de la fig. 71, et le mouvement *direct* dans le cas de la fig. 72. Donc le mouvement du nœud ascendant de la planete troublée est ou direct ou *rétrograde*, selon que le nœud ascendant de la planete troublante est plus avancé ou moins avancé en longitude que le nœud de la planete troublée. Cette regle suppose positif le facteur binôme de m dans l'équation (K): lorsqu'il sera négatif, on mettra dans la même regle *moins* au lieu de *plus*, et *plus* au lieu de *moins*. De cette maniere on n'aura pas besoin de consulter une figure pour se guider dans le calcul.

779. Appliquons notre solution et nos regles à un exemple dans lequel nous ferons abstraction de la valeur absolue de δBC et de δAB . La longitude du nœud de Saturne est actuellement $3^{\circ} 22'$, celle du nœud de Mars $1^{\circ} 18'$. Donc la distance des nœuds est de

$2^{\circ} 4' = 64^{\circ}$. L'inclinaison de l'orbite de Saturne est de $2^{\circ} 30'$, celle de Mars de $1^{\circ} 51'$. Si on cherche l'effet de l'attraction de Mars sur le nœud de Saturne, on a $\log. \cos. incl. PP. = \log. \cos. 1^{\circ} 51' = 9,9998$; et $\log. (\sin. incl. PP \cos. dist. nœuds \cot. incl. pp) = \log. (\sin. 1^{\circ} 51' \cos. 64^{\circ} \cot. 177^{\circ} 30') = -9,5107$, logarithme d'une quantité négative (734). Comme ce logarithme est plus petit que le précédent, il s'ensuit que le facteur binôme de m est une quantité positive; et puisque le nœud de Mars, planète troublante, est *moins* avancé en longitude que le nœud de Saturne, le mouvement du nœud de Saturne, en vertu de l'attraction de Mars, sera *rétrograde*.

Si l'on cherche l'effet de l'attraction de Saturne sur le nœud de Mars, on a $\log. \cos. incl. PP = \log. \cos. 177^{\circ} 30' = -9,9996$; et $\log. (\sin. incl. PP \cos. dist. nœuds \cot. incl. pp) = \log. (\sin. 177^{\circ} 30' \cos. 64^{\circ} \cot. 1^{\circ} 51') = 9,7723$. Le facteur de m est donc négatif, et par conséquent on doit changer *moins* en *plus* dans la règle, et les mots *plus* et *rétrograde* se correspondront. Mais le nœud de Saturne ou de la planète troublante, est le *plus* avancé en longitude; donc aussi l'attraction de Saturne fait *rétrograder* le nœud de Mars.

780. Trouver le maximum du mouvement du nœud d'un satellite sur l'orbite de Jupiter, causé par l'attraction d'un autre satellite.

- Fig. 71 Soit BA l'orbite de Jupiter, BC celle du satellite troublant, AC celle du satellite troublé. Il résulte des perturbations continuelles que les nœuds A et C rétrogradant en a et en c , et successivement de plus en plus, se confondent enfin avec le nœud B; puis l'orbite
- Fig. 72. troublée AC passe au-delà et s'avance de l'autre côté du nœud B; jusqu'à ce que le nœud A arrive à la plus grande distance possible du nœud B. Alors l'orbite AC se rapproche de nouveau, les nœuds A et C reviennent se confondre avec le nœud B; puis le nœud A
- Fig. 71 s'éloigne de B jusqu'à ce que la distance AB soit la plus grande possible. Le nœud A du satellite troublé va et vient ainsi périodiquement de chaque côté du nœud B du satellite troublant. Or la

plus grande valeur de AB est ce qu'il est question de déterminer.

Lorsqu'un triangle a deux parties constantes, les questions de *maximis* et de *minimis* des parties variables se résolvent immédiatement par la Trigonométrie, (on en verra (831, 832) d'autres exemples) sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours aux opérations quelquefois pénibles du calcul différentiel qu'exige la règle (141).

En effet dans le triangle ABC on a $\sin.B : \sin.C :: \sin.AC : \sin.AB$. Mais les angles B et C sont constants (777) : il est donc évident, par les tables des sinus, que $\sin.AB$ sera le plus grand possible quand on aura $AC = 90^\circ$, et que si alors $AB < 90^\circ$, ce sera aussi le moment du *maximum* de AB. Mais lorsque $AC = 90^\circ$, en premier lieu AB ne peut être de 90° , parceque (417) B seroit aussi de 90° , ce qui n'est pas, puisqu'il s'en faut qu'aucun des satellites de Jupiter ait son orbite perpendiculaire sur l'orbite de cette planète : en second lieu AB ne peut être plus grand que 90° ; car (VII. 16°), comme $AC = 90^\circ$, $\cot.B = -\cos.AB \cot.A$, ou $\cos.AB = -\tan.A \cot.B$, et les deux angles A et B du triangle ABC étant évidemment et nécessairement d'espèces différentes, il s'ensuit que $\cos.AB$ est toujours positif. Donc la distance qu'apporte entre les nœuds de deux satellites l'attraction de l'un des deux (abstraction faite de la réaction du satellite troublé) est la plus grande possible, lorsque l'intersection commune de leurs orbites est à 90° du nœud du satellite troublé.

La dernière équation, $\cos.AB = -\tan.A \cot.B$, fera donc connoître aisément la plus grande valeur de AB.

781. M. de la Lande a le premier reconnu que les perturbations doivent altérer l'inclinaison des orbites planétaires sur l'écliptique; découverte très importante, sur-tout par son application aux changements d'inclinaison des orbites des satellites sur l'orbite de Jupiter. Comme je ne crois pas que pour déterminer ces changements on puisse rien ajouter à la formule et à la règle données par ce célèbre Astronome (*Astr.* 1377 à 1381), je me contente de les indiquer au Lecteur.

782. *Trouver le changement de l'ascension droite, de la longitude, de la latitude et de l'angle de position des astres, et celui de l'obliquité de l'écliptique, occasionnés par l'attraction des planetes sur la Terre.*

Fig. 72 Soit AC l'écliptique, l'ordre des signes de A en C, AB l'équateur, A le premier point du belier, BC l'orbite d'une planete dont l'attraction sur la Terre déplace l'écliptique de AC en *ac*. Les angles B, C étant constants (777), et la théorie de l'attraction donnant la quantité Cc que nous avons appelée *m*, on demande d'abord la valeur de Aa, variation de AB ou de l'ascension droite des astres, qui se compte du point A, et la valeur de (CAB — caB), variation de l'angle A ou de l'obliquité de l'écliptique. Or (673, 664), $\Delta BC : \Delta AB :: \sin. A : \sin. C \cos. AC$, et $\Delta BC : \Delta A :: 1 : \sin. AC \sin. C$. Donc, nommant PP la planete troublante, $\oslash$ la longitude de son nœud ascendant, et remarquant que ΔBC est négative (778), d'où s'ensuit la diminution de AB ainsi que de A, lorsque $\cos. AC$ et $\sin. AC$ sont respectivement positifs (42); on a

$$(K) \dots \text{dimin. asc. dr.} = m \cos. \oslash \times \frac{\sin. incl. PP}{\sin. obliq.}.$$

$$(L) \dots \text{dimin. obliq.} = m \sin. \oslash \sin. incl. PP.$$

La diminution devient augmentation dans ces formules, lorsque le second membre est négatif.

En appliquant ces formules à chacune des planetes successivement, et prenant la somme des résultats de chaque formule, on a l'effet total des perturbations planétaires sur l'ascension droite des astres et sur l'obliquité de l'écliptique.

Fig. 73 Soit maintenant P le pôle du Monde, E celui de l'écliptique, S le lieu d'un astre, L la situation nouvelle du pôle de l'écliptique troublée par la somme des attractions des planetes. On connoît par les formules précédentes le petit angle EPL qui est la diminution de l'ascension droite, commune à tous les astres, et (PE — PL) qui est la diminution de l'obliquité : on demande la variation qui a lieu, à raison de ces diminutions, sur l'angle E ou sur les longitudes des

des astres, sur le côté ES ou sur leurs latitudes, et sur l'angle S de position.

En se changeant en PLS, le triangle PES conserve comme constant le seul côté PS (d'où il suit, pour le remarquer en passant, que les déclinaisons des astres ne sont point altérées par les perturbations planétaires). J'emploierai donc la méthode que j'ai donnée (284). Je suppose d'abord que l'angle EPS est de même constant; puis faisant $P = A$, $S = B$, $E = C$, et changeant les signes dans le premier rapport des analogies infinitésimales (545, 550, 541), ces analogies me donnent :

$$\begin{aligned} \partial E &: - \partial PE :: \sin.E : \text{tang}.ES \\ - \partial ES &: - \partial PE :: \cos.E : 1 \\ - \partial S &: - \partial PE :: \sin.E : \sin.ES. \end{aligned}$$

Je suppose actuellement qu'indépendamment de PS, PE soit constant. J'aurai (642, 631, 635),

$$\begin{aligned} \partial E &: - \partial P :: \cos.PE - \sin.PE \cos.E \cot.ES : 1 \\ - \partial ES &: - \partial P :: \sin.PE \sin.E : 1 \\ \partial S &: - \partial P :: \sin.PE \cos.E : \sin.ES. \end{aligned}$$

Prenant les sommes des deux valeurs partielles de ∂E , de ∂ES et de ∂S données par ces six analogies, je trouve

$$\begin{aligned} \partial E &= - \partial PE \sin.E \cot.ES - \partial P (\cos.PE - \sin.PE \cos.E \cot.ES), \\ - \partial ES &= - \partial PE \cos.E - \partial P \sin.PE \sin.E, \\ - \partial S &= - \frac{\partial PE \sin.E - \partial P \sin.PE \cos.E}{\sin.ES}. \end{aligned}$$

La diminution de la longitude, correspondante à la quantité $-\partial P \cos.PE$, est commune à tous les astres, ensorte qu'on peut la négliger ici et la laisser confondue avec la précession des équinoxes (784); car l'objet des formules précédentes est de connoître et de distinguer des variations communes à tous les astres la variation propre et particulière que les perturbations occasionnent sur la

Fig. 73 position d'un astre donné. Cela posé, rappelons-nous que l'on a (740), $E = 90^\circ - \text{long.}$, $ES = 90^\circ - \text{lat.}$, $P = 90^\circ + \text{asc.dr.}$, $PE = \text{obl.}$; par conséquent $\delta E = - \delta \text{long.} = - \text{var. long.}$, $\delta ES = - \delta \text{lat.} = - \text{var. lat.}$, $\delta P = \delta \text{asc.dr.} = - \text{dim. asc.dr.}$, et $\delta PE = \delta \text{obl.} = - \text{dim. obl.}$ (Je donne le signe négatif à dim. asc.dr. et à dim. obl. , parcequ'on auroit leurs valeurs négatives par les équations (K), (L), si on y faisoit m négatif, comme il l'est réellement). Les dénominations ou valeurs que nous venons de trouver, étant substituées dans les trois équations précédentes qui nous ont donné les valeurs de δE , de δES , et de δS , nous aurons

$$\text{var. long.} = - \text{tang. lat.} (\text{dim. obl.} \cos. \text{long.} - \text{dim. asc.dr.} \sin. \text{obl.} \sin. \text{long.})$$

$$\text{var. lat.} = \text{dim. obl.} \sin. \text{long.} + \text{dim. asc.dr.} \sin. \text{obl.} \cos. \text{long.}$$

$$\text{var. ang. posit.} = - \frac{1}{\cos. \text{lat.}} (\text{dim. obl.} \cos. \text{long.} - \text{dim. asc.dr.} \sin. \text{obl.} \sin. \text{long.})$$

Quand on a en nombres les coefficients de $\sin. \text{long.}$ et de $\cos. \text{long.}$, le second membre de chacune de ces équations se réduit à un seul terme par la méthode (369).

Si la latitude est australe, on fera négatif le second membre de l'avant-dernière équation; car alors $+ \delta ES = + \text{var. lat.}$

Si l'astre est dans le second ou dans le troisième quart de l'écliptique, on changera le signe du second membre de la dernière équation; car l'angle de position passant par zéro à 90° de la longitude de l'astre, devient ensuite négatif (16), et par conséquent sa variation change de signe.

783. Trouver la correction de l'ascension droite et de la déclinaison d'un point quelconque de l'écliptique, relativement à la diminution de l'obliquité.

Fig. 55 Soit BC un arc de l'écliptique auquel corresponde l'arc AB de l'équateur quand l'obliquité est ABC, et l'arc BD de l'équateur si l'obliquité devient CBD. Le côté BC et l'angle droit opposé étant

constants, on a (610, 593), $\delta AB : -\delta B :: \sin. 2 AB : 2 \cot. B$,
et $-\delta AC : -\delta B :: \tan. AC : \tan. B$. Donc

$$\text{augmentat. asc.dr.} = \frac{1}{2} \dim. obl. \cot. obl. \sin. 2 \text{ asc.dr.}$$

$$\dim. \text{décl.} = \dim. obl. \cot. obl. \tan. \text{décl.}$$

La première de ces formules est plus commode que celle qui se trouve dans la *Conn. des Temps* pour l'année 1766, pag. 188, sur-tout pour le calcul d'une table telle que la table XIX de M. de la Lande (*Astr. Tom. I*).

784. Trouver les changements de l'ascension droite, de la déclinaison, et de l'angle de position des astres, causés par la précession des équinoxes, ou par les attractions qu'exercent le soleil et la lune sur le sphéroïde terrestre.

Soit S un astre, E le pôle de l'écliptique, P le pôle de l'équa- Fig. 74
teur, lequel, à cause des attractions solaire et lunaire, change de position, passe en L, et continue de se déplacer successivement, en accomplissant sa révolution autour du pôle E dans l'intervalle de 25750 années environ. Il est visible que le côté ES, et par conséquent la latitude de l'astre ne souffre point d'altération. Mais dans ce problème on regarde encore le côté PE comme constant, ou comme égal à LE, parceque l'altération qu'éprouve l'obliquité PE de l'écliptique dépend uniquement de l'inégalité périodique de l'attraction lunaire, et se considère séparément dans le problème (785). Ainsi dans le triangle PES qui se convertit en ELS et conserve comme constants les côtés EL, ES, étant donné PEL ou la précession en longitude, on demande la variation correspondante des angles P, S, et du côté PS. Faisant $E = A$, $S = B$, $P = C$, on a (642, 631, 635)

$$\begin{aligned} \delta P &: -\delta E :: \cos. PE - \sin. PE \cos. P \cot. PS : 1, \\ -\delta PS &: -\delta E :: \sin. PE \sin. P : 1, \\ \delta S &: -\delta E :: \sin. PE \cos. P : \sin. PS. \end{aligned}$$

Ddd ij

Fig. 74. Or comme nous l'avons vu (740), $E = 90^\circ - \text{long.}$, $P = 90^\circ + \text{asc.dr.}$, $PS = 90^\circ - \text{décl.}$; par conséquent $-\delta E = +\delta \text{long.} = + \text{précess.long.}$, $\delta P = + \text{préc.asc.dr.}$, $\cos.P = -\sin.\text{asc.dr.}$, et $-\delta PS = + \text{précess.décl.}$. De plus en employant la méthode (722), on trouve que pour avoir les précessions avec une grande exactitude, il faut écrire dans le second rapport des analogies précédentes, $P + \frac{1}{2}\delta P$ au lieu de P , et $PS - \frac{1}{2}\delta PS$ au lieu de PS ; ce qui importe sur-tout lorsqu'on cherche le mouvement de précession pour un intervalle de plusieurs années. Appellant donc *asc.dr. intermédiaire*, *décl. intermédiaire* l'ascension droite et la déclinaison de l'astre dans l'année qui tient le milieu entre la première et la dernière des années qu'embrasse le calcul, on a

$$\text{préc.asc.dr.} = \text{préc.long.} (\cos.\text{obl.} + \sin.\text{obl.} \sin.\text{asc.dr.int.} \tan.\text{décl.int.})$$

$$\text{préc.décl.} = \text{préc.long.} \sin.\text{obl.} \cos.\text{asc.dr.interm.}$$

$$\text{préc.ang.posit.} = - \text{préc.long.} \sin.\text{obl.} \times \frac{\sin.\text{asc.dr.interm.}}{\cos.\text{décl.interm.}} \quad \text{2p. 470.}$$

Lorsque la déclinaison sera australe, on fera négatif le second membre de la seconde équation; car alors $-\delta PS = -\text{préc.décl.}$

Si l'astre est dans les signes descendans, on fera positif le second membre de la troisième équation; car alors $-\delta E = -\text{préc.long.}$

785. Trouver les changements de l'ascension droite et de la déclinaison d'un astre, produits par la nutation de l'axe de la Terre.

Dans le problème précédent nous avons supposé constante l'obliquité de l'écliptique; ce qui n'est pas rigoureusement vrai, puisque les observations ont appris au célèbre Bradley que les changements considérables de l'inclinaison de l'orbite de la lune relativement à l'équateur, causés par la rapidité du mouvement de son nœud sur l'écliptique, rendent les effets de son attraction périodiquement inégaux, ainsi que l'exigeoit la théorie de Newton.

Voici en quoi consiste l'inégalité : le pôle P, au lieu de rester toujours à égale distance du pôle E, décrit, à-peu-près en 18 ans et demi, une ellipse dont le grand axe est de 18'', et le petit axe de 13'', 4 : la direction du grand axe est vers le pôle de l'écliptique, et par conséquent la plus grande variation que subit l'obliquité à raison de ce mouvement du pôle P, mouvement qu'on nomme *nutaton*, s'étend à 9'' en plus et à 9'' en moins. Les variations intermédiaires sont proportionnelles au cosinus de la longitude du nœud de la lune, comme le démontre M. de la Lande (*Astr.* 2861). Et en général la formule suivante

$$\text{nut. obl.} = 9'' \cos. \Omega$$

donne la correction de l'obliquité moyenne ou uniformément décroissante (782), pour avoir l'obliquité apparente dans un temps donné.

Je suppose que la nutation transporte le pôle de L en P, et qu'on ait PES > LES et PE > EL, ainsi qu'il arrive dans le premier quart de la longitude du nœud. Le triangle ELS en se changeant en PES ne conserve comme constant que le côté ES : la formule précédente donne la variation du côté PE ; on a celle de l'angle E par celle qui suit, (*Astr.* la Lande, 2863, 2874)

$$\text{nut. long.} = - \frac{6'',7}{\sin. \text{obl.}} \times \sin. \Omega = - 16'', 8 \sin. \Omega.$$

Or ayant deux variations, je trouve les autres facilement par la méthode (284). Je suppose d'abord constant, outre le côté ES, l'angle E, et j'ai (545, 550), en faisant A = E, B = S, C = L,

$$\begin{aligned} - \delta L : \delta EL &:: \sin. L : \text{tang. SL}; \\ \delta SL : \delta EL &:: \cos. L : 1. \end{aligned}$$

Faisant ensuite constant, outre le côté ES, le côté EL, j'ai, en changeant les signes dans le premier rapport (642, 631) afin d'avoir δE positive, conformément à la figure,

$$\begin{aligned} - \delta L : \delta E &:: \cos. EL - \sin. EL \cos. L \cot. SL : 1, \\ \delta SL : \delta E &:: \sin. EL \sin. L : 1; \end{aligned}$$

Fig. 74 puis, en prenant les sommes des deux valeurs de δL et de δSL ,

$$-\delta L = \delta EL \sin. L \cot. SL + \delta E (\cos. EL - \sin. EL \cos. L \cot. SL);$$

$$\delta SL = \delta EL \cos. L + \delta E \sin. EL \sin. L.$$

Or $-\delta L = -\delta \text{ asc. dr.} = -\text{nut. asc. dr.}$, $\delta SL = -\text{nut. décl.}$, $\delta EL = \text{nut. obl.} = 9'' \cos. \oslash$, et $\delta E = -\text{nut. long.} = \frac{6'', 7}{\sin. obl.} \times \sin. \oslash$. Substituant ces valeurs dans les deux équations précédentes, observant que $\delta E \cos. EL = 6'', 7 \cot. 23^\circ 28' \sin. \oslash = 15'', 4 \sin. \oslash$, et nous rappelant que $\cos. L = -\sin. \text{asc. dr.}$, nous aurons par la première des deux équations, $\text{nut. asc. dr.} = -\text{tang. décl.} (9'' \cos. \oslash \cos. \text{asc. dr.} + 6'', 7 \sin. \oslash \sin. \text{asc. dr.}) - 15'', 4 \sin. \oslash$. Mais (II. 17°, 16'), $9'' \cos. \oslash \cos. \text{asc. dr.} + 6'', 7 \sin. \oslash \sin. \text{asc. dr.} = 4'', 5 \cos. (\oslash + \text{asc. dr.}) + 4'', 5 \cos. (\oslash \curvearrowright \text{asc. dr.}) - 3'', 35 \cos. (\oslash + \text{asc. dr.}) + 3'', 35 \cos. (\oslash \curvearrowright \text{asc. dr.})$. Donc

$$\text{nut. asc. dr.} = -15'', 4 \sin. \oslash - \text{tang. déclinaison} \times (7'', 85 \cos. \overline{\text{asc. dr.} \curvearrowright \oslash} + 1'', 15 \cos. \overline{\text{asc. dr.} + \oslash}).$$

En traitant de même la seconde équation, elle donnera

$$\text{nut. décl.} = 7'', 85 \sin. (\text{asc. dr.} - \oslash) + 1'', 15 \sin. (\text{asc. dr.} + \oslash).$$

Lorsque la déclinaison sera australe, on fera négatif le second membre de cette formule; car alors $+\delta SL = +\text{nut. décl.}$.

Les tables très commodes de Lambert pour la nutation en ascension droite et en déclinaison, ont été construites d'après les deux formules que nous venons de donner.

Ces mêmes formules et celle de la nutation en longitude servent à convertir en position apparente la position moyenne de l'astre.

786. Trouver l'effet de l'aberration de la lumière sur l'ascension droite et la déclinaison des étoiles fixes.

Soit $\ast$ la longitude d'une étoile, $\odot$ la longitude du soleil.

M. de la Lande (*Astr.* 2818, 2823) démontre avec autant de facilité que de clarté les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{aber. long.} &= - \frac{20'' \cos.(\star - \odot)}{\cos. \text{lat.}}, \\ \text{aber. lat.} &= 20'' \sin.(\star - \odot) \sin. \text{lat.} \end{aligned}$$

La dernière de ces formules exige que dans tous les cas $\sin. \text{lat.}$ soit pris avec le signe positif.

Connoissant par ces équations les changements de la longitude et de la latitude d'une étoile, produits par l'aberration, nous trouverons facilement par la méthode (284) les changements de l'ascension droite et de la déclinaison.

Soit P le pôle du Monde, E celui de l'écliptique, S un astre Fig. 75 vu en T par l'effet de l'aberration de la lumière. Les formules précédentes donnent la variation de l'angle E et celle du côté ES; on cherche la variation de l'angle P et celle du côté PS. Le triangle PES, en se changeant en PTE, conserve comme constant le seul côté PE. Donc si on suppose encore que le côté ES soit constant, on aura (635, 631) en faisant $A = E$, $B = P$, $C = S$, et changeant les signes dans le premier rapport, comme l'indique la figure qui est relative à ce qui arrive dans le premier quart de l'argument $(\star - \odot)$ des formules précédentes ;

$$\begin{aligned} - \partial P : \partial E &:: \sin. ES \cos. S : \sin. PS. \\ \partial PS : \partial E &:: \sin. ES \sin. S : 1. \end{aligned}$$

En supposant constant, outre le côté PE, l'angle E, on a (541, 550)

$$\begin{aligned} - \partial P : - \partial ES &:: \sin. S : \sin. PS, \\ - \partial PS : - \partial ES &:: \cos. S : 1. \end{aligned}$$

Puis, en prenant les sommes des deux valeurs de ∂P et de ∂PS ,

$$\begin{aligned} - \partial P &= \frac{\partial E \sin. ES \cos. S - \partial ES \sin. S}{\sin. PS}, \\ - \partial PS &= - \partial E \sin. ES \sin. S - \partial ES \cos. S. \end{aligned}$$

Mais $- \partial P = - \partial \text{asc. dr.} = - \text{aber. asc. dr.}$; $- \partial PS =$

Fig. 75 *aberr. décl.*, $\delta E = - \text{aberr. long.} = \frac{20'' \cos.(\star - \odot)}{\cos. lat.}$, et $- \delta ES = \text{aberr. lat.} = 20'' \sin.(\star - \odot) \sin. lat.$ Substituant ces valeurs dans les équations précédentes, et appelant p l'angle de position, d la déclinaison et l la latitude de l'astre, on a

$$(M) \dots \text{aberr. asc. dr.} = \frac{-20'' \cos.(\star - \odot) \cos. p - 20'' \sin.(\star - \odot) \sin. p \sin l}{\cos. d}$$

$$(N) \dots \text{aberr. décl.} = -20'' \cos.(\star - \odot) \sin. p + 20'' \sin.(\star - \odot) \cos. p \sin. l$$

Lorsque la déclinaison sera australe, on changera les signes des deux termes du second membre de l'équation (N); car alors $-\delta PS = - \text{aberr. décl.}$. Du reste on observera dans le calcul des deux formules (M), (N) les règles (42, 744) des signes. Mais de plus on fera attention que $\sin. p$ est négatif dans le second et dans le troisième quart de l'ascension droite; car $\sin. S : \sin. PE :: \sin. P : \sin. ES$, d'où il suit qu'on a $\sin. p = \frac{\sin. obl. \cos. asc. dr.}{\cos. lat.}$, et que par conséquent $\sin. p$ et $\cos. asc. dr.$ doivent avoir le même signe.

787. Les formules (M), (N) qui servent à convertir en position apparente la position moyenne d'une étoile, deviennent très commodes pour le calcul, en y introduisant la plus grande aberration respective, laquelle se trouve facilement au moyen de la règle (141). En différentiant d'abord l'équation (M), dans laquelle $\odot$ ou la longitude du soleil est la seule quantité variable, puis multipliant l'équation différentielle par $\cos. d$, on a $0 = -20'' \sin.(\star - \odot) \cos. p \delta \odot + 20'' \cos.(\star - \odot) \sin. p \sin. l \delta \odot$. D'où l'on tire, en divisant par $20'' \cos.(\star - \odot) \cos. p \delta \odot$,

$$(P) \dots \text{tang.}(\star - \odot') = \sin. lat. \text{ tang. ang. posit.}$$

Par $\odot'$ je désigne la longitude du soleil au temps de la plus grande aberration en ascension droite; et comme $(\star - \odot)$ est l'élongation de l'étoile pour un temps quelconque, cette formule donne donc l'élongation de l'étoile, et par conséquent la longitude du soleil, au temps de la plus grande aberration soustractive en ascension

ascension droite. Je dis *soustractive*, ce qui se déduit du signe négatif de l'équation (Q) ci-après.

Je dois observer sur l'emploi de la formule (P), 1°. que *tang.ang.posit.* est négative dans le second et dans le troisième quart de la longitude, comme nous l'avons vu (786) pour le sinus; 2°. que toutes les fois que le calcul de la formule donnera *tang.(★ — ☉')* négative, il faudra rendre cette tangente positive en écrivant *tang.(☉' — ★)*, (154); 3°. enfin qu'en changeant à l'ordinaire le signe de *tang.ang.posit.* lorsque cet angle sera obtus, il faudra dans ce cas, pour avoir le lieu cherché du soleil, ajouter 180° au lieu donné par la formule.

Si on substitue ☉' à ☉ dans la formule (M), cette formule donnera la valeur de la plus grande aberration en ascension droite. Dans ce cas la formule (M) peut se simplifier beaucoup au moyen de la formule (P). Celle-ci donne $\sin.p \sin.l = \frac{\sin.(★ - ☉') \cos.p}{\cos.(★ - ☉')}$. En substituant dans l'équation (M) cette valeur de $\sin.p \sin.l$, réduisant les deux termes du second membre au même dénominateur $\cos.d \cos.(★ - ☉')$, et observant que $\cos.^2(★ - ☉') + \sin.^2(★ - ☉') = 1$, (28), on trouvera

$$(Q) \dots \text{la plus grande aber. en } asc.dr. = - \frac{20'' \cos.p}{\cos.d \cos.(★ - ☉')}.$$

Actuellement nommons a la valeur en secondes, et prise avec le signe positif, de la plus grande aberration en ascension droite; cette formule nous donnera $\frac{20''}{\cos.d} = \frac{a \cos(★ - ☉')}{\cos p}$. Substituant dans la formule (M) cette valeur de $\frac{20''}{\cos.d}$, nous aurons, pour l'aberration dans un moment donné, $aber.asc.dr. = - a \cos.(★ - ☉) \cos.(★ - ☉') - a \sin.(★ - ☉) \tan.p \sin.l \cos.(★ - ☉')$. Mais, par l'équation (P), $\tan.p \sin.l = \tan.(★ - ☉')$. Donc $aber.asc.dr. = - a \cos.(★ - ☉) \cos.(★ - ☉') - a \sin.(★ - ☉) \sin.(★ - ☉')$. Et par conséquent (II. 4°)

$$(R) \dots aber.asc.dr. = - \text{la plus grande aber. asc.dr.} \cos.(☉' \curvearrowright ☉)$$

Ecc

Après avoir déterminé par les formules (Q), (P) la plus grande aberration, et la longitude correspondante du soleil, il est donc facile de trouver par la formule (R) l'aberration pour un moment donné. La différence ($\odot' \curvearrowright \odot$) entre la longitude du soleil dans un moment donné et sa longitude au moment de la plus grande aberration, se nomme *l'argument annuel* de l'aberration.

La table XIX donnée par La Caille dans l'excellent Ouvrage intitulé *Astronomiæ fundamenta*, est construite sur la formule très expéditive (R) : cette table est singulièrement utile pour composer des tables particulières d'aberration.

Fig. 67 788. On peut se dispenser de calculer la formule (P). En effet soit LQ l'équateur, P son pôle, TL l'écliptique, E son pôle, S l'étoile, H le soleil. Dans le triangle SNH, rectangle en N, on a (VI. 11°), $\text{tang. NH} = \sin. \text{NS} \text{ tang. NSH}$. Mais NH est l'élongation de l'étoile, NS la latitude, NSH l'angle de position. L'équation que nous venons de donner est donc la même que l'équation (P). Donc au moment de la plus grande aberration en ascension droite, l'étoile et le soleil ont la même ascension droite ; et par conséquent la longitude du soleil pour ce même instant peut se tirer ou d'une Éphéméride ou d'une table de réduction de l'équateur à l'écliptique, telle que la table XV de La Caille. J'observe que cette table contient des erreurs de 4', et peut-être de plus fortes, je n'en ai vérifié que deux équations : mais on peut calculer une table semblable plus exactement en moins de deux heures. *p. 471.*

789. En procédant pour la formule (N) comme nous avons fait pour la formule (M), et nommant $\odot''$ la longitude du soleil au temps de la plus grande aberration *soustractive* en déclinaison, on trouvera les équations suivantes :

$$(S) \dots \text{tang.}(\odot'' - \star) = \sin. \text{lat.} \cot. \text{ang. posit.}$$

$$(T) \dots \text{la plus grande aber. en décl.} = - \frac{20'' \sin. p}{\cos. (\odot'' \curvearrowright \star)}$$

$$(U) \dots \text{aber. décl.} = - \text{la plus grande aber. décl.} \cos. (\odot'' \curvearrowright \odot)$$

La différentiation de la formule (N) donne négative la valeur de $\text{tang.}(\star - \odot'')$. Mais $-\text{tang.}(\star - \odot'') = +\text{tang.}(\odot'' - \star)$, (154). Ce changement fait, si l'on veut arriver aux formules (T), (U), il faut, par la même raison (154), substituer $-\sin.(\odot'' - \star)$ à $\sin.(\star - \odot'')$, dans la formule (N).

La cotangente et le sinus de l'angle de position sont négatifs dans le second et dans le troisième quart de la longitude, (786, 787).

Si l'angle de position est obtus, on sait que la cotangente doit changer de signe. De plus, soit dans ce cas, soit dans celui où l'étoile sera entre l'équateur et l'écliptique, on ajoutera 180° à l'arc $(\odot'' - \star)$ trouvé par la formule (S). Enfin toutes les fois que cette formule donne $\text{tang.}(\odot'' - \star)$ négative, l'arc $(\odot'' - \star)$ est $> 90^\circ$, comme à l'ordinaire.

Si la déclinaison est australe, on change le signe du second membre de l'équation (T), comme nous l'avons dit (786) pour l'équation (N).

790. M. l'Abbé de Lambre, amateur aussi habile que zélé de l'Astronomie, a construit des tables générales qui viennent de paroître dans la *Conn. des Temps* pour 1788, pag. 226, lesquelles n'exigent que la connoissance du lieu du soleil, de l'ascension droite d'une étoile et de sa déclinaison, pour donner l'aberration en ascension droite et en déclinaison de cette même étoile. Il est en effet très avantageux et très commode, lorsqu'on cherche des corrections, de pouvoir les obtenir sans autres données que celles auxquelles ces corrections sont relatives. Dans les formules données par La Caille et généralement en usage, cet avantage est presque nul, à cause de la complication et de la multiplicité des règles et des opérations. Les formules précédentes (P), (Q), &c. sont, il est vrai, très expéditives pour calculer des tables particulières d'aberration; mais elles exigent que l'on connoisse la longitude, la latitude et l'angle de position, et ces éléments ne se trouvent pas toujours dans les catalogues d'étoiles. Je crois donc à propos de rechercher comment ces formules pourront se transformer en

celles qui ont servi à la construction des tables nouvelles de M. l'Abbé de *Lambre*.

Fig. 67 Nous avons vu (788) que H est le lieu du soleil au moment de la plus grande aberration en ascension droite de l'étoile S. Or le triangle LMH rectangle en M donne (VI. 10°), $\cot.LH = \cos.MLH \cot.ML$, ou

(A)... $\cot. \odot' = \cos.obl. \cot.asc.dr.$ de l'étoile ;

formule qui donne la longitude du soleil au temps de la plus grande aberration soustractive en ascension droite.

Le triangle LMH donne encore (VI. 6°), $\sin.H = \frac{\sin.ML}{\sin.LH}$, et le triangle SNH rectangle en N donne (VI. 9°), $\sin.H = \frac{\cos.NSH}{\cos.NH}$. Mais NSH est l'angle de position de l'étoile, NH l'élongation. Donc $\frac{\cos.p}{\cos.(\star - \odot')} = \frac{\sin.ML}{\sin.LH} = \frac{\sin.asc.dr.}{\sin.\odot'}$. En substituant cette valeur dans la formule (Q), on a

(B)... la plus grande aber. en $asc.dr. = - \frac{20'' \sin.asc.dr.}{\cos.decl. \sin.\odot'}$.

Cette valeur, prise avec le signe positif, comme nous l'avons fait (787), et mise dans la formule (R), donne $aberr.asc.dr. = - \frac{20''}{\cos.decl.} \times \frac{\sin.asc.dr. \cos.(\odot' \curvearrowright \odot)}{\sin.\odot'}$. Mais $\frac{\cos.(\odot' \curvearrowright \odot)}{\sin.\odot'} = \cot.\odot'$ $\cos.\odot + \sin.\odot$, (II. 4°). Que l'on prenne dans la formule (A) la valeur de $\cot.\odot'$, et on aura $aberr.asc.dr. = - \frac{1}{\cos.decl.} \times (20'' \cos.obl. \cos.asc.dr. \cos.\odot + 20'' \sin.asc.dr. \sin.\odot)$. Mais $20'' \cos.obl. = 18'', 346$: donc en procédant comme nous avons fait (785) pour parvenir à la formule de la nutation en ascension droite, et appellant A l'ascension droite de l'étoile, on aura

(C)... $aberr.asc.dr. = - \frac{19'', 17 \cos.(A \curvearrowright \odot) - 0'', 83 \cos.(A + \odot)}{\cos.decl.}$.

791. Cherchons maintenant les formules correspondantes pour l'aberration en déclinaison. Soit élevé du point S un arc STQ perpendiculaire sur MP ; ce qui donne $QS = 90^\circ = QM$, et $Q =$

SM, (390, 386) : Q est donc la déclinaison de l'étoile S, et $QL = 90^\circ + ML = 90^\circ + asc.dr.$ Le triangle TNS, rectangle en N, donne (VI. 11°), $tang.TN = \sin.SN \ tang.TSN$. Mais SN est la latitude de l'étoile, et $TSN = 90^\circ - NSH$ est le complément de l'angle de position. Donc $tang.TN = tang.(\odot'' - \star)$, suivant la formule (S); et par conséquent T est le lieu du soleil au temps de la plus grande aberration soustractive en déclinaison. Pour connoître la longitude du soleil pour ce temps, il faut donc trouver l'arc LT. Or le triangle TLQ donne (VII. 31°), $cot.TL = \frac{\sin.TLQ \ cot.Q + \cos.TLQ \ \cos.QL}{\sin.QL}$, et par conséquent $cot.\odot'' = \frac{\sin.obl. \ cot.décl. - \cos.obl. \ sin.asc.dr.}{\cos.asc.dr.}$, ou, pour plus de commodité dans le calcul,

(D)... $cot.\odot'' = \cos.obl. \ tang.asc.dr. \left(\frac{\tan.obl. \ cot.décl.}{\sin.asc.dr.} - 1 \right)$, formule qu'on peut calculer avec les seules tables trigonométriques en logarithmes, en suivant l'exemple donné (741).

Les regles des signes observées, si $cot.\odot''$ se trouve positive, le soleil sera dans le premier ou dans le troisieme quart de l'écliptique, et dans le second ou dans le quatrieme, si $cot.\odot''$ se trouve négative. La regle suivante détermine quel est celui des deux quarts que l'on doit choisir : *la longitude du soleil est dans le premier ou dans le second quart, si l'ascension droite de l'étoile est dans le premier ou dans le dernier; la longitude du soleil est dans le troisieme ou dans le dernier quart, si l'ascension droite de l'étoile est dans le second ou dans le troisieme.* La raison de cette regle se tire de la formule (E) ci-après, dont le but est de donner la valeur de la plus grande aberration soustractive, ensorte que cette valeur devant toujours être négative, le cosinus de l'ascension droite de l'étoile et le sinus de la longitude du soleil ont nécessairement le même signe dans la formule (E).

Cette seule regle et la seule formule (D) me semblent devoir être préférées aux regles et aux formules multipliées qu'on a employées jusqu'à présent.

Fig. 67 M. de la Lande a donné dans le septieme volume des *Éphémérides de Paris* une table très ample pour trouver le lieu du soleil au temps de la plus grande aberration en déclinaison. La table XVII de La Caille est trop abrégée, et souvent les parties proportionnelles y sont sujettes à des erreurs sensibles.

Le triangle TLQ donne $\sin.T = \frac{\sin.LQ \sin.Q}{\sin.TL} = \frac{\cos.asc.dr. \sin.décl.}{\sin.☉''}$.
 Le triangle TNS, rectangle en N, donne (VI. 9°), $\sin.T = \frac{\cos.TSN}{\cos.TN}$.
 Mais TSN est le complément de l'angle de position, et TN est l'élongation. Donc $\frac{\sin.p}{\cos.(☉'' \curvearrowright \star)} = \frac{\cos.asc.dr. \sin.décl.}{\sin.☉''}$. En substituant cette valeur dans la formule (T) (789), nous aurons

$$(E) \dots \text{la plus grande aber. en décl.} = - \frac{20'' \cos.asc.dr. \sin.décl.}{\sin.☉''}$$

Lorsque la déclinaison est australe, il seroit à propos de changer le signe du second membre de cette équation, par la raison que nous avons déjà donnée relativement à l'équation (N). Mais comme alors $\sin.décl.$ seroit négatif, il est plus court de laisser au second membre le signe négatif, et de faire $\sin.décl.$ positif dans tous les cas.

Prenons le second membre de cette équation (E) avec le signe positif, comme à l'ordinaire, pour le substituer dans la formule (U); développons $\cos.(☉'' \curvearrowright ☉)$, (II. 4°), et substituons à $\cot.☉''$ sa valeur prise de la formule (D): nous trouverons
 $aber.décl. = - 20'' \sin.obl. \cos.☉ \cos.décl. + \sin.décl.(20'' \cos.obl. \sin.A \cos.☉ - 20'' \cos.A \sin.☉) = - 7'', 96 \cos.☉ \cos.décl. + \sin.décl.(18'', 346 \sin.A \cos.☉ - 20'' \cos.A \sin.☉)$.
 Au moyen des formules (II. 17°, 14°, 15°), cette valeur se réduit comme il suit, en appelant D la déclinaison de l'étoile:

$$aber.décl. = \sin.D (19'', 17 \sin.A - ☉ - 0'', 83 \sin.A + ☉) - 3'', 98 (\cos.☉ + D + \cos.☉ \curvearrowright D).$$

Lorsque la déclinaison est australe, il faut faire positif le facteur $3'', 98$, par la raison citée déjà plus d'une fois, raison qui n'influe

pas sur le facteur binôme de $\sin.D$, pourvu qu'on fasse $\sin.D$ toujours positif.

Les tables de M. de Lambre sont construites sur cette formule et sur la formule (C). S'il s'agissoit, non de construire des tables, mais seulement de calculer l'aberration pour un temps donné, au lieu du dernier terme — $3''$, 98, &c. de la formule ci-dessus, il seroit plus commode d'employer — $7''$, 96 $\cos.\odot \cos.D$.

L'Astronome que nous venons de citer a aussi donné, dans le Tom. VIII des *Éphémérides de Paris* de M. de la Lande, des tables nouvelles et très exactes de l'*aberration des planetes en longitude*.

792. Nous avons déterminé les effets de la nutation et de l'aberration sur l'ascension droite et sur la déclinaison : la même marche nous conduiroit à la détermination des changements de l'angle de position, produits par les mêmes causes. Nous avons omis cette recherche, parce qu'il nous a paru qu'on n'avoit jamais besoin d'employer l'angle de position apparent, c'est-à-dire corrigé des petites variations périodiques dépendantes de la nutation et de l'aberration. Dans l'usage même des formules (786 à 789), il n'y a point de motif pour employer l'angle de position apparent plutôt que le vrai, quand la différence de ces deux angles ne seroit pas tout-à-fait insensible ; parce que ces formules sont fondées sur le calcul infinitésimal dans lequel on confond perpétuellement la valeur primitive de toute quantité variable avec la valeur de cette quantité après sa variation.

793. *Déterminer les dimensions de la Terre, en la supposant de figure elliptique.*

Le rapport entre les deux axes de la Terre se détermine par la mesure de deux degrés. Appellons d un degré de latitude, l la latitude du point de la Terre situé au milieu de ce degré, D un autre degré de latitude, L la latitude de son point-milieu, b le demi-petit-axe terrestre, et faisons égal à l'unité le demi-grand-axe, c'est-à-dire le demi-diamètre de l'équateur. Les Sections

coniques nous donneront cette analogie d'approximation, (*Astr.* la Lande, 2676),

$$d^{\frac{2}{3}} : D^{\frac{2}{3}} :: 1 - \sin.^2 L (1 - bb) : 1 - \sin.^2 l (1 - bb),$$

de laquelle on tire

$$1 - bb = \frac{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{2}{3}}}{\sin.^2 L - \left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{2}{3}} \sin.^2 l}.$$

Cette valeur est celle du quarré de l'excentricité ou de ee , (767, 6°).

Maintenant appellons c l'aplatissement de la Terre, ou la différence des deux demi-axes; on aura $b = 1 - c$, $bb = 1 - 2c + cc$, et $\frac{1}{2}(1 - bb) = c - \frac{1}{2}cc = c(1 - \frac{1}{2}c)$. Donc

$$(F) \dots c(1 - \frac{1}{2}c) = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{2}{3}}}{\sin.^2 L - \left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{2}{3}} \sin.^2 l}.$$

Le second membre de cette équation donne une valeur de c beaucoup plus approchée que celle qu'on peut obtenir en comparant entre elles des mesures de degrés; de sorte que dans cette recherche on peut négliger sans scrupule le facteur $(1 - \frac{1}{2}c)$.

794. Si d est un degré partagé en deux par l'équateur, de manière qu'on ait $l = 0$, alors $\sin. l = 0$, et par conséquent

$$(H) \dots c(1 - \frac{1}{2}c) = \frac{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{2}{3}}}{2 \sin.^2 L}.$$

Au lieu de cette équation, on a adopté la suivante qui est plus commode, mais un peu moins exacte, comme nous le verrons bientôt:

$$(K) \dots c = \frac{D - d}{3 d \sin.^2 L}.$$

D'où l'on a conclu que les accroissements des degrés, représentés par $D - d$, sont à très peu près proportionnels aux quarrés des sinus des latitudes.

795. Lorsqu'après avoir comparé deux à deux plusieurs degrés mesurés, on a déterminé la valeur de c au moyen des formules (F) ou (H), il en coûte peu pour former avec exactitude une table des degrés de latitude exprimés par exemple en toises. En faisant $c(1 - \frac{1}{2}c) = m$, l'équation (H) donne $D = d(1 - 2m \sin.^2 L)^{-\frac{1}{2}} = d(1 + 3m \sin.^2 L + \frac{15}{2} m^2 \sin.^4 L + \&c.)$. Les termes ultérieurs de cette série peuvent se négliger sans qu'il en résulte une erreur d'un demi-pied ; et l'on aura

$$(M) \dots D - d = 3md \sin.^2 L + \frac{15}{2} m^2 d \sin.^4 L.$$

Si dans le second membre on néglige le second terme, et qu'on écrive c au lieu de m , on retrouve l'équation (K).

La plus grande erreur de l'équation (K) est de $6\frac{1}{2}$ toises, et elle a lieu lorsque $L = 90^\circ$. En effet soit $d = 56700$ toises, et soit $c = \frac{1}{230}$, selon la théorie de Newton. La formule (K) donne alors $D - d = 3cd = 739\frac{1}{2}$ toises. Mais par l'équation (M), on a 1°. $m = c(1 - \frac{1}{2}c) = \frac{459}{105300}$; 2°. la quantité constante $3md = 737,96$; 3°. l'autre quantité constante $\frac{15}{2} m^2 d = 8,00$: donc le degré de latitude sous le pôle est plus long de 746 toises que le degré sous l'équateur. Tel est aussi la différence entre ces degrés, que donne M. Schulze (*Tables astronomiques* de Berlin, Tom. III, pag. 164).

M. Schulze ne donnant point de valeur pour le degré de latitude dans le cas où $L = 90^\circ$, j'en infère qu'il a pris pour le degré de 56700 toises non celui que l'équateur divise également, mais celui qui s'étend de 0° de latitude à 1° ; observation au moyen de laquelle j'ai trouvé ses résultats d'accord avec la formule (M), dans les épreuves que j'ai faites sur les latitudes où les variations des degrés sont les plus sensibles, par exemple à 45° de l'équateur. En effet soit $L = 45^\circ$; on a $\sin.^2 45^\circ = \frac{1}{2}$, et par conséquent $737,96 \sin.^2 45^\circ = 368,98$, et $8 \sin.^4 45^\circ = 2$. Donc $D = d + 371 = 57071$. Cette quantité correspond à $L = 44^\circ 30'$ dans la table de Berlin : ce qui s'explique par la

remarque ci-dessus. Je n'entre dans cette explication de la table de M. Schulze, que parcequ'il me semble qu'elle a échappé à M. Trembley (*Essai de Trigonom. sphér.* pag. 226).

Fig. 76 796. Soit actuellement NS l'axe de la Terre, C le centre, AD le diamètre de l'équateur, ANDS le méridien elliptique d'un lieu quelconque B, pour lequel la tangente BT est l'horizon sensible : VBR perpendiculaire à BT est la ligne verticale, BC la distance au centre, ou le rayon de la Terre, BW = CE le rayon du parallèle, CBL l'angle de la ligne verticale avec le rayon de la Terre, BLA la latitude, BCA l'angle au centre.

Quand on connoît le rapport entre les deux axes, la première chose qu'il importe de déterminer est l'angle CBL qui se nomme *l'angle de la verticale*. Or $CBL = BLE - BCE$, et dans les triangles rectangles CEB, LEB, qui ont un côté commun BE, on a (450, 425), $CE : LE :: \text{tang. BLE} : \text{tang. BCE}$. De plus CE est l'abscisse, LE la sous-normale, et dans la théorie des sections coniques on démontre que $CE : LE :: a^2 : b^2$. Donc

$$(N) \dots \text{tang. ang. au centre} = \frac{b^2}{a^2} \times \text{tang. latit.}$$

Or la différence entre la latitude et l'angle au centre est l'angle cherché.

Pour l'avoir plus directement, soit L la latitude, v l'angle de la verticale, et $a = 1$; la formule (N) donne $1 : b^2 :: \text{tang. } L : \text{tang. } (L - v)$, et par conséquent $1 : 1 - b^2 :: \text{tang. } L : \text{tang. } L - \text{tang. } (L - v) :: \text{tang. } L : \frac{\sin. v}{\cos. L \cos. (L - v)}$, (II. 24°). Mais $1 - b^2 = e^2$. Donc $\sin. v = e^2 \sin. L \cos. (L - v)$, ou *angle de la verticale* = $R'' \times \text{excentr.}^2 \sin. \text{lat.} \cos. (\text{lat.} - \text{ang. de la verticale})$. En calculant par cette formule les angles de la verticale de la table (807), je trouve que la formule dont on se sert communément, $v = cR'' \sin. 2L$, produit des erreurs qui vont quelquefois jusqu'à 4". Ma formule est donc préférable, quoique ces erreurs soient à-peu-près insensibles, et que l'incertitude où nous

sommes sur l'homogénéité du globe et sur la vraie quantité de son aplatissement, puisse en occasionner de plus grandes.

797. Soit décrit le demi-cercle AFD; soit $FCE = x$, comme dans la théorie des planetes (767) : celle des sections coniques donne, $\text{tang. } x = \frac{a}{b} \times \text{tang. ang. au centre}$, ou (796), (N),

$$(O) \dots \text{tang. } x = \frac{b}{a} \times \text{tang. lat.}$$

La connoissance de l'angle x aide à résoudre très promptement les équations suivantes, qui n'ont pas besoin de démonstration, et qui, avec les précédentes (M), (N), donnent toutes les quantités contenues dans la table de M. Schulze.

$$(P) \dots \text{rayon du parallele} = a \cos. x = CE.$$

$$(Q) \dots \text{degré de longitude} = \frac{a \cos. x}{R^e}, (262).$$

$$(R) \dots \text{rayon de la Terre} = \frac{a \cos. x}{\cos. \text{ang. au centre}} = BC.$$

$$(S) \dots BT = \frac{a \cos. x}{\sin. \text{lat.}}.$$

$$(T) \dots BR = \frac{a \cos. x}{\cos. \text{lat.}}.$$

$$(U) \dots BQ = BC \times \cos. \text{ang. de la verticale.}$$

$$(Y) \dots CQ = BC \times \sin. \text{ang. de la verticale.}$$

798. Le rayon BC de la Terre peut s'obtenir facilement d'une autre maniere que par la seule formule (R), avec plus de décimales exactes qu'on n'en auroit en la calculant par les tables ordinaires des logarithmes. En effet, si l'on fait $a = 1$, cette formule donne

$$BC = \frac{\cos. x}{\cos. (L - v)} = \sqrt{\frac{1 + \text{tang.}^2 (L - v)}{1 + \text{tang.}^2 x}}, (I. 19^e); \text{ ou, en substituant les valeurs de } \text{tang.} (L - v) \text{ et de } \text{tang. } x, \text{ données par les formules (N), (O), } BC = \sqrt{\frac{1 + b^4 \text{tang.}^2 L}{1 + b^2 \text{tang.}^2 L}}. \text{ Mais } b^2 = 1 - e^2, \text{ et } b^4 = 1 - 2e^2 + e^4. \text{ Substituons ces valeurs, multiplions la fraction par } \cos.^2 L, \text{ et nous trouverons } BC = \sqrt{\frac{1 - e^2 \sin.^2 L - e^2 \sin.^2 L (1 - e^2)}{1 - e^2 \sin.^2 L}} = \sqrt{\left(1 - \frac{e^2 b^2 \sin.^2 L}{1 - e^2 \sin.^2 L}\right)}. \text{ En}$$

Fff ij

réduisant ce binôme en série, négligeant les puissances de l'excentricité au-delà de la quatrième, et faisant les divisions, nous aurons

$$(Z) \dots BC = 1 - \frac{1}{2}e^2 b^2 \sin.^2 L - \frac{5}{8}e^4 \sin.^4 L.$$

Le calcul des deux derniers termes donnera les différences du rayon de l'équateur à celui d'une latitude quelconque ; si on veut cette différence en toises, il suffit de la multiplier par le rayon de l'équateur exprimé en toises. Pour avoir la différence des logarithmes, on multipliera les deux termes ci-dessus par $\frac{M}{BC + \frac{1}{8}BC}$, comme le prescrit le premier terme de la série (F), (175) : c'est cette marche que j'ai adoptée, comme la plus prompte et la plus sûre, pour calculer les logarithmes de la table (807).

En négligeant comme très petit le dernier terme du second membre de l'équation (Z), on voit que les diminutions des rayons de la Terre sont à-peu-près proportionnelles aux quarrés des sinus des latitudes, et par conséquent aux accroissements en longueur des degrés de latitude (794).

799. Pour donner quelques exemples de la brièveté et de l'exactitude des formules (N), (O), &c., soit $lat. = 46^\circ$, $\frac{b}{a} = \frac{229}{230}$, et soit $a = 3277123$ toises, comme dans les tables de Berlin.

On aura par la formule (O), $\text{tang. } x = \frac{229}{230} \text{ tang. } 46^\circ$; ce qui donne $x = 45^\circ 52' 30''$, 85.

Le calcul de la formule (N) se réduit à ce qui suit : $\text{tang. angle au centre} = \frac{229}{230} \text{ tang. } x$, ce qui donne $\text{ang. au centre} = 45^\circ 45' 1''$, 66.

Donc l'angle de la verticale ou ($lat. - \text{angle au centre}$) = $14' 58''$, 3. Les tables de Berlin le font en effet de $14' 58''$; d'où il suit que M. Schulze n'a point employé la formule ordinaire (796), $v = cR'' \sin.^2 L$, où $\sin.^2 v = c \sin.^2 L$, laquelle donne dans ce cas 2'' de moins. C'est par erreur que M. Trembley a cru cette formule exacte ; le logarithme qu'il trouve est celui de $\sin. 14' 56''$, 3, et non celui de $\sin. 14' 58''$, comme il l'avance. Mais

M. Schulze ne s'est pas servi non plus de la formule rigoureuse (N), puisque la différence entre les angles de sa table et les angles de la mienne (807) va jusqu'à 5" pour d'autres latitudes.

Si l'on calcule maintenant la formule (P), on a $a \cos.x = 3277123 \cos.45^{\circ} 52' 30''$, $85 = 2281609$: tel est en effet dans les tables de Berlin la valeur du rayon du parallèle de 46° . M. Trembley trouve 32 toises de moins, parce que c'est du degré de longitude qu'il conclut ce rayon, c'est-à-dire qu'il déduit la grande quantité de la petite. D'où résulte ce dont nous avons prévenu (279) : l'erreur du degré de longitude employé par M. Trembley n'est, comme nous allons le voir, que de $\frac{3}{5}$ de toise, et cette erreur si légère en produit une de 32 toises sur le rayon du parallèle.

En divisant par R° , (262), la quantité trouvée $a \cos.x$, nous aurons exactement par la formule (Q) *le degré de longitude* $= 39821, 6$. M. Trembley l'emploie de 39821 toises.

Il est inutile de nous étendre davantage pour faire voir combien la quantité constante $a \cos.x$ abrége le calcul des formules (797). Nous allons prouver qu'on peut se dispenser d'employer les valeurs des quantités BR, BQ, CQ, (données par les trois dernières de ces formules et dont M. Schulze fait usage dans la correction à faire aux parallaxes à cause de l'aplatissement de la Terre), et que pour calculer le lieu apparent des astres dans la supposition du sphéroïde aplati, on peut suppléer par une correction très simple à toutes celles qui ont été employées dans ce cas.

800. Conservons toujours les explications⁽⁷⁹⁶⁾ de la fig. 76 ; de plus Fig. 76. soit BM le prolongement du rayon CB de la Terre, C un astre dont la position est donnée par les tables astronomiques comme s'il étoit vu du centre C de la Terre. Enfin qu'on imagine une ligne droite CC ; cette ligne se dirigera vers le point du Ciel où se trouve l'astre selon le calcul fait d'après les tables.

L'angle BCC que forme la ligne supposée CC avec la ligne BC sur la direction de laquelle l'observateur en B aperçoit l'astre, se nomme la *parallaxe* ; c'est la différence de la position observée

à la position calculée. Pour comparer le calcul avec l'observation, il est nécessaire de corriger l'un ou l'autre, de la quantité de la parallaxe. Pour cet effet on réduit la distance vraie de l'astre au pôle, ou l'angle $NC\mathbb{C}$, à l'angle $NR\mathbb{C}$ que feroit avec l'axe NS de la Terre une ligne supposée $R\mathbb{C}$. Ayant ainsi la position de l'astre sur la ligne $R\mathbb{C}$, on a ensuite la position cherchée de cet astre sur la ligne $B\mathbb{C}$, en réduisant par le moyen de la parallaxe de hauteur (BR étant prise pour la parallaxe horizontale), l'angle $VR\mathbb{C}$ à l'angle $VB\mathbb{C}$, qui est la distance apparente de l'astre au zénith de l'observateur. C'est pour ces réductions et autres analogues que sont utiles les quantités données par les trois dernières formules (797). Mais on peut s'épargner tous ces circuits, puisque pour trouver par le calcul la position de l'astre sur la ligne $B\mathbb{C}$, il est facile de rendre l'ellipticité de la Terre absolument indifférente.

801. En effet imaginons un cercle décrit du rayon BC et qui coupe l'axe NS prolongé. Supposer que ce soit un cercle de la surface du Globe considérée comme sphérique, ce n'est point altérer la distance vraie $NC\mathbb{C}$ de l'astre au pôle. Mais alors M devient le zénith, CBM la ligne verticale, et BCA la latitude du point B de la Terre. Si on emploie cette latitude dans les calculs, $MC\mathbb{C}$ sera la distance vraie au zénith supposé M , et on la trouvera en se servant des éléments donnés par les tables. Si donc, au moyen de la parallaxe de hauteur, comme à l'ordinaire, en prenant le rayon BC pour la parallaxe horizontale, on réduit l'angle $MC\mathbb{C}$ à l'angle $MB\mathbb{C}$, cet angle fera connoître le point du Ciel auquel correspond la position apparente de l'astre sur la ligne $B\mathbb{C}$, avec autant d'exactitude et plus de facilité que si on suivoit la méthode en usage.

802. Toutes les équations des parallaxes pour le sphéroïde aplati deviennent donc inutiles, pourvu qu'on emploie dans les calculs *la latitude diminuée de l'angle de la verticale*; c'est ainsi que l'a employée le célèbre Géometre M. de la Grange, en composant ses formules pour trouver la distance apparente de deux astres sujets à la parallaxe, (*Éphém. de Berlin*, 1782). Peut-être a-t-on

pensé que c'étoit une propriété particulière de sa méthode aussi profonde que laborieuse ; de même que c'est une propriété particulière de la méthode de M. du Séjour, que d'employer la hauteur du pôle diminuée de la moitié seulement de l'angle de la verticale. En effet l'usage des équations des parallaxes dans le sphéroïde aplati paroît adopté communément en Astronomie, et je ne crois pas qu'aucun Astronome ait démontré qu'on peut se les épargner pour quelque parallaxe que ce soit, et dans toutes les méthodes. M. Trembley lui-même, qui a cherché (*Essai de Trigon. sphérique*, pag. 164 à 176) la démonstration des formules de M. de la Grange, et qui a appliqué la correction de la hauteur du pôle au calcul des parallaxes de longitude et de latitude, s'exprime de manière que je n'ai pu parvenir à entendre la raison qu'il donne (pag. 150) de cette correction : il considère seulement l'astre au zénith, et confond l'angle de la verticale avec l'angle très différent que forment au centre de l'astre la ligne verticale et la ligne menée du centre de la Terre.

Pour calculer les parallaxes, il suffit donc de connoître le rayon de la Terre elliptique, lequel doit servir à la parallaxe horizontale, et l'angle de la verticale, lequel doit se soustraire de la latitude. J'ai calculé pour cet effet avec tout le soin possible la table (807). Il est à propos de voir combien actuellement les calculs des parallaxes et des éclipses deviendront expéditifs.

803. *Trouver les parallaxes de longitude, de latitude, d'ascension droite et de déclinaison.*

Toutes ces parallaxes dépendent de la parallaxe de hauteur, qui elle-même dépend de la parallaxe horizontale. Or (*Astronomie de la Lande*, 1624, 1628)

$$\sin. par. horiz. = \frac{\text{rayon de la Terre}}{\text{dist. de l'astre au centre de la Terre}}.$$

$$(A) \dots \sin. par. hauteur = \sin. par. hor. \times \cos. hauteur appar.$$

Et, avec une approximation suffisante dans tous les cas,

$$(B) \dots par. hauteur = par. horiz. \times \cos. hauteur appar.$$

Fig. 69 Cela posé, soit Z le zénith de la Terre sphérique (801), P le pôle de l'écliptique, T une planète vue du centre de la Terre, et qui, vue de la surface du globe, paroît plus bas, en S : TS est la *parallaxe de hauteur*; PZ est la distance du zénith au pôle de l'écliptique; c'est ce qu'on appelle la *hauteur du nonagésime*, c'est-à-dire du point de l'écliptique qui marque la longitude du zénith de l'observateur : ZPT est la *distance vraie de l'astre au nonagésime*, ou la différence de longitude entre l'astre et le nonagésime; ZPS est la *distance apparente de l'astre au nonagésime*, et TPS la *parallaxe de longitude*, de laquelle nous chercherons d'abord la valeur.

Le côté PZ et l'angle adjacent Z sont communs aux triangles ZPT, ZPS, et par conséquent, en faisant (542), $A = Z$, $B = P$, $C = T$, on a $\sin. \delta ZT : \sin. \delta ZPT :: \sin. PT \sin. (PT + \delta PT) : \sin. PZ \sin. Z$. Or $PT + \delta PT = PS$, et $\sin. PS : \sin. Z :: \sin. ZS : \sin. ZPS$. Donc (723), $\delta ZT : \delta ZPT$, ou $TS : TPS :: \sin. PT \sin. ZS : \sin. PZ \sin. ZPS$. Mais $\sin. ZS = \cos. \text{haut. appar.}$ $= \frac{\text{paral. hauteur}}{\text{paral. horiz.}}$, suivant la formule (B); donc

$$(C) \dots \text{par. long.} = \text{par. horiz.} \times \frac{\sin. \text{haut. nonag.} \times \sin. \text{dist. appar. nonag.}}{\cos. \text{lat. vraie}}.$$

Pour avoir la longitude apparente de l'astre, on ajoute la parallaxe à la longitude vraie, si l'astre est à l'orient du nonagésime; on la soustrait, s'il est à l'occident.

Comme le second membre de la formule (C) renferme la parallaxe cherchée, puisque $\text{dist. appar. nonag.} = \text{dist. vr. nonag.} + \text{par. long.}$, il faudra faire le calcul par la méthode (281); nous en donnerons un exemple (809).

Si, au lieu des parallaxes, on emploie leurs sinus, la formule (C) sera rigoureuse.

On chassera, si l'on veut, du second membre la parallaxe de longitude, en suivant la méthode (282). Car puisque $\frac{\sin. TPS \sin. PT}{\sin. \text{par. hor.} \sin. PZ} = \sin. (TPZ + TPS) = \sin. TPZ \cos. TPS + \cos. TPZ \sin. TPS$;
on

[illegible]

on aura, en divisant par $\cos. TPS$ la première et la dernière de ces trois valeurs égales,

$$\text{tang. TPS} = \frac{\sin. \text{par. hor.} \sin. PZ \sin. TPZ}{\sin. PT - \sin. \text{par. hor.} \sin. PZ \cos. TPZ}.$$

Telle est la formule de M. Lexell, démontrée par M. Trembley, pag. 141 à 144 de son *Essai de Trigonométrie*.

804. La *parallaxe de latitude* est δPT , ou $PT - PS$. Pour la déduire de la parallaxe horizontale en n'employant, des parties du triangle PTZ, que PZ, PT et TPZ, on ne peut se servir avec succès d'aucune des analogies (550, 551, 552), qui sont celles qui correspondent au cas dont il s'agit. On a fait usage, pour le résoudre, de l'analogie infinitésimale (551), en substituant à $\cos. AC$ sa valeur (VII. 28°), et $\sin. (AC + \delta AC)$ au lieu de $\sin. AC$: mais cette analogie peut produire des erreurs de quelques secondes. Aussi M. Lexell a-t-il donné une formule plus exacte, mais composée de trois termes dans le second membre ; on en peut voir la démonstration pag. 144 à 148 de l'Ouvrage de M. Trembley, cité ci-dessus. Pour moi, comme on ne cherche pas ordinairement la parallaxe de latitude que l'on ne cherche aussi celle de longitude, je me contenterai de déduire la première de la seconde, d'autant plus que j'y parviens par une formule rigoureuse et commode.

Je substitue $\frac{\sin. \delta B}{2 \cos. \frac{1}{2} \delta B}$ à $\sin. \frac{1}{2} \delta B$ dans la 1^e analogie (556), et appliquant cette analogie au triangle PTZ, j'ai $\sin. \delta PT : \sin. \delta P :: \left(\sin. PT \cot. PZ - \frac{\cos. (P + \frac{1}{2} \delta P) \cos. PT}{\cos. \frac{1}{2} \delta P} \right) \sin. (PT + \delta PT) : \sin. P$, formule rigoureuse, et dont on pourroit se servir. Mais on peut employer à l'ordinaire, et sans qu'il en résulte jamais une erreur sensible, les arcs au lieu des sinus dans le premier rapport, et supposer $\cos. \frac{1}{2} \delta P = 1$: on a alors

$$(D) \dots \text{par. lat.} = \text{par. longitude} \cos. \text{lat. vraie} \cos. \text{lat. appar.} \times \frac{\cot. \text{haut. nonag.} - \cos. (\text{dist. vr. nonag.} + \frac{1}{2} \text{par. long.}) \text{tang. lat. vraie}}{\sin. \text{distance vraie au nonagesime}}.$$

La parallaxe de latitude s'ajoute toujours à la distance vraie de l'astre au pôle visible de l'écliptique, à moins que par le résultat de la formule cette parallaxe ne soit négative.

805. Si P est le pôle de l'équateur, on écrira dans les formules (C), (D), *par. asc. droite* au lieu de *par. long.*, *compl. hauteur du pôle* au lieu de *haut. nonag.*, *angle horaire* au lieu de *distance au nonag.*, *déclin.* au lieu de *lat.*; et on aura

$$(E) \dots \text{par. asc. dr.} = \text{par. horiz.} \times \frac{\cos. \text{haut. du pôle} \sin. \text{ang. horaire appar.}}{\cos. \text{décl. vraie}}$$

$$(F) \dots \text{par. décl.} = \text{par. asc. droite} \cos. \text{décl. vr.} \cos. \text{décl. appar.} \times \frac{\tan. \text{haut. du pôle} - \cos. (\text{ang. hor. vr.} + \frac{1}{2} \text{par. asc. dr.}) \tan. \text{décl. vr.}}{\sin. \text{angle horaire vrai}}$$

806. *Trouver la distance apparente des centres de deux astres.* 2^p. 471.

Il y a trois cas principaux et très importants dans lesquels on cherche la distance apparente des centres de deux astres; ou, ce qui revient au même, dans lesquels on conclut de la distance apparente la distance vraie, c'est-à-dire celle qui seroit observée du centre de la Terre: 1°. dans les éclipses et dans les occultations; 2°. dans les passages sur le disque du soleil; 3°. sur mer, pour en déduire la longitude du vaisseau.

Je ne connois rien de mieux que la méthode de M. de la Lande pour le second cas; et celle de M. le Chevalier de Borda pour le troisieme, quand on n'a point les grandes tables angloises, ou celles qui servent à la méthode de M. Dunthorn. Pour le premier cas, la méthode la plus expéditive est certainement celle du nonagésime (si on veut l'appeller ainsi), mais en s'y prenant comme il suit.

Fig. 77 Soit P le pôle du Monde, E celui de l'écliptique, Z le zénith de la Terre supposée sphérique (801), L le lieu vrai de celui des deux astres qui souffre la plus grande parallaxe. Dans le triangle PEZ (je dois à M. Trembley, *Essai de Trig. sphér.* pag. 151, l'idée de me servir de ce triangle) on connoît toujours trois parties;

savoir PE ou l'obliquité apparente de l'écliptique, PZ ou le complément de la hauteur du pôle diminuée de l'angle de la verticale (802), et ZPE qui est l'angle horaire du pôle de l'écliptique, ou la différence entre l'ascension droite du zénith et celle du pôle de l'écliptique. L'ascension droite de ce pôle est toujours de 270° ; celle du zénith, qu'on nomme *l'ascension droite du milieu du Ciel*, est égale à la somme de l'ascension droite du soleil et du temps vrai (au moment pour lequel on fait le calcul) réduit en degrés ou en parties de l'équateur, soustraction faite de 360° , lorsque cette somme est $> 360^\circ$. On cherchera EZ, ou la *hauteur du nonagésime*; et PEZ, ou la différence entre la longitude du pôle de l'équateur et celle du zénith : et comme la longitude de ce pôle est toujours de 90° , on aura ensuite la longitude du zénith ou la *longitude du nonagésime*, par l'équation $\text{long. nonag.} = 90^\circ \pm \text{PEZ}$. Dans l'hémisphère septentrional, toutes les fois que le complément de la hauteur du pôle est plus grand que l'obliquité de l'écliptique (ce qui embrasse presque tous les cas, les observations astronomiques en dedans des cercles polaires étant très rares), le signe $+$ a lieu quand l'ascension droite du milieu du Ciel est $> 90^\circ$ et $< 270^\circ$: pour toute autre valeur de cette ascension droite, le signe $-$ aura lieu, et on observera que si PEZ est $> 90^\circ$, il faut prendre le supplément à 360° de l'arc négatif ($90^\circ - \text{PEZ}$). Connoissant ainsi la longitude du nonagésime, on prendra la différence entre cette longitude et celle de l'astre L du côté où cette différence est moindre que de 180° , et on aura l'angle ZEL, ou (803.) *la distance vraie au nonagésime*.

Dans le triangle PEZ, connoissant deux côtés PE, PZ et l'angle intercepté ZPE, on peut trouver le côté EZ et l'angle PEZ par le moyen des formules (VIII. $7^\circ, 8^\circ$) : mais on a un logarithme de moins à chercher en se servant de celles de Neper (IX. $2^\circ, 5^\circ$), auxquelles je donne la préférence. De l'angle PEZ on déduit, comme nous l'avons dit, l'angle ZEL; et quand on a trouvé la valeur de cet angle et celle du côté EZ, on a tout ce qu'il faut pour

calculer les parallaxes de longitude et de latitude de l'astre L au moyen des formules (C), (D), dans lesquelles on emploiera pour parallaxe horizontale la différence des parallaxes horizontales des deux astres; ce qui est, non pas rigoureux, mais d'une exactitude plus que suffisante dans tous les cas.

Fig. 78 Ayant ainsi appliqué l'effet des deux parallaxes au seul astre L , et connoissant, dans cette hypothese, la longitude et la latitude apparentes de cet astre; si l'on suppose à présent que l'autre astre soit S , et que le triangle zEV soit le même que le triangle ZEL de la fig. 77, on connoitra, dans le triangle ELS , le côté LE distance apparente de l'astre L au pôle de l'écliptique, le côté ES distance vraie de l'astre S à ce pôle, et l'angle LES qui est la différence entre la longitude vraie de l'astre S et la longitude apparente de l'astre L . Avec ces données il reste à chercher le côté LS qui est la distance apparente des centres des deux astres, et dont la détermination est le but du problème. La dernière équation (VIII. 8°) ne peut donner ce côté avec précision à cause de sa petitesse, et il faut avoir recours à la solution (478).

807. Pour faciliter les opérations précédentes, je les réduirai (808) en une espece de tableau. Je donne d'abord la table qui suit, que j'ai annoncée (796, 798), et de laquelle on a besoin pour ces mêmes opérations.

Voici quel est l'usage de cette table. Pour avoir la parallaxe horizontale d'un astre pour un lieu de la Terre, on prendra dans la table le logarithme du rayon terrestre de ce lieu, et on l'ajoutera au logarithme de la parallaxe horizontale de l'astre sous l'équateur. Si au lieu de cette parallaxe on avoit la parallaxe pour un lieu hors de l'équateur, comme il arrive lorsqu'on fait usage des *Tables de la Lune* de M. de la Lande, qui donnent la parallaxe pour Paris; alors on auroit la parallaxe horizontale pour l'équateur, en retranchant ^{du log.} de la parallaxe donnée le logarithme du rayon terrestre du lieu pour lequel elle est donnée.

TABLE des angles de la verticale, et des logarithmes des rayons
de la Terre.

Hauteur du pôle.	Angle de la vertic.	Logarithme du rayon de la Terre.	Différ. des logarit.	Hauteur du pôle.	Angle de la vertic.	Logarithme du rayon de la Terre.	Différ. des logar.
0°	0' 0"	0,0000000		39°	14' 38"	9,9992564	
1	0 31	9,9999994	6	40	14 44	9,9992241	323
2	1 2	9,9999977	17	41	14 49	9,9991915	326
3	1 34	9,9999949	28	42	14 53	9,9991588	327
4	2 5	9,9999909	40	43	14 56	9,9991260	328
5	2 35	9,9999858	51	44	14 58	9,9990930	330
6	3 6	9,9999796	62	45	14 59	9,9990600	330
7	3 37	9,9999723	73	46	14 58	9,9990270	330
8	4 7	9,9999638	85	47	14 57	9,9989939	331
9	4 37	9,9999543	95	48	14 54	9,9989610	329
10	5 6	9,9999437	106	49	14 51	9,9989282	328
11	5 35	9,9999320	117	50	14 46	9,9988955	327
12	6 4	9,9999192	128	51	14 40	9,9988630	325
13	6 32	9,9999054	138	52	14 33	9,9988307	323
14	7 0	9,9998906	148	53	14 25	9,9987987	320
15	7 28	9,9998748	158	54	14 16	9,9987670	317
16	7 55	9,9998580	168	55	14 6	9,9987357	313
17	8 21	9,9998402	178	56	13 55	9,9987047	310
18	8 46	9,9998214	188	57	13 43	9,9986741	306
19	9 11	9,9998017	197	58	13 29	9,9986440	301
20	9 35	9,9997812	205	59	13 15	9,9986144	296
21	9 59	9,9997597	215	60	13 0	9,9985854	290
22	10 22	9,9997374	223	61	12 44	9,9985569	285
23	10 44	9,9997143	231	62	12 27	9,9985290	279
24	11 6	9,9996903	240	63	12 9	9,9985017	273
25	11 27	9,9996656	247	64	11 50	9,9984751	266
26	11 46	9,9996402	254	65	11 30	9,9984493	258
27	12 5	9,9996140	262	66	11 10	9,9984241	252
28	12 23	9,9995871	269	67	10 48	9,9983998	243
29	12 40	9,9995596	275	68	10 26	9,9983762	236
30	12 57	9,9995315	281	69	10 3	9,9983534	228
31	13 12	9,9995028	287	70	9 39	9,9983316	218
32	13 26	9,9994736	292	71	9 15	9,9983106	210
33	13 39	9,9994438	298	72	8 50	9,9982905	201
34	13 52	9,9994136	302	73	8 24	9,9982713	192
35	14 3	9,9993829	307	74	7 58	9,9982532	181
36	14 14	9,9993518	311	75	7 31	9,9982360	172
37	14 23	9,9993203	315	80	5 9	9,9981654	
38	14 31	9,9992885	318	85	2 37	9,9981222	
39	14 38	9,9992564	321	90	0 0	9,9981076	

808. *TABLEAU DU CALCUL pour trouver la distance apparente des centres de deux astres, S, L, en supposant connues les parallaxes horizontales équatoriales, et les longitudes et latitudes vraies, c'est-à-dire telles qu'on les auroit si on voyoit les deux astres du centre de la Terre, et en tenant compte de l'aberration et de la nutation. Je suppose de plus que la parallaxe horizontale de l'astre L soit plus grande que celle de l'astre S. On comprendra facilement qu'il est inutile d'indiquer ce que sont les arcs A, B, &c., qui ne sont ici que des arcs subsidiaires.*

A = ascens. dr. $\odot$ + temps vrai en parties de l'équateur.

Si A est $> 360^\circ$, on prendra A $- 360^\circ$ au lieu de A.

B = A $\searrow 270^\circ$; et si la hauteur du pôle est australe, B = A $\searrow 90^\circ$.

Si B est $> 180^\circ$, on prendra $360^\circ - B$, au lieu de B.

C = hauteur du pôle — angle de la verticale.

D = $90^\circ - C$ — obliquité apparente de l'écliptique.

E = $90^\circ - C$ + obliquité apparente de l'écliptique.

$$\text{tang. } F = \cot. \frac{1}{2} B \times \frac{\sin. \frac{1}{2} D}{\sin. \frac{1}{2} E}.$$

$$\text{tang. } G = \cot. \frac{1}{2} B \times \frac{\cos. \frac{1}{2} D}{\cos. \frac{1}{2} E}.$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} H = \text{tang. } \frac{1}{2} D \times \frac{\sin. G}{\sin. F}.$$

M = $90^\circ \pm (F + G)$ = longitude du nonagésime.

Le signe + a lieu quand A est $> 90^\circ$ et $< 270^\circ$: le signe — a lieu dans les autres cas; mais alors si $(F + G)$ est $> 90^\circ$, on ajoute 360° au second membre.

Si la hauteur du pôle est australe, M = $270^\circ \mp (F + G)$.

Le signe — a lieu quand A est $> 90^\circ$ et $< 270^\circ$: le signe + a lieu dans les autres cas; mais alors si M est $> 360^\circ$, on prend M $- 360^\circ$ au lieu de M.

N = M $\searrow$ longitude vraie de l'astre L.

Si N est $> 180^\circ$, on prendra $360^\circ - N$ au lieu de N.

O = rayon de la Terre $\times$ (par. hor. équat. L — par. hor. équat. S).

$$P = O \times \frac{\sin.H \sin.(N \pm P)}{\cos.lat.vraie L}.$$

Longitude apparente de l'astre $L =$ longitude vraie $\pm P$.

Le signe $+$ a lieu si le point de l'écliptique qui marque la longitude vraie de l'astre est à l'orient du nonagésime; le signe $-$ s'il est à l'occident.

$$Q = \frac{P \times \cos.lat.vr.L}{\sin.N} (\cot.H - \cos.N \pm \frac{1}{2} P \tan.lat.vr.L) \cos.lat.ap.L.$$

Latitude apparente de l'astre $L =$ latitude vraie $\pm Q$.

Le signe $+$ a lieu si la latitude vraie est australe; le signe $-$ si elle est boréale: c'est le contraire lorsque Q est négatif.

Si la hauteur du pôle est australe, on changera dans cette règle $+$ en $-$ et $-$ en $+$.

$T =$ long.app. de l'astre $L \curvearrowright$ long.vraie de l'astre S .

$U =$ lat.app. de l'astre $L \curvearrowright$ lat.vraie de l'astre S .

$$\tan.Z = \frac{\sin.\frac{1}{2}T}{\sin.\frac{1}{2}U} \sqrt{\cos.lat.appar.L \cos.lat.vr.S}.$$

$$\sin.\frac{1}{2}dist.appar. des centres = \frac{\sin.\frac{1}{2}U}{\cos.Z}.$$

Si les valeurs de T et de U sont moindres l'une et l'autre que de $45'$, comme il arrive dans les éclipses et les occultations; au lieu des deux dernières équations, on peut sans scrupule faire usage des suivantes:

$Y =$ lat.appar. de l'astre $L +$ lat.vraie de l'astre S .

$$\tan.Z = \frac{T \times \cos.\frac{1}{2}Y}{U}.$$

$$DISTANCE APPARENTE DES CENTRES = \frac{U}{\cos.Z}.$$

809. La promptitude de la méthode précédente a pour causes principales le petit nombre et la simplicité des règles, l'avantage de ne point avoir besoin de construire une figure, et sur-tout celui de pouvoir faire les calculs des dix premières équations en négligeant les secondes, ou au plus en tenant compte seulement des dizaines de secondes, sans que l'exactitude du dernier résultat en soit nullement altérée: d'où il suit encore qu'on peut de même négliger les secondes, en prenant les lignes trigonométriques contenues dans les équations qui donnent la valeur de P et celle de Q .

Appliquons cette méthode à la recherche de la distance appa-

rente d'Antarès au centre de la lune , au moment de l'immersion observée à Paris par M. de la Lande le 6 Avril 1749 : je prendrai les éléments dans le calcul de cette observation , fait avec le plus grand soin par M. Carouge , et rapporté dans l'*Astronomie* de M. de la Lande , Tom.IV, pag. 644.

$$A = 15^{\circ} 58' + 195^{\circ} 20' = 211^{\circ} 18'$$

$$B = 211^{\circ} 18' \searrow 270^{\circ} = 58^{\circ} 42'.$$

L'angle de la verticale donné par la table (807) pour la latitude $48^{\circ} 50'$ est $14^{\circ} 51' \frac{1}{2}$, et par conséquent

$$C = 48^{\circ} 50' 10'' - 14^{\circ} 50'' = 48^{\circ} 35' 20''.$$

L'obliquité apparente de l'écliptique pour le commencement d'Avril 1749, selon la Table de M. de la Lande (Tom.IV, p. 763), est $23^{\circ} 28' 22''$. Donc

$$D = 90^{\circ} - 48^{\circ} 35' 20'' - 23^{\circ} 28' 20'' = 17^{\circ} 56' 20''$$

$$E = 90^{\circ} - 48^{\circ} 35' 20'' + 23^{\circ} 28' 20'' = 64^{\circ} 53'.$$

$$\begin{aligned} \log. \cot. 29^{\circ} 21' &= 0,250015 \dots \dots \dots 0,250015 \\ \log. \sin. 8^{\circ} 58' 10'' &= 9,192868 \dots \dots \log. \cos. \quad 9,994656 \\ \text{comp. log. sin. } 32^{\circ} 26' 30'' &= 0,270478 \dots \text{comp. log. cos. } 0,073689 \end{aligned}$$

$$\log. \text{tang. } F = 9,713361 \quad \log. \text{tang. } G = 0,318360$$

$$\text{Donc } F = 27^{\circ} 19' 55'', \quad G = 64^{\circ} 20' 20''.$$

$$\begin{aligned} \log. \text{tang. } \frac{1}{2} D &= \begin{cases} \log. \sin. 8^{\circ} 58' 10'' = 9,192868 \\ \text{complém. log. cos.} = 0,005344 \\ \log. \sin. 64^{\circ} 20' 20'' = 9,954904 \\ \text{compl. log. sin. } 27^{\circ} 19' 55'' = 0,338050 \end{cases} \\ \log. \text{tang. } \frac{1}{2} H &= 9,491166 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } H = 34^{\circ} 26'.$$

$$M = 90^{\circ} + 27^{\circ} 19' 55'' + 64^{\circ} 20' 20'' = 181^{\circ} 40' 15''.$$

$$N = M \searrow \text{long. vr. } \mathbb{C} = M \searrow 245^{\circ} 31' 42'' = 63^{\circ} 51' 30''.$$

Dans

Dans ce cas-ci, *parall.horiz.* $S = 0$, puisqu'Antarès n'a point de parallaxe.

M. Carouge donne la parallaxe horizontale polaire de la lune; en la réduisant à la parallaxe pour Paris, nous aurons (807)

$$\begin{aligned} \log.O = \left\{ \begin{array}{l} \log.(\text{parall.horiz.au pôle} = 57' 9'', 8) = 3,535269 \\ \text{compl.log.du rayon au pôle.} \quad . \quad . \quad . = 0,001892 \\ \log.\text{du rayon pour Paris} \quad . \quad . \quad . = 9,998934 \end{array} \right. \\ \log.\sin.34^\circ 26' = 9,752392 \\ \text{compl.log.cos.}(\text{lat.vr. } \mathbb{C} = 3^\circ 48') = 0,000956 \\ \text{Somme ou log.constant} \quad \underline{3,289443} \\ \log.\sin.(N = 63^\circ 51' 30'') = 9,953135 \\ \log.(29' 8'' = P \text{ à-peu-près}) = \underline{3,242578} \end{aligned}$$

et, pour avoir la valeur exacte de P,

$$\begin{aligned} \log.\sin.(N + P = 64^\circ 20' 40'') &= 9,954924 \\ \log.\text{constant ci-dessus} &= \underline{3,289443} \\ \log.P &= \underline{3,244367} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Je prends ci-dessus } \left\{ \begin{array}{l} \log.\cos.3^\circ 48' = 9,999044 \\ \text{compl.log.sin.} N = 0,046865 \end{array} \right. \\ \text{Second log.constant} = \underline{3,290276} \end{aligned}$$

$$\log.\cot.(H = 34^\circ 26') = 0,163949$$

$$\log.(47' 26'' = 1^\circ \text{ partie de la valeur de } Q \text{ à-peu-près}) = \underline{3,454225}$$

et, pour avoir exactement la 1^e partie de la valeur de Q,

$$\begin{aligned} \log.\cos.(\text{lat.appar. } \mathbb{C} = 3^\circ 48' + 47' \frac{1}{2}) &= 9,998604 \\ \log.1^\circ \text{ partie de la valeur de } Q &= \underline{3,452829} \\ \text{Second log.constant ci-dessus} &= \underline{3,29028} \\ \log.\cos.(N + \frac{1}{2}P = 64^\circ 6') &= 9,64028 \\ \log.\text{tang.}(\text{lat.vr. } \mathbb{C} = 3^\circ 48') &= 8,82230 \\ \log.\cos.\text{lat.appar. pris ci-dessus} &= 9,99860 \\ \log.2^\circ \text{ partie de la valeur de } Q &= \underline{1,75146} \end{aligned}$$

Cette seconde partie devient positive, parceque la latitude de la lune étant australe, *tang.lat.* est négative (744).

Hhh

Les calculs précédents donnent pour valeurs exactes,

$$P = 29' 15'', 4, \text{ et } Q = 47' 16'', 8 + 56'', 4 = 48' 13'', 2.$$

On a donc 1° , parce que la lune étoit à l'orient du nonagésime,

$$\text{long. appar. } \odot = 245^\circ 31' 42'' + 29' 15'', 4 = 246^\circ 0' 57'', 4.$$

$$2^\circ. \text{ lat. appar. } \odot = 3^\circ 47' 58'', 1 + 48' 13'', 2 = 4^\circ 36' 11'', 3.$$

En prenant le milieu entre les positions d'Antarès déterminées par Bradley, Mayer et La Caille, et réduites au 6 Avril 1749, et en tenant compte de l'aberration et de la nutation, je trouve *long. vr.* Antarès = $246^\circ 16' 19'', 2$, et *lat. vr.* Antarès = $4^\circ 32' 16'', 5$ *austr.* Donc

$$T = 246^\circ 0' 57'', 4 \curvearrowright 246^\circ 16' 19'', 2 = 15' 21'', 8$$

$$U = 4^\circ 36' 11'', 3 \curvearrowright 4^\circ 32' 16'', 5 = 3' 54'', 8$$

$$Y = 4^\circ 36' 11'', 3 + 4^\circ 32' 16'', 5 = 9^\circ 8' 28''.$$

$$\log. T = 2, 964637$$

$$\log. \cos. (\tfrac{1}{2} Y = 4^\circ 34') = 9, 998619$$

$$\text{compl. log. } U = 7, 629302$$

$$\log. \text{ tang. } Z = 0, 592558$$

$$\text{compl. log. } \cos. Z = 0, 606293$$

$$\text{J'ajoute log. } U = 2, 370698$$

$$\text{Somme} \quad 2, 976991$$

Ce logarithme donne, pour la *distance apparente des centres*, $15' 48'', 4$.

810. Le calcul que nous venons de faire exige la recherche de trente logarithmes. Je ne connois point de méthode où il ne soit nécessaire d'en chercher un plus grand nombre, et avec une perte de temps bien plus considérable, attendu qu'il faut tenir compte des dixièmes de seconde dans tout le calcul, si on veut obtenir dans le dernier résultat la précision que j'obtiens par la méthode que je viens d'exposer. On observera de plus, si on compare cette

méthode à d'autres, qu'elle ne demande pas que l'on connoisse l'ascension droite et la déclinaison des deux astres, ou de l'un des deux, ni leur hauteur, ni l'angle parallactique, ni celui de position, et qu'elle permet de prendre l'ascension droite du soleil dans des Éphémérides, au lieu de la calculer rigoureusement.

Pour ne laisser aucun doute sur l'exactitude de mon calcul, je dois prévenir que M. Carouge trouve, pour la valeur de P ou de la parallaxe de longitude, $1''$, 7 de plus que moi; mais j'ai vérifié que cette différence provient de ce que M. Carouge, pour calculer cette valeur, a employé, au lieu du cosinus de la latitude vraie, le cosinus de la latitude apparente, selon la formule de La Caille (*Éléments d'Astr.* 658). Mes analogies différentielles finies garantissent de toute erreur sur ce point, qui en général a été traité jusqu'ici pour ainsi dire arbitrairement, dans l'usage qu'on a fait des analogies infinitésimales. De même si la valeur de Q ou de la parallaxe de latitude, telle que je l'ai donnée, excède de $0''$, 6 celle qu'a trouvée M. Carouge, c'est qu'il a employé de la manière que j'ai indiquée (804) l'analogie infinitésimale (551). Ce Géometre a depuis examiné attentivement la question des parallaxes, et a composé des formules dont il a bien voulu me communiquer la démonstration synthétique : celle de la parallaxe de longitude est absolument conforme à la mienne (C) : celle de la parallaxe de latitude est composée de trois termes dans le second membre ; j'ai éprouvé dans plus d'une occasion qu'elle est très exacte.

811. Pour comparer avec l'observation la distance apparente des centres, donnée par le calcul (808), il faut augmenter le diamètre de la lune en raison de la hauteur, et de plus, s'il s'agit d'une éclipse de soleil, tenir compte de l'accourcissement produit par la réfraction sur les phases mesurées avec le micrometre. Pour la première de ces corrections, il suffiroit de prendre la hauteur de la lune au moyen d'un globe : pour la seconde, il est nécessaire de connoître l'angle formé par le cercle vertical avec la ligne des centres. Voyons comment, au moyen des éléments du calcul (808),

Hhh ij

nous pourrions trouver une valeur suffisamment approchée soit pour cet angle, soit pour la hauteur de la lune.

Fig. 78 Soit E le pôle de l'écliptique, z le zénith, V le lieu vrai de la lune, L son lieu apparent, S le lieu vrai de l'autre astre; SL est la distance apparente des centres, donnée par le calcul (808). Qu'on prolonge EL de manière qu'on ait $Em = ES$; que l'on mène mS, et qu'on prolonge zL jusqu'en n : on aura $Lm = U$, (808), et (498, 1°.), $mS = mES \times \sin.ES = T \times \cos.\frac{1}{2}Y$, à-peu-près. D'où l'on aura $mLS = Z$, (808), en considérant, ainsi qu'on le peut sans scrupule, le petit triangle LmS comme rectiligne et rectangle en m.

Cela posé, on observera que le triangle zVE, en se changeant en zLE, conserve comme constants le côté zE et l'angle z. Donc, en faisant (555, 541), $A = z$, $B = E$, $C = V$, on a 1°. $\delta EV : \delta E :: \sin.EV : \text{tang}.zLE$, en supposant, par approximation, que l'on ait, $\sin.(EV + \frac{1}{2}\delta V) : \text{tang}.(V - \frac{1}{2}\delta V) :: \sin.EV : \text{tang}.(V - \delta V)$; 2°. $\delta zV : \delta E :: \sin.EV : \sin.zLE$. Mais $\delta zV = \text{parall.hauteur} = \text{parall.horiz. cos.haut.appar.}$, (803), (B). En mettant cette valeur dans la dernière analogie, et $\delta EV \times \text{tang}.zLE$ au lieu de $\delta E \times \sin.EV$, d'après la première, ces deux analogies donneront

$$\begin{aligned} \text{tang.ang.parallact. appar.} &= \frac{\text{par.lông. cos.lat.vr.}}{\text{par.lat.}} = \frac{P}{Q} \times \cos.\text{lat.vr.} \\ \text{cos.hauteur appar.} &= \frac{\text{par.lat.}}{\text{par.horiz. cos.ang.parallac.appar.}} = \frac{Q}{O \times \cos.\text{ang.par.app.}} \end{aligned}$$

Dans les éclipses de soleil on peut toujours mettre 1 au lieu de $\cos.\text{lat.}\mathbb{C}$. L'angle parallactique apparent ($zLE = mLn$) soustrait de l'angle ($Z = mLS$), ou ajouté à cet angle, selon les cas, donne l'angle cherché SLn , que fait la ligne des centres avec le cercle vertical.

812. Comme l'infatigable Calculateur M. Levêque a donné des *Tables générales* de la longitude et de la hauteur du nonagésime pour tous les pays de la Terre (à Paris, chez Laporte), je crois

qu'il n'est pas inutile de faire voir combien il est facile d'introduire dans ces tables la correction relative à l'aplatissement de la Terre.

Soit P le pôle du Monde, E celui de l'écliptique, Z le zénith Fig. 79 pour la Terre aplatie, M le zénith de la Terre sphérique. Les tables de M. Levêque sont construites sur le triangle PZE ; elles ont pour arguments la hauteur du pôle ou le complément de PZ, et l'ascension droite du milieu du Ciel ou du zénith Z. J'ai démontré dans les articles précédents combien il est plus avantageux de se servir du triangle PME. Or on peut observer que l'augmentation ZM égale à l'angle de la verticale ne change point l'ascension droite du zénith ou du milieu du Ciel ; ainsi cet argument reste constant. Le second argument, c'est-à-dire PZ, varie seul ; et par conséquent si l'on fait usage de ces tables en diminuant de l'angle de la verticale l'argument de la hauteur du pôle, elles donneront pour la hauteur ME du nonagésime, et pour la longitude du nonagésime ou du zénith M, des valeurs telles qu'on obtiendra par mes formules (C), (D) les parallaxes de longitude et de latitude pour le sphéroïde aplati, avec toute l'exactitude qu'on peut désirer.

813. *Trouver la longitude d'un lieu de la Terre.*

Les éclipses de soleil et les occultations d'étoiles par la lune sont les phénomènes les plus sûrs pour déterminer avec précision les longitudes terrestres. On calculera la distance apparente des centres (808) pour le moment de l'observation, en supposant la longitude telle qu'on l'estime à-peu-près, et prenant dans les tables, d'après cette supposition, les lieux du soleil et de la lune. Et si la distance calculée ne se trouve pas égale à la distance observée, je vais démontrer que de cette erreur du calcul on peut déduire, avec autant d'exactitude que de facilité, la longitude cherchée.

Soit E le pôle de l'écliptique, L la lune, S le soleil ou l'étoile, Fig. 78 LS la distance apparente des centres donnée par le calcul (808). Je n'attribue l'erreur sur la distance des centres qu'au lieu de la lune employé dans ce calcul ; car l'étoile est immobile, et le soleil

Fig. 78 peut se regarder comme tel si on emploie, lorsque je le prescrirai, le *mouvement relatif*, c'est-à-dire la différence des mouvements du soleil et de la lune. Considérant donc ES comme constant, il s'agit de déterminer dans le triangle LES les erreurs de l'angle E et du côté EL correspondantes à l'erreur du côté LS. Je procède comme il a été dit (284); je suppose d'abord que j'ai de plus comme constant le côté EL, et faisant (631), $A = E$, $B = S$, $C = L$, j'ai $\delta SL : \delta E :: \sin.EL \sin.L : 1$. Faisant ensuite l'angle E constant avec le côté ES, j'ai (550), $\delta SL : \delta EL :: \cos.L : 1$. En prenant la somme des deux valeurs partielles que donnent pour δSL ces deux analogies, je trouve $\delta SL = \delta E \sin.L \sin.EL + \delta EL \cos.L$.

Je nomme D la distance LS des centres donnée par le calcul (808), L la longitude apparente de la lune, l sa latitude apparente, de sorte que dans la dernière formule ci-dessus je substituerai δL à δE , et δl à δEL ; l'angle L ou ELS est le supplément de l'angle Z , que l'avant-dernière formule (808) donne toujours aigu, et dont on doit employer le supplément dans l'équation (G) ci-après, toutes les fois que la distance de la lune au pôle de l'écliptique sera moindre que la distance de l'étoile ou du soleil au même pôle. On aura donc

$$(G) \dots \delta D = \delta L \sin.Z \cos.l + \delta l \cos.Z.$$

Si au lieu de δD , on met dans cette équation l'erreur donnée par le calcul sur la distance des centres, δL et δl seront les erreurs sur la longitude et la latitude apparentes de la lune employées dans le calcul, erreurs qui ont donné lieu à l'erreur δD . Il s'agit de déterminer la valeur de δL et celle de δl .

814. 1°. Si on suppose exact le lieu de la lune donné par les tables, les erreurs δL et δl dépendent alors uniquement de l'hypothèse de la longitude terrestre. Ces erreurs, dans ce cas, sont entre elles en raison des mouvements horaires vrais de la lune en longitude et en latitude. Je dis des mouvements horaires *vrais*,

parceque, s'ils different des mouvements horaires apparens, cette difference n'influe que très peu dans la recherche dont il s'agit, à moins que δD ne soit de plusieurs minutes, auquel cas nous verrons (816) ce qu'il convient de faire. Cela posé, si l'on appelle M le mouvement horaire vrai relatif en longitude, m ce mouvement en latitude, r le rapport $\frac{m}{M}$ entre ces mouvements, on aura $M : m :: \delta L : \delta l = \frac{m \delta L}{M} = r \delta L$. En substituant cette valeur de δl dans l'équation (G), on en tirera

$$(H) \dots \delta L = \frac{\delta D}{\sin.Z \cos.l + r \cos.Z}.$$

Après avoir déterminé par cette équation l'erreur sur la différence des longitudes, on aura par le mouvement horaire relatif la correction en temps qu'il faut faire à l'hypothese de la longitude terrestre, et cette longitude sera ainsi connue et déterminée.

815. Pour savoir en quel sens on doit corriger la longitude de la lune, ou l'hypothese de la longitude terrestre, il suffit de réfléchir que si le calcul a donné la distance des centres trop grande, la lune doit être rapprochée de l'étoile ou du soleil, et qu'au contraire elle en doit être éloignée lorsque le calcul a donné la distance des centres trop petite.

816. Si l'erreur δD est de plusieurs minutes, l'équation (H) ne donnera pas exactement la valeur de δL ; mais par cette valeur on aura toujours une correction approchée de la longitude. Avec cette longitude ainsi corrigée, on recommencera le calcul (808); on aura une autre erreur δD , mais très petite, et l'on tirera de l'équation (H) une seconde correction très exacte de la longitude.

817. 2°. *Quand on veut tenir compte de l'erreur qui peut se trouver dans le lieu de la lune donnée par les tables, et déterminer cette erreur, une observation ne suffit pas; il est nécessaire d'en avoir trois, l'une desquelles au moins ait été faite d'un lieu dont on connoisse la longitude. Dans une éclipse de soleil il est facile d'en réunir plusieurs, ce qui donne un résultat moyen d'autant*

plus sûr qu'on a rassemblé plus d'observations. Je suppose donc qu'on ait trois observations, et que deux de ces observations aient été faites sous le méridien qu'on cherche à déterminer. Pour chacune de ces observations, on aura une équation de la forme (G). J'appelle E l'erreur des tables sur la longitude de la lune, e l'erreur en latitude, et j'ai, pour les trois observations,

$$(N) \dots \delta D = E \sin.Z \cos.l + e \cos.Z.$$

$$(O) \dots \delta D' = \delta L \sin.Z' \cos.l + \delta l \cos.Z'.$$

$$(P) \dots \delta D'' = \delta L \sin.Z'' \cos.l + \delta l \cos.Z''.$$

L'équation (N) est visiblement celle qui répond à l'observation faite sous un méridien connu; puisque dans cette équation l'erreur δD dépend uniquement des erreurs des tables. Dans les deux autres équations, chacune des expressions δL et δl contient deux erreurs qu'il faut démêler et distinguer l'une de l'autre, l'erreur des tables et celle de l'hypothèse pour la longitude terrestre. Ces erreurs sont les mêmes dans les deux équations, parceque l'erreur des tables ne change pas dans le court intervalle entre les deux observations, et parceque les calculs pour l'une et pour l'autre sont faits d'après la même hypothèse pour la longitude terrestre. La quantité $\cos.l$ suppose que la latitude apparente de la lune est la même dans les trois observations; ce qui n'est pas exact: mais le changement de cette latitude ne peut faire varier sensiblement son cosinus. Au surplus il sera facile, lorsqu'on le voudra, d'employer dans chaque équation la latitude correspondante.

Nommons K l'erreur sur la longitude de la lune, provenant de l'hypothèse: l'erreur que cette hypothèse produira sur la latitude de la lune sera rK , en faisant toujours $r = \frac{m}{M}$, (814); et on aura

$$(Q) \dots \delta L = E + K.$$

$$(R) \dots \delta l = e + rK.$$

D'où l'on déduit

$$(S) \dots r\delta L - \delta l = rE - e.$$

Substituant

Substituant les valeurs (Q), (R) dans les équations (O), (P), et combinant ces équations avec la précédente (N), pour les résoudre toutes trois par les méthodes ordinaires, on trouvera la valeur de chacune des trois inconnues, E , e , K .

818. Il sera plus commode de diviser l'opération comme l'indiquent les équations suivantes :

$$1^{\circ} \quad \delta L = \frac{\delta D' \cos. Z'' - \delta D'' \cos. Z'}{\cos. l \sin. (Z' \pm Z'')}.$$

$$2^{\circ} \quad \delta l = \frac{\delta D'' \sin. Z' \pm \delta D' \sin. Z''}{\sin. (Z' \pm Z'')}.$$

$$3^{\circ} \quad E = \frac{\delta D + \cos. Z (r \delta L - \delta l)}{\sin. Z \cos. l + r \cos. Z}.$$

$$4^{\circ} \quad e = \frac{r \delta D - \sin. Z \cos. l (r \delta L - \delta l)}{\sin. Z \cos. l + r \cos. Z}.$$

$$5^{\circ} \quad K = \delta L - E.$$

Les équations 1^e et 2^e sont tirées des équations (O), (P). On emploiera les signes supérieurs lorsque les deux observations auront été faites, comme il arrive le plus souvent, l'une avant et l'autre après la conjonction apparente ; parcequ'alors l'erreur δL , que nous avons substituée (813) à δE , augmente l'angle LES dans un cas et le diminue dans l'autre ; de sorte que cette erreur doit être négative dans l'une ou dans l'autre des équations (O), (P). Quand on emploiera les signes inférieurs, on se souviendra que $\sin. (Z' - Z'')$ doit être négatif (154), si Z'' est $> Z'$.

Les équations 3^e et 4^e sont tirées des équations (N), (S) ; la 5^e, de l'équation (Q).

Il nous reste à prévenir, relativement aux équations 1^e... 4^e, que lorsque la distance des centres calculée est moindre que la distance observée, on doit faire négative l'erreur correspondante δD ou $\delta D'$, &c. Je crois d'ailleurs à propos de répéter ici ce que j'ai dit (813), que lorsque la lune sera plus voisine que l'étoile ou que le soleil, du pôle de l'écliptique, il faudra employer dans les équations 1^e... 4^e le supplément de l'angle Z ou Z' , &c., donné

par le calcul (808). Il est inutile d'indiquer comment on reconnoîtra en quel sens devront se corriger les erreurs E , e , K dans les différentes circonstances, puisque cela se distingue à la seule inspection des deux dernières équations (808), lesquelles, après les corrections faites, doivent donner la distance apparente des centres absolument égale à la distance observée.

819. Pour donner un exemple de l'application de mes formules, je prends les éléments que donne M. de la Lande (*Astron.* Tom. II, pag. 565, 566, et Tom. IV, pag. 644), et, par les deux dernières équations (808), j'ai,

pour l'immersion d'Antarès observée à Paris, $D = 15' 48'', 41$;

pour cette immersion observée à Berlin, $D' = 15' 48'', 86$;

pour l'émergence observée à Berlin, $D'' = 15' 43'', 13$.

Ces trois distances sont toutes trop grandes, et par conséquent les erreurs δD , $\delta D'$, $\delta D''$ conservent les signes qu'elles se trouvent avoir dans les équations (818). En effet ces distances, comparées avec les demi-diamètres apparents respectifs de la lune, tels qu'ils sont déterminés dans l'*Astronomie* de M. de la Lande par les calculs de M. Carouge, donnent $\delta D = 11'', 8$; $\delta D' = 11'', 99$; $\delta D'' = 5'', 79$. On a de plus $Z = 75^\circ 25'$, $Z' = 59^\circ 44'$, $Z'' = 58^\circ 26'$, $l = 4^\circ 38'$ pour valeur moyenne, et $\log. r = 8,76150$. Avec ces éléments, je trouve par les formules (818), en adoptant les signes supérieurs dans la première et dans la seconde, ainsi que la question l'exige, $\delta L = 3'', 823$; $\delta l = 17'', 26$; puis $E = 7'', 67$; $e = 17'', 485$; $K = -3'', 85$. Il est aisé de voir, en examinant le calcul de la distance des centres fait pour Paris, en quel sens doivent s'appliquer les corrections des erreurs E , e , pour faire disparaître l'erreur δD . On reconnoîtra alors que la longitude de la lune, donnée par les tables, est trop petite de $7'', 7$; sa latitude trop grande de $17'', 5$; et comme la valeur de K a un signe contraire à celui de E , il en

résulte que la longitude de la lune donnée par l'hypothèse de la longitude de Berlin, est trop grande de $3''$, 85. Pour diminuer de cette quantité la longitude de la lune, on trouve par le moyen du mouvement horaire, qu'il faut augmenter l'hypothèse de $7''$ de temps; ensorte que l'on a $44' 13''$ pour la différence entre les méridiens des Observatoires royaux de Paris et de Berlin, déduite rigoureusement de ces observations et des calculs de M. Carouge.

820. Si deux observations eussent été faites sous le méridien connu, et la troisième seulement sous le méridien qu'on veut déterminer, on appliqueroit alors aux deux premières les équations (818, 1^e et 2^e). La 1^e donneroit la valeur de E , la 2^e celle de e . On corrigeroit de ces erreurs le lieu de la lune donné par les tables; puis on calculeroit (808) la distance des centres relativement à la troisième observation; et l'erreur de l'hypothèse pour la longitude terrestre se trouveroit par le moyen de l'équation (H), (814).

821. *Corriger les observations faites en employant un réticule de 45° non situé dans la direction exacte du mouvement diurne.*

Soient CB, CA, CD les trois fils du réticule, qui devroient se trouver dans les positions Cb, Ca, Cd ; et soit BAD le parallèle d'un astre, perpendiculaire au cercle horaire vrai Ca . Les passages de l'astre, observés en B, A, D, donnent en temps les intervalles BA, AD, desquels il s'agit de déduire la valeur de Aa et celle de Ca . Fig 80

Le fil AC partageant également l'angle BCD, on a (244), $BA + AD : BA \propto AD :: \text{tang.} \frac{1}{2}(D + B) : \text{tang.} \frac{1}{2}(D \propto B)$. Mais $BCD = 90^\circ$, et par conséquent $\text{tang.} \frac{1}{2}(D + B) = \text{tang.} 45^\circ = 1$; $D \propto B = 90^\circ - 2B = 2 a CA$, parce que $B = 90^\circ - BCa$, et que $BCa = 45^\circ + a CA$. Donc

$$\text{tang. } a CA = \frac{BA \propto AD}{BA + AD},$$

formule qui fait connoître l'angle de déviation des fils.

L'hypothénuse BD, divisée en deux segments par la perpendi-

Iii ij

culaire Ca , donne (221, 2°), $BD : Ba \curvearrowright Da :: 1 : \sin.(D \curvearrowright B)$.
 Donc

$$Ba \curvearrowright Da = (BA + AD) \sin. 2aCA.$$

Au moyen de cette formule, on aura la valeur absolue des segments Ba , Da , et on connoîtra par conséquent le moment auquel on devoit observer le passage de l'astre en a . La différence entre Ba et BA donne la valeur de aA . Or

$$Ca = aA \cot. aCA,$$

et Ca est la différence cherchée de déclinaison entre l'astre et le centre du réticule : pour la calculer, on multipliera la valeur en temps de aA trouvée ci-dessus, par 15 *cos. décl.* de l'astre..

822. *Corriger les erreurs auxquelles les observations sont sujettes, à raison de la différence entre le parallèle vrai et le parallèle apparent.*

Il y a trois causes de différence entre le parallèle vrai et le parallèle apparent ; 1°. le changement de déclinaison de l'astre ; 2°. le changement de la parallaxe de déclinaison ; 3°. le changement de la réfraction. Il est à propos d'évaluer séparément l'erreur qui provient de chacune de ces trois causes. On ne doit tenir compte des deux premières que pour les observations qui concernent la lune..

Fig. 81 823. Quand on observe avec la lunette parallatique la différence d'ascension droite et de déclinaison entre la lune et une étoile qui la suit, on est obligé de placer le micrometre de maniere que le bord de la lune rase le fil. Soit P le pôle du Monde, BC le fil horaire du micrometre, FM un autre fil perpendiculaire au fil horaire ; et soit LU le mouvement du bord de la lune, qui, en traversant la lunette, s'approche ou s'éloigne du pôle par l'une des trois causes (822). Comme il faut mettre le fil MF dans la direction LU , le fil horaire se trouve dans la position CS ; et par conséquent si AN est le parallèle de l'étoile, le passage de cette étoile, qu'on auroit dû observer en B , s'observera en S . Comme il est clair que la route

du centre de la lune est parallele à celle du bord qui a rasé le fil, et comme les observations des bords de la lune se réduisent toujours à son centre, supposons maintenant que LU soit la ligne suivie par le centre de la lune, et l'angle BPS sera l'erreur sur la différence des passages observés. Or le triangle CPS donne $\sin.PS : \sin.PCS :: \sin.CS : \sin.CPS$ ou $:: CS : CPS$, vu la petitesse de ces quantités. Mais $PCS = MCL$ est l'angle formé par le parallele apparent avec le parallele vrai; CS est la différence observée de déclinaison, entre l'étoile et le centre de la lune. Donc on aura par l'équation suivante la correction, en temps, du passage observé.

$$(T) \dots \text{la correction cherchée} = \frac{\text{diff. appar. décl.} \times \sin. \text{ang. des paralleles}}{15 \cos. \text{décl. de l'étoile}}$$

Cette correction s'ajoutera au passage observé de l'étoile, lorsque la lune, plus éloignée du pôle que l'étoile, s'en rapprochera, ou que, plus voisine du pôle que l'étoile, elle s'en éloignera. Dans les autres cas, la correction se retranchera.

L'erreur en déclinaison, ou la différence de CS à BC, peut se négliger dans les deux premiers cas (822). Au surplus on a $BC = CS \times \cos.PCS$.

Pour calculer l'équation (T), il faut connoître l'angle que forment entre eux les paralleles. Nous allons le déterminer relativement à chacune des trois causes (822).

824. Appellons m le mouvement diurne de la lune en déclinaison, pris en minutes; la formule suivante que donne M. de la Lande (*Astr.* 2543) fait connoître promptement, et avec l'exactitude suffisante, la valeur en minutes de *l'angle des paralleles produit par le changement de la lune en déclinaison*.

$$\text{angle des paralleles} = \frac{\frac{1}{2} m}{\cos. \text{décl. de la lune}}$$

825. Cherchons maintenant *l'angle des paralleles produit par le changement de la parallaxe de la lune en déclinaison*. Le seul énoncé de cette question fait naître l'idée de différentier la formule

qui donne la valeur de la parallaxe en déclinaison : il est surprenant que cette voie qui se présente d'elle-même n'ait été saisie par aucun Auteur, et sur-tout qu'elle ait échappé à de très habiles Géometres qui ont épuisé cette matiere, en discutant la solution donnée par M. de la Lande.

Fig. 82 Soit Z le zénith, P le pôle, LU le parallele apparent de la lune ; soit $PA = PL$; AU sera par conséquent le changement de la parallaxe de déclinaison. Si l'on appelle d cette parallaxe, p la parallaxe horizontale, on a $d = p \sin.ZL \cos.PLZ$, (*Astr. la Lande*, Tom. IV, pag. 634). Mais $\sin.ZL = \frac{\sin.ZPL \sin.PZ}{\sin.PLZ}$. Donc $d = p \sin.ZPL \sin.PZ \cot.PLZ$. Or $\cot.PLZ = \frac{\cot.PZ \sin.PL}{\sin.ZPL} - \cos.PL \cot.ZPL$, (VII. 13°). Donc $d = p \cos.PZ \sin.PL - p \cos.PL \sin.PZ \cos.ZPL$. En différentiant cette équation, et observant qu'indépendamment de p et de PZ , PL est encore une quantité constante, parcequ'ici l'on ne considere pas le mouvement de la lune en déclinaison, on a $\delta d = p \cos.PL \sin.PZ \sin.ZPL \delta ZPL$. Mais $\delta ZPL = APL$, $\delta d = AU = AL \text{ tang. } ALU = APL \sin.PL \text{ tang. } ALU = p \cos.PL \sin.PZ \sin.ZPL \times APL$. De cette derniere équation on déduit $\text{tang. } ALU = p \cot.PL \sin.PZ \sin.ZPL$. Et par conséquent on aura en minutes l'angle des paralleles par l'équation suivante :

$$\text{angle des paralleles} = \frac{R' \times \text{parall. horiz. cos. haut. du pôle sin. ang. hor. app. de la lune}}{\cot. decl. appar. de la lune}.$$

826. Il nous reste à chercher l'angle des paralleles produit par le changement de la réfraction.

Fig. 83 Soit AS le fil qu'un astre a parcouru, AE, FS la quantité de la réfraction dans les deux points A, S. Si on prend $FR = AE$, RS sera la différence des deux réfractions, et AR le parallele que l'astre auroit suivi, si l'effet de la réfraction eût été uniforme et constant. L'angle cherché des paralleles est donc RAS.

Comme il suffit de trouver sa valeur en minutes, j'emploierai indifféremment dans cette recherche les angles de variation (753)

ZRP, ZSP, ZAP, que je regarderai comme égaux ; et prenant $ZB = ZA$, ce qui donne BS pour différence des hauteurs apparentes, je considérerai comme droits les angles B et C, parceque dans les cas où ce problème se présente à résoudre, ZA et PA ne diffèrent jamais assez de 90° , pour que l'erreur (534) puisse être sensible.

Je fais $RS = \delta r$, $BS = \delta h$, $APR = \delta P$, $\sin.PA = \cos.décl. = \cos.D$, $RAS = a$, $ZRP = ZSP = ZAP = V$.

Or $\text{tang. } a = \frac{CS}{AC} = \frac{RS \cos.ZSP}{AR - CR} = \frac{\delta r \cos.V}{\delta P \cos.D - \delta r \sin.V}$; et cette dernière valeur de $\text{tang. } a$ est celle que donne M. Lexell, (Trembley, *Essai de Trigonométrie sphérique*, pag. 198). Mais cette formule ne me paroît pas la plus commode, parceque les tables des réfractions ne contiennent pas le rapport $\frac{\delta r}{\delta P}$, mais le rapport $\frac{\delta r}{\delta h}$.

Pour employer ce dernier rapport qui me semble préférable, je considère que si des angles droits BAZ, RAP je retranche la partie commune RAZ, il reste $BAR = PAZ = V$. Or $AR = \frac{BR}{\sin.BAR}$: donc $AR = \frac{\delta h + \delta r}{\sin.V}$. Mais on a aussi $AR = \frac{SR \sin.ASR}{\sin.RAS}$

$$= \frac{SR \cos.BAS}{\sin.RAS} = \frac{\delta r \cos.(V - a)}{\sin.a} = \delta r \cos.V \cot.a + \delta r \sin.V.$$

Donc $\frac{\delta h + \delta r}{\sin.V} = \delta r \cos.V \cot.a + \delta r \sin.V$; donc enfin

$$\text{tang. } a = \frac{\delta r \sin.V \cos.V}{\delta h + \delta r \cos.^2 V},$$

ou, en négligeant le terme insensible $\delta r \cos.^2 V$,

$$(U) \dots \text{tang. } a = \frac{\delta r}{\delta h} \times \sin.V \cos.V = \frac{\delta r}{\delta h} \times \frac{1}{2} \sin.2V.$$

Au lieu de $\text{tang. } a$, on peut sans scrupule mettre $\sin.a$, et substituer la valeur que donne cette formule, au lieu de $\sin. \text{ang. des parallèles}$ dans la formule (T), (823). Mais de plus il faut observer qu'en construisant la formule (T), nous avons supposé sans déviation le chemin apparent de l'un des deux astres, c'est-à-dire de l'étoile qu'il s'agissoit de comparer à la lune : or la réfraction influe sur le chemin apparent de l'un et de l'autre des deux astres ; d'où il suit qu'on doit prendre le double de la correction donnée par la

formule (T). Alors, et en faisant la substitution dont je viens de parler, la formule (T) sera la même que celle de M. de la Lande (*Astr.* 2547).

827. Pour que l'on sache en quel sens la correction doit se faire, il suffit que nous prévenions qu'à l'occident le changement de la réfraction rapproche les astres du pôle, et qu'à l'orient il les en éloigne. On fera donc usage de la règle que nous avons donnée immédiatement après la formule (T), en appliquant à l'astre qui passera le premier ce que nous avons dit de la lune, et faisant la correction sur le passage du second astre.

828. J'ai dit qu'on doit prendre *le double de la correction donnée par la formule (T)*; c'est ce qu'il est à propos de démontrer : car M. Lexell, dont la formule équivalente à la formule (T) prise une seule fois, a été adoptée par M. Trembley (pag. 202), dit positivement dans les Mémoires de Pétersbourg pour 1774, que la formule de M. de la Lande n'est pas exacte, *nequaquam cum veritate consistere posse*.

De ce qui a été dit (827), il est facile de conclure que dans tous les cas le fil horaire de la lunette est toujours entre le cercle
Fig.84 horaire vrai et le vertical. Cela posé, soit NQ le fil horaire de la lunette, P le pôle, Z le zénith; RR' le fil parcouru par le premier astre, MN le fil parcouru par le second; ZS, CA, deux verticaux; SE la réfraction de l'astre le plus bas, MA la réfraction de l'autre; enfin soient les petits arcs AB, EU perpendiculaires à PU, et le petit arc MF sensiblement perpendiculaire à CA et à ZS.

On a $PSN = a$, $PSZ = V = PMC$ sensiblement, $NS =$ diff. appar. *décl.*, quantité que je nommerai δD ; $SE = r$. Je fais $MA = r'$. Par D j'entends toujours la déclinaison, mais de l'un ou de l'autre astre indifféremment. On pourra, si l'on veut, pour plus d'exactitude, employer dans le calcul la quantité moyenne entre les deux déclinaisons, et faire la même chose pour l'angle de variation V .

Lors de l'observation du premier astre en S, son lieu vrai ou dégagé

dégagé de la réfraction, étoit en E. Donc, pour avoir son passage vrai par le cercle horaire vrai PU, il falloit ajouter à son passage apparent un intervalle de temps $\frac{EU}{15 \cos.D} = \frac{SE \sin.ESU}{15 \cos.D} = \frac{r \sin.V}{15 \cos.D}$. En nommant T le temps du passage observé en S, le passage dégagé de la réfraction sera donc $T + \frac{r \sin.V}{15 \cos.D}$.

Lorsque le passage du second astre a été observé en N, son passage apparent sur le cercle horaire vrai avoit déjà eu lieu en M. La différence en temps, entre ces deux passages, est $\frac{MN}{15 \cos.D} = \frac{NS \tan. NSM}{15 \cos.D} = \frac{\partial D}{15 \cos.D} \times \frac{\partial r}{\partial h} \sin.V \cos.V$, (826) (U). Cette différence doit se soustraire du passage observé en N, pour avoir le passage en M. Mais lorsqu'on a vu l'astre au point M, son lieu, dégagé de la réfraction, étoit en A. Pour qu'il atteignît le cercle horaire vrai PU, il s'en falloit donc d'un intervalle de temps $\frac{AB}{15 \cos.D} = \frac{AM \sin.AMB}{15 \cos.D} = \frac{r' \sin.V}{15 \cos.D}$. Donc, en appelant T' le temps du passage observé en N, le moment du vrai passage qu'on auroit dû observer en B, sera $T' - \frac{\partial D}{15 \cos.D} \times \frac{\partial r}{\partial h} \sin.V \cos.V + \frac{r' \sin.V}{15 \cos.D}$. La différence d'ascension droite en temps, entre les deux astres, dégagée des effets de la réfraction, sera donc $T' - \frac{\sin.V}{15 \cos.D} \times \left(\frac{\partial r}{\partial h} \times \partial D \cos.V - r' \right) - T - \frac{r \sin.V}{15 \cos.D}$, ou $T' - T - \frac{\sin.V}{15 \cos.D} \left(\frac{\partial r}{\partial h} \times \partial D \cos.V + r - r' \right)$. Mais $r - r'$ est la différence de réfraction correspondante à la différence de hauteur des deux astres; de sorte que $r - r' : FS :: \partial r : \partial h$. De plus $FS = MS \cos.V = \partial D \cos.V$, parcequ'au lieu de MS on peut sans scrupule mettre NS. La dernière analogie donne donc $r - r' = \frac{\partial r}{\partial h} \times \partial D \cos.V$. Donc l'erreur de la différence $T' - T$ des passages observés se réduit à $\frac{\partial r}{\partial h} \times \frac{2 \partial D \sin.V \cos.V}{15 \cos.D}$; ce qui est précisément le double de la formule (T), dans laquelle on auroit d'abord substitué la valeur de $\sin.a$ prise de la formule (U). C'est

donc M. Lexell qui lui-même est tombé dans l'erreur sur ce point, et non M. de la Lande.

La fig. 84 suppose l'astre à l'orient; le résultat seroit le même en supposant l'astre à l'occident.

829. La vraie différence de déclinaison est $BU = MS - BM + SU$. En mettant NS au lieu de MS, on aura, pour la correction de la différence observée NS, $SU - BM = SE \cos. ESU - MA \cos. BMA = r \cos. V - r' \cos. V$; et prenant ci-dessus la valeur de $r - r'$, on aura $\frac{\partial r}{\partial h} \times \partial D \cos.^2 V$, pour la correction de la différence observée de déclinaison, correction qui dans tous les cas doit s'ajouter.

830. Pour avoir par les tables de réfraction le rapport $\frac{\partial r}{\partial h}$, il suffit de connoître à-peu-près, par le moyen d'un globe, la hauteur moyenne entre les hauteurs des deux astres. En employant cette hauteur, on aura encore l'angle de variation avec une exactitude suffisante par la formule $\sin. V = \frac{\cos. \text{haut. du pôle} \sin. \text{ang. horaire}}{\cos. \text{hauteur}}$.

831. Trouver le moment où le mouvement d'un astre en hauteur est le plus rapide.

Fig. 68 Soit P le pôle, Z le zénith, RS le parallèle d'un astre. Je fais $PR = PS$; ce qui suppose que l'astre ne change point en déclinaison, parcequ'en effet ce changement, quand il a lieu, est infiniment petit pour l'intervalle d'un instant, du moins en comparaison du mouvement en hauteur. Le triangle PZR, en se convertissant en PZS, conserve donc comme constants les deux côtés PZ, PR; et par conséquent, en appelant Z l'angle PZR, R l'angle PRZ, et faisant (630, 631), $A = P$, $B = Z$, $C = R$, on a

$$\partial ZR = \partial P \sin. PZ \sin. Z = \partial P \sin. PR \sin. R.$$

D'où il suit que la plus grande valeur de ∂ZR ou le plus grand mouvement en hauteur dans l'intervalle d'un instant ∂P , a lieu lorsque $\sin. Z$ ou $\sin. R$ est le plus grand possible, c'est-à-dire quand l'azimut ou l'angle de variation (753) est de 90° .

832. Ces deux angles ne peuvent être tous deux droits en même temps, si ce n'est quand RS est l'équateur (417). Alors ils sont constants (si la déclinaison ne change pas), et par conséquent le mouvement en hauteur est uniforme.

Si RS n'est pas l'équateur, PR sera ou plus grand ou plus petit que 90° ; quant à PZ, il ne peut jamais excéder 90° .

Supposons d'abord $PR < 90^\circ$; celui-là seul des deux angles Z, R pourra être un angle droit, qui sera opposé au plus grand côté (475, 3°.), (413). Donc si la déclinaison boréale de l'astre est moindre que la hauteur du pôle, le mouvement le plus rapide en hauteur aura lieu lorsque l'azimuth sera de 90° ; et si la déclinaison boréale est plus grande que la hauteur du pôle, le moment du plus grand mouvement en hauteur sera celui où l'angle de variation sera de 90° .

Soit maintenant $PR > 90^\circ$. Alors ni l'un ni l'autre des angles Z, R ne peut être droit. En effet si on avoit $Z = 90^\circ$, on auroit $\cos.PR = \cos.PZ \cos.ZR$, (VI. 13°). Mais on a $ZR < 90^\circ$, puisqu'ici l'on considère l'astre au-dessus de l'horizon : donc l'équation précédente donne une valeur positive de $\cos.PR$; ce qui est absurde, puisqu'on suppose $PR > 90^\circ$. De même si l'on avoit $R = 90^\circ$, on auroit $\cos.PZ = \cos.PR \cos.ZR$, équation qui donneroit une valeur négative de $\cos.PZ$, tandis qu'on ne peut jamais avoir $PZ > 90^\circ$.

Pour déterminer le moment de la plus grande valeur de $\sin.Z$ ou de $\sin.R$, quand PR est $> 90^\circ$; je prends l'équation (VII. 9°) qui donne $\cos.Z = \frac{\cos.PR - \cos.PZ \cos.ZR}{\sin.PZ \sin.ZR}$. Par la supposition, $\cos.PR$ est négatif; Z sera donc $> 90^\circ$, et cet angle sera d'autant moindre, c'est-à-dire d'autant plus proche de 90° , que la valeur de $\cos.Z$ donnée par cette équation sera plus petite. Or la moindre valeur de $\cos.Z$, pour une valeur donnée de PZ et de PR, a lieu visiblement lorsque $\cos.ZR = 0$.

En raisonnant de même sur l'équation (VII. 11°) qui dans ce

Fig. 68 cas donne positif le rectangle $\cos.PR \cos.ZR$, on trouvera que la moindre valeur de $\cos.R$ a lieu dans la même circonstance, c'est-à-dire lorsque $\cos.ZR = 0$.

Donc le mouvement le plus rapide en hauteur, des astres qui ont une déclinaison méridionale, a lieu lorsque $ZR = 90^\circ$, c'est-à-dire au lever de l'astre.

833. *Déduire la hauteur méridienne, des hauteurs observées près du méridien.*

Soient ZR , ZS deux distances au zénith observées peu avant ou peu après le passage de l'astre au méridien. On demande la distance ZT .

Le triangle PZS , converti en PZR , conserve comme constants les côtés PZ , et $PS = PR$. Par conséquent appelant P l'angle ZPS , on a (629) en changeant les signes des différentielles et faisant $A = P$, $B = Z$, $C = S$,

$$(\Lambda) \dots \sin. \frac{1}{2} \delta ZS = \sin. \frac{1}{2} \delta P \times \frac{\sin.PZ \sin.PS \sin.(P + \frac{1}{2} \delta P)}{\sin.(ZS + \frac{1}{2} \delta ZS)}.$$

Or δZS est la différence des deux hauteurs observées; δP est l'intervalle de temps entre les deux observations, compté en parties de l'équateur; $P + \frac{1}{2} \delta P$ et $ZS + \frac{1}{2} \delta ZS$ sont l'angle horaire moyen et la distance au zénith moyenne, entre l'une et l'autre observation. On peut donc par la formule (A) vérifier très exactement la différence entre les deux hauteurs observées, et réduire successivement un nombre quelconque d'observations à une seule, en prenant le milieu entre les divers résultats. Je suppose toutes les observations réduites au point S , c'est-à-dire à l'observation la plus prochaine du méridien. Pour appliquer à cette observation la formule (A), il suffit de faire $\delta P = ZPS$, et $P = 0$; et on a

$$\sin. \frac{1}{2} (ZS - ZT) = \sin. \frac{1}{2} ZPS \times \frac{\sin.PZ \sin.PS}{\sin. \frac{1}{2} (ZS + ZT)};$$

et quand on a $ZPS < 2^\circ$, (259),

$$ZS - ZT = \frac{(ZPS)^2}{2 R'''} \times \frac{\sin.PZ \sin.PS}{\sin. \frac{1}{2} (ZS + ZT)}.$$

équations qui font connoître ZT ou la distance au zénith, que l'on cherche.

Ces équations et la formule (A) m'ont paru très commodes pour conclure, avec une grande exactitude, de plusieurs observations, la hauteur méridienne du soleil dans les jours voisins du solstice. Je prends ordinairement six hauteurs d'un bord avant le midi, et six du bord opposé après le midi; ce qui de plus me fait connoître avec grande précision le diamètre du soleil tel que la lunette le donne. D'autres observations ou la marche réglée de la pendule m'apprenant le moment juste du midi vrai, j'ai les angles horaires correspondants à chacune des observations. J'emploie dans le calcul du second membre des équations ci-dessus la déclinaison et la distance au zénith du bord observé, en négligeant les secondes.

834. *Ayant trois hauteurs d'un astre, et connoissant le temps où chacune de ces hauteurs a été observée, trouver l'angle horaire et la déclinaison de l'astre, et la hauteur du pôle.*

Ce problème dont la solution est assez pénible par les méthodes employées jusqu'à présent, se résout immédiatement par mes analogies différentielles finies.

Soient A' , A'' , A''' les trois hauteurs observées, A' étant la plus petite, A''' la plus grande. Soit T l'intervalle de temps, réduit en parties de l'équateur, entre les observations des deux moindres hauteurs A' , A'' ; T' l'intervalle de temps entre les deux plus grandes A'' , A''' ; O''' l'angle horaire correspondant à la plus grande hauteur A''' , L la latitude terrestre, D la déclinaison de l'astre.

En comparant la 1^e et la 3^e observation, la formule (A), (833), donne $\sin.\frac{1}{2}(A''' - A') : \sin.\frac{1}{2}(T + T') :: \cos.L \cos.D \sin.(O''' + \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T') : \cos.\frac{1}{2}(A''' + A')$, et en comparant les observations des deux plus grandes hauteurs, $\sin.\frac{1}{2}(A''' - A'') : \sin.\frac{1}{2}T' :: \cos.L \cos.D \sin.(O''' + \frac{1}{2}T') : \cos.\frac{1}{2}(A''' + A'')$. Donc $\cos.L \cos.D = \frac{\sin.\frac{1}{2}(A''' - A') \cos.\frac{1}{2}(A''' + A')}{\sin.\frac{1}{2}(T + T') \sin.(O''' + \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T')}$ = $\frac{\sin.\frac{1}{2}(A''' - A'') \cos.\frac{1}{2}(A''' + A'')}{\sin.\frac{1}{2}T' \sin.(O''' + \frac{1}{2}T' + \frac{1}{2}T')}$. Mais $\sin.(O''' + \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T') = \sin.(O''' + \frac{1}{2}T') \cos.\frac{1}{2}T + \cos.(O''' + \frac{1}{2}T') \sin.\frac{1}{2}T$. En substi-

tuant cette valeur dans l'équation précédente, et multipliant cette équation par $\sin.(O''' + \frac{1}{2}T')$, on en déduit

$$\cot.(O''' + \frac{1}{2}T') = \cot.\frac{1}{2}T \left(\frac{\sin.\frac{1}{2}(A''' - A') \cos.\frac{1}{2}(A''' + A') \sin.\frac{1}{2}T'}{\sin.\frac{1}{2}(A''' - A'') \cos.\frac{1}{2}(A''' + A'') \sin.\frac{1}{2}(T + T') \cos.\frac{1}{2}T} - 1 \right),$$

équation qui fait connoître l'angle horaire, puisque O''' est la seule quantité inconnue.

Faisons, pour abréger, $\frac{\sin.\frac{1}{2}(A''' - A'') \cos.\frac{1}{2}(A''' + A'')}{\sin.\frac{1}{2}T' \sin.(O''' + \frac{1}{2}T')} = m$; nous
 Fig. 68 aurons $\cos.L \cos.D = m$. Mais $\cos.L \cos.D = \sin.PZ \sin.PS$
 $= \frac{\cos.ZS - \cos.PZ \cos.PS}{\cos.ZPS}$ (VII. 7°) $= \frac{\sin.A''' - \sin.L \sin.D}{\cos.O'''} = m$. Donc
 $\sin.L \sin.D = \sin.A''' - m \cos.O'''$. La somme et la différence
 de cette équation et de l'équation $\cos.L \cos.D = m$ donneront
 (II. 4°, 3°)

$$\cos.(L \oslash D) = \sin.A''' + m (1 - \cos.O''')$$

$$\cos.(L + D) = m (1 + \cos.O''') - \sin.A''',$$

ou, (I. 7°, 24°), pour employer les logarithmes plus commodément,

$$\cos.(L \oslash D) = \sin.A''' \left(1 + \frac{2m \sin.^2 \frac{1}{2}O'''}{\sin.A'''} \right)$$

$$\cos.(L + D) = \sin.A''' \left(\frac{2m \cos.^2 \frac{1}{2}O'''}{\sin.A'''} - 1 \right).$$

Au moyen de ces deux équations, on aura les valeurs absolues de L et de D , c'est-à-dire de la latitude et de la déclinaison. Il est vrai qu'il faut savoir d'ailleurs quelle est la plus grande de ces deux quantités; mais il est bien rare qu'on ne le sache pas d'avance.

Les équations suivantes, déduites de celles que nous venons de donner, par les méthodes exposées (202, 198), rendront le calcul de cette solution prompt et facile, et n'exigent que des tables trigonométriques en logarithmes.

$$n = \frac{\sin.\frac{1}{2}(A''' - A'') \cos.\frac{1}{2}(A''' + A'')}{\sin.\frac{1}{2}T'}$$

$$\cos.x = \sqrt{\frac{n \cos.\frac{1}{2}T \sin.\frac{1}{2}(T + T')}{\sin.\frac{1}{2}(A''' - A') \cos.\frac{1}{2}(A''' + A')}}}$$

$$\text{tang.}(O''' + \frac{1}{2}T') = \text{tang.}\frac{1}{2}T \cot.^2 x$$

$$m = \frac{n}{\sin.(O''' + \frac{1}{2}T')}$$

$$\text{tang. } y = \sin.\frac{1}{2}O''' \sqrt{\frac{2m}{\sin.A'''}}$$

$$\cos.z = \text{tang.}\frac{1}{2}O''' \cot.y$$

$$\cos.(L \curvearrowright D) = \frac{\sin.A'''}{\cos.^2 y}$$

$$\cos.(L + D) = \sin.A''' \text{ tang.}^2 z.$$

Il est facile de reconnoître que plus les intervalles seront grands entre les observations successives, plus on aura d'exactitude dans les résultats : car il est clair que les erreurs commises dans les observations seront d'autant plus sensibles dans le calcul que les sinus de $\frac{1}{2}(A''' - A'')$ et de $\frac{1}{2}T'$ seront plus petits, et que $\cot.\frac{1}{2}T$ sera plus grande.

Cette solution est analogue à celle de M. Bezout ; mais la démonstration en est moins pénible : et quant au calcul numérique, mes formules exigent la recherche de 21 logarithmes, celles de M. Bezout la recherche de 27. Toutes les solutions qui me sont connues demandent encore plus de travail.

835. *Connoissant la déclinaison et deux hauteurs d'un astre, et les moments des observations des hauteurs, trouver l'angle horaire de l'astre et la hauteur du pôle.*

Dans le triangle isoscele SPR, les côtés et l'angle vertical étant connus, on trouvera la base RS et les angles sur la base. Dans le triangle RSZ, connoissant les trois côtés, on cherchera l'un des angles adjacents à RS, par exemple ZSR. On aura alors ZSP ou (ZSR — PSR). Enfin dans le triangle PZS, connoissant ZS et PS, et l'angle compris, on trouvera PZ et l'angle ZPS. Fig. 68

Si on connoissoit la hauteur du pôle, et qu'on cherchât la déclinaison de l'astre, on suivroit la même méthode ; mais on écrirait Z au lieu de R et de S, et S au lieu de Z, dans la démonstration et dans la figure.

836. *Ayant la hauteur du pôle, la déclinaison et deux hau-*

Fig. 68 *teurs d'un astre, et les moments des observations des hauteurs, trouver l'angle horaire de l'astre.*

La formule (A), (833), donne $\sin.(ZPS + \frac{1}{2}SPR) = \frac{\sin.\frac{1}{2}(ZR - ZS) \sin.\frac{1}{2}(ZR + ZS)}{\sin.\frac{1}{2}SPR \sin.PZ \sin.PS}$. Cette formule est celle de M. Douwes; le numérateur se réduisant (II. 23°) à $\frac{1}{2} \cos.ZS - \frac{1}{2} \cos.ZR$, ou à la demi-différence des sinus des deux hauteurs.

Si les observations ont été faites près du méridien, il suffit de connoître la latitude terrestre à quelques degrés près; l'erreur sur cet élément influe peu sur l'angle horaire en pareil cas, $\sin.PZ$ étant toujours beaucoup plus grand que $\sin.(ZPS + \frac{1}{2}SPR)$. Au surplus après avoir déterminé à-peu-près la valeur de l'angle horaire, on pourra l'employer dans la solution (VIII. 3°) pour chercher et connoître plus exactement la latitude, avec laquelle on calculera une seconde fois la formule précédente, qui alors donnera l'angle horaire avec plus de précision.

On voit que les hauteurs prises dans le voisinage du méridien sont très propres à déterminer la latitude terrestre quand la déclinaison de l'astre est bien connue, et réciproquement à déterminer la déclinaison quand la latitude est bien connue.

En répétant les calculs, comme nous venons de le dire, on peut obtenir de cette solution toute l'exactitude à laquelle les observations permettent d'aspirer : aussi est-elle très supérieure à la méthode de La Caille (*Traité de Navigation de Bouguer*) fondée sur la variation des distances au zénith, proportionnelle aux quarrés des angles horaires. Cette méthode est sujette à des erreurs considérables, ainsi que l'a démontré M. d'Alembert (*Opusc. mathém.* Tom. IV, pag. 357).

837. *Connoissant trois longitudes et trois latitudes héliocentriques ou sélénocentriques d'une tache, trouver l'inclinaison de l'équateur solaire ou lunaire sur l'écliptique, le lieu des nœuds de cet équateur, et la distance de la tache au pôle de rotation.*

Mes analogies différentielles finies donnent de ce problème une
solution

solution immédiate, beaucoup plus simple et plus facile que celles qu'on en a trouvées jusqu'à présent.

Soit E le point du globe solaire ou lunaire qui correspond au pôle de l'écliptique; P le pôle de rotation de l'astre, T, A, C les trois lieux observés de la tache.

Les trois distances TE, AE, CE de la tache au pôle de l'écliptique, et les différences de longitude, TEA, AEC, sont données par l'observation.

On cherche PE distance des deux pôles, la longitude du pôle P qui est à 90° de celle des nœuds, et la distance TP = AP = CP de la tache au même pôle, en la supposant adhérente au disque de l'astre, et dans une même situation pendant l'intervalle des observations.

Je décris trois arcs de grand cercle, TA, AC, TC : j'observe que le triangle PET converti en PEA conserve comme constants les côtés PE, PT; ce qui me donne, en faisant (619) A = P, B = E, C = T, et changeant les signes des différentielles dans l'analogie,

$$\sin. \frac{1}{2} \delta ET : - \tan g. \frac{1}{2} \delta PET :: \sin. (ET + \frac{1}{2} \delta ET) : \cot. (PTE - \frac{1}{2} \delta PTE).$$

Mais $\delta ET = EA - ET$, $\delta PET = TEA$, $(ET + \frac{1}{2} \delta ET) = \frac{1}{2}(ET + EA)$, et $PTE - \frac{1}{2} \delta PTE = \frac{1}{2}(PTE + PAE)$, comme on le reconnoîtra d'autant mieux en recourant à la démonstration (711) de l'analogie (619). Donc, en supprimant le signe négatif de $\tan g. \frac{1}{2} \delta PET$, lequel ne fait qu'indiquer que PET diminue quand ET augmente (726), on a

$$\sin. \frac{1}{2} (EA - ET) : \tan g. \frac{1}{2} TEA :: \sin. \frac{1}{2} (EA + ET) : \cot. \frac{1}{2} (PTE + PAE).$$

Dans cette analogie tout est donné, à l'exception du dernier terme. Mais la considération du triangle TPE converti en CPE fournira de même une analogie qui donnera la valeur de $\cot. \frac{1}{2} (PTE + PCE)$; et le triangle APE converti en CPE conduira à une analogie qui donnera la valeur de $\cot. \frac{1}{2} (PAE + PCE)$. Connoissant par ces trois

analogies les demi-sommes des trois angles de position, PTE, PAE, PCE, pris deux à deux, on en déduira la valeur de chacun de ces angles.

Maintenant, l'un quelconque des trois triangles que nous venons de considérer, par exemple le triangle PCE converti en PAE, nous donnera (614)

$$\text{tang. } \frac{1}{2} \delta \text{ PEC} : \text{tang. } \frac{1}{2} \delta \text{ PCE} :: \text{tang. (PEC} + \frac{1}{2} \delta \text{ PEC)} : \text{tang. (PCE} + \frac{1}{2} \delta \text{ PCE)},$$

ou, en ayant recours, si l'on veut, à la démonstration (710) de l'analogie (614),

$$\text{tang. } \frac{1}{2} \text{CEA} : \text{tang. } \frac{1}{2} (\text{PAE} - \text{PCE}) :: \text{tang. (PEC} + \frac{1}{2} \text{CEA)} : \text{tang. } \frac{1}{2} (\text{PAE} + \text{PCE})$$

Le troisième terme de cette analogie est le seul inconnu ; elle donnera donc la valeur de l'angle PEC, et par conséquent la longitude cherchée du pôle P.

Alors connoissant un côté et les angles adjacents dans l'un des triangles PEC, PEA, PET, connoissant, par exemple, dans le premier, CE, PEC, PCE, on trouvera à la fois, par l'élégante solution de Neper (IX. 4°), les deux côtés cherchés PE, PC.

On n'a que 21 logarithmes à chercher pour résoudre de cette manière le problème dont nous venons de nous occuper. La solution du P. Pezenas, l'une des moins pénibles de celles qu'on a données jusqu'à présent, demande 46 recherches dans deux tables. J'observe de plus que ma méthode a l'avantage de donner dans le calcul la plus grande précision, attendu qu'on détermine toutes les inconnues par les tangentes.

838. La solution qu'on vient de lire se trouve dans le Tome X des Mémoires présentés à l'Académie Royale des Sciences de Paris : il y donne en même temps des règles relatives au cas où le cercle des limites se trouve entre les longitudes observées ; parcequ'alors les premières analogies, au lieu de donner trois demi-sommes des angles de position, en donnent une seule et deux demi-différences. Mais si l'on observe les règles des signes (42, 154), on peut faire

usage, dans tous les cas, des analogies que j'ai données ci-dessus, sans qu'il soit besoin ni de figure ni d'aucune attention à la situation du cercle des limites.

Voici le détail du calcul réduit à la simplicité et à la généralité la plus grande.

Soit L' la première longitude observée de la tache, L'' la seconde, L''' la troisième; D' , D'' , D''' les trois distances respectives au pôle de l'écliptique; L la longitude cherchée du pôle de l'équateur de l'astre; O l'obliquité de l'écliptique relativement à cet équateur; D la distance de la tache à ce pôle.

$$\text{tang. } a = \frac{\sin. \frac{1}{2} (D'' - D') \cot. \frac{1}{2} (L'' - L')}{\sin. \frac{1}{2} (D'' + D')}$$

$$\text{tang. } b = \frac{\sin. \frac{1}{2} (D''' - D') \cot. \frac{1}{2} (L''' - L')}{\sin. \frac{1}{2} (D''' + D')}$$

$$\text{tang. } c = \frac{\sin. \frac{1}{2} (D''' - D'') \cot. \frac{1}{2} (L''' - L'')}{\sin. \frac{1}{2} (D''' + D'')}$$

$$\text{tang. } x = \text{tang. } \frac{1}{2} (L''' - L'') \text{ tang. } c \cot. (a - b)$$

$$L = x + \frac{1}{2} (L''' + L'')$$

$$m = L \oslash L''' \quad n = (b + c) \oslash a$$

Si m est $> 180^\circ$, on prendra $360^\circ - m$ au lieu de m . De même si n est $> 180^\circ$, on prendra $360^\circ - n$ au lieu de n .

$$\text{tang. } y = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2} D''' \sin. \frac{1}{2} (m \oslash n)}{\sin. \frac{1}{2} (m + n)}$$

$$\text{tang. } z = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2} D''' \cos. \frac{1}{2} (m \oslash n)}{\cos. \frac{1}{2} (m + n)}$$

$$O = z \oslash y \quad D = z + y$$

Mais si n est $> 90^\circ$, alors

$$O = 180^\circ - (z + y) \quad D = 180^\circ - (z \oslash y).$$



CHAPITRE XXII.

Des projections, et des planispheres géographiques et astronomiques..

LA Trigonométrie est d'une grande utilité pour la construction des planispheres et pour toute espece de projections ; et nous croyons ne pas devoir terminer cet Ouvrage sans donner au moins une idée de cette application importante de la science dont nous traitons.

839. On entend par la *projection* d'un objet, la représentation ou l'apparence de cet objet sur le plan de perspective. Si des différents points d'une figure on tire des lignes, suivant une même loi donnée, sur un plan donné autre que celui dans lequel est la figure, les points de ce plan donné auxquels aboutiront ces lignes, formeront la projection de la figure. Les cartes célestes et géographiques, par exemple, ne peuvent être que des projections, puisqu'elles ont pour but de représenter une surface sphérique sur la surface plane du papier, c'est-à-dire de réduire à un seul plan tous les points d'une surface sphérique, lesquels appartiennent, dans cette surface, à une infinité de plans différents.

De ces notions il résulte que l'art des projections n'est pas sans difficulté. Il est d'ailleurs impossible de conserver avec exactitude sur une carte géographique les distances respectives des pays, et de donner aux degrés de longitude et de latitude les grandeurs relatives qu'ils ont sur le globe : on ne peut que se rapprocher plus ou moins de la vérité.

840. Dans les anciennes cartes on faisoit les méridiens parallèles entre eux, et les degrés de longitude tous égaux à ceux de latitude. Ces cartes se nomment *cartes plates* : elles sont absolument défectueuses, si ce n'est pour une très petite étendue. En

effet soit P le pôle de la Terre, EQ un arc de l'équateur, de 12° par exemple. Soit A la ville de Paris, D celle de Dublin, M celle de Maroc. Je suppose ces deux dernières villes sous le même méridien, leur différence en longitude étant très petite et peut-être nulle; car la longitude de Maroc n'est pas encore déterminée avec précision. Au lieu de faire sur la carte les méridiens PE, PQ convergents, de sorte qu'ils aillent se rencontrer au pôle, conformément à leur position sur le globe et à la vérité; si on les décrit parallèlement, comme FQ, GE, Paris se trouvera sur la carte au point H, Dublin en K et Maroc en L. C'en est assez pour faire comprendre combien, dans les cartes de cette espèce, on peut errer sur les distances réciproques.

841. Il est à propos de remarquer avant tout, que les degrés de longitude diffèrent de grandeur sur le globe, suivant les distances au pôle. L'arc de parallèle AR est (394) du même nombre de degrés que l'arc EQ: mais la longueur de AR comparée à celle de EQ, est d'autant moindre que AR est plus voisin du pôle; parceque la longueur des degrés de longitude diminue (392) en proportion du sinus de leur distance au pôle.

842. Pour remédier aux inconvénients et aux difficultés que j'ai exposés, et pour approcher de la vérité dans la construction des cartes géographiques et célestes, on a eu recours à différentes sortes de projections.

La projection la plus simple est celle qu'on nomme *orthographique*. Elle est fondée sur cette loi, que les lignes tirées des divers points de la figure dont on demande la projection, doivent tomber à angle droit sur le plan de projection. Pour avoir, par exemple, la projection orthographique d'une ligne AB sur un plan représenté par la ligne PI, on mènra des différents points de AB les lignes BC, FH, &c. perpendiculaires à PI: la partie AC de la ligne PI, comprise entre les perpendiculaires, sera la projection de AB. Quelque distante du plan de projection que soit la ligne AB, les perpendiculaires BE, FG, &c. donneront de même sur un plan NO

Fig.87

la projection $DE = AC$ de la ligne AB . Mais DE ou $AC = AB \cos. \Lambda$, (211). Donc *la projection orthographique d'une ligne est égale à cette ligne multipliée par le cosinus de son angle d'inclinaison sur le plan de projection.*

Fig. 88 843. Si la figure dont on demande la projection est un arc de cercle, et si le plan de l'arc est perpendiculaire au plan de projection, alors le *sinus est la projection orthographique de l'arc*, pourvu que l'origine de cet arc soit le point de la circonférence duquel part celle des perpendiculaires qui passe par le centre. Concevons que le demi-cercle DFH soit élevé perpendiculairement sur le plan du papier, le diamètre DH restant seul dans ce même plan. Si l'on abaisse, de tous les points de la circonférence, des perpendiculaires FC , IE , &c., la suite des points auxquels elles aboutiront sur le plan du papier, formera le diamètre DH . Or si le point C est le centre, l'arc FH sera de 90° , et sa projection CH sera égale au rayon, c'est-à-dire au sinus de 90° . De même $CE = LI = \sin. FI$ sera la projection de l'arc FI . Donc, &c.

844. Si le plan du cercle, au lieu d'être perpendiculaire, est incliné au plan de projection; alors les ordonnées FC , IE , &c. qui tombent sur celui des diamètres qui est dans le plan de projection, feront toutes avec leurs projections (842) respectives CG , EK , &c., un angle égal à l'inclinaison des deux plans, (387). On aura donc (842), $\cos. incl. = \frac{CG}{FC} = \frac{EK}{EI}$, &c.; et par conséquent $FC : CG :: EI : EK :: \&c.$ Mais une des propriétés de l'ellipse, c'est que ses ordonnées sont proportionnelles aux ordonnées correspondantes du cercle dont le diamètre est égal à son grand axe. Donc $DGKH$, ou la projection du demi-cercle DFH , est une demi-ellipse. Mais ce qui se démontre pour une moitié se prouveroit de même pour l'autre moitié. *La projection orthographique d'un cercle incliné est donc une ellipse.*

Quelle que soit la distance du cercle au plan de projection, l'effet sera toujours le même. Car on peut toujours concevoir un

autre plan parallèle et passant par le centre du cercle, sur lequel plan la projection sera une ellipse, comme nous venons de le voir; or la projection sur ce plan ne peut différer en rien de la projection sur le plan donné : les lignes qui détermineront l'une et l'autre différeront seulement en longueur.

845. Un cercle vu obliquement et de quelque distance paroît donc être une ellipse, parceque les objets inclinés et éloignés se représentent à nos yeux suivant la projection orthographique, c'est-à-dire comme s'ils étoient dans un plan perpendiculaire aux rayons visuels. La ligne BC vue obliquement d'un point O, à une distance telle que l'angle O puisse se considérer comme infiniment petit, paroîtra de la grandeur de $AB = BC \cos. ABC = BC \sin. C$. La première de ces deux valeurs de AB est celle déjà trouvée (842). La seconde fait voir que la grandeur apparente d'un objet incliné diminue proportionnellement au sinus de l'inclinaison de cet objet au rayon visuel. Si donc on suppose que DGH soit la projection orthographique d'un demi-cercle DFH vu obliquement, toutes les ordonnées CF, EI paroîtront diminuées dans la proportion que nous venons d'indiquer. Ce rapport constant démontre encore que la projection d'un cercle incliné est une ellipse dont le grand axe DH est égal au diamètre du cercle, et dont le petit axe est moindre que ce diamètre suivant le rapport inverse du sinus total au sinus de l'angle d'inclinaison du cercle sur le rayon visuel.

846. Tels sont les éléments de la projection orthographique, projection peu en usage pour les cartes géographiques, parcequ'elle donne lieu nécessairement à des erreurs très graves, lorsque les cartes ont de l'étendue. La différence d'un petit arc FI à sa projection CE est peu importante, et dès-lors la distance FI de deux villes F, I sur le globe terrestre, peut sans une erreur sensible être représentée sur la carte par la distance CE. Mais plus le point I se rapprocheroit du point H, plus les accroissements de l'arc FI surpasseroient les accroissements correspondants de CE, et les erreurs sur les distances respectives des lieux en deviendroient

d'autant plus considérables. Supposons $IH = 60^\circ = 2FI$: alors CE ou $LI = \sin.30^\circ = \frac{1}{2}CH$. Donc $CE = EH$; et par conséquent les distances III , FI , dont la première est double de la seconde sur le globe, seront représentées sur la carte par des lignes égales.

Quelque grave que soit cet inconvénient, les Astronomes se servent utilement de la projection orthographique pour représenter et prédire les circonstances des éclipses, parceque dans ce cas il ne s'agit pas des distances respectives des lieux, mais seulement de décrire sur une carte géographique les courbes et les zones qui comprennent à-peu-près soit les contrées qui seront plongées dans l'ombre, soit les lieux d'où l'on pourra voir ou les mêmes phases, ou des phases différentes entre elles. Les principes de ces opérations astronomiques n'appartiennent point à ce Traité : on les trouvera exposés avec tous les détails, toute la clarté qu'on peut desirer, dans le Livre X de l'Astronomie de M. de la Lande.

847. La projection la plus commode pour les cartes qui embrassent une grande partie du globe, et sur-tout pour les mappemondes, celle qui défigure le moins la forme naturelle des continents, c'est la projection *stéréographique*. Dans la projection orthographique, la surface d'une demi-sphere, par exemple, est représentée sur le plan du grand cercle qui lui sert de base, et auquel tous les rayons visuels sont censés être perpendiculaires, parcequ'on suppose l'œil à une distance infinie de ce plan : dans la projection stéréographique, la même surface est représentée sur le plan du même cercle, mais en supposant l'œil au pôle de ce cercle ; ensorte qu'un seul rayon visuel, celui qui passe par le centre, est perpendiculaire au cercle.

Fig. 91

848. Si BFD représente l'hémisphère dont on veut avoir la projection, le diamètre BD représentera le plan de projection, et l'œil sera supposé au point Q également distant des points B et D . La projection de chaque point de l'hémisphère BFD sera sur le point respectif du plan BCD , par lequel passe le rayon visuel partant

partant du point Q et terminé à la surface de l'hémisphère. Par exemple le point S est la projection du point H, le point T celle du point U, la ligne ST celle de l'arc HU, et ainsi de suite. Prenons l'origine des arcs au point F dont la projection est au centre; comme $CT = \text{tang.} CQT = \text{tang.} \frac{1}{2}FU$, il s'ensuit que *la projection stéréographique d'un arc commençant au point dont la projection est au centre, est égale à la tangente de la moitié de cet arc.*

849. La plus belle propriété de la projection stéréographique est de représenter par des cercles tous les cercles de la sphere, grands ou petits, à l'exception de ceux dans le plan desquels l'œil se trouve (852, 860, &c.). Par exemple, le cercle qui a pour diamètre la corde UH, a pour projection un cercle dont ST est le diamètre. Pour bien comprendre cette assertion, il faut d'abord considérer que les rayons visuels qui vont du point Q à chaque point du cercle ayant pour diamètre la corde UH, forment un cône que coupe le plan BCD de projection. Cela posé, il s'agit de prouver que la section représentée par ST est un cercle.

Or l'angle $QST = \frac{1}{2}DQ + \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}BQ + \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}QH = \angle QUH$. On démontreroit de même l'égalité des angles T, H. Donc les triangles QST, QUH sont semblables. Mais QUH est le triangle par l'axe du cône ayant pour base le cercle auquel appartient la droite UH comme diamètre : donc aussi la base du cône dont le triangle par l'axe est QST, doit être circulaire; puisque ces deux cônes sont semblables, ayant leurs dimensions homologues proportionnelles, ou, ce qui revient au même, leurs triangles par l'axe étant semblables entre eux.

850. Si Q est l'un des pôles de la Terre, le plan de projection BCD sera l'équateur. Alors les projections des parallèles sont des cercles concentriques, celles des méridiens sont des lignes droites.

En effet 1°. que l'on prenne $FG = FU$; la projection du parallèle qui passe par les points G, U sera, comme nous venons de le voir (849), un cercle décrit du centre C et d'un rayon $CT = CE$. De même la projection du parallèle qui passe par les points K, H,

Fig. 91 en supposant $FK = FH$, sera un cercle qui aura CS pour rayon et C pour centre. On voit que le point C, projection du point F, est le centre de tous les cercles qui sont les projections des parallèles de l'équateur.

851. Pour décrire un parallèle sur le plan de projection, on prendra donc pour rayon (848) la tangente de la demi-distance du parallèle au pôle : ou pour décrire graphiquement les parallèles de degré en degré, ou de cinq en cinq degrés, &c., on divisera le quart de cercle BF en 90 parties, ou en 18 parties, &c. ; par chaque division on menera une droite au point Q, et les intersections de ces lignes sur BD donneront les points T, S, &c., et par conséquent les rayons CT, CS, &c. des projections respectives des parallèles.

852. 2°. J'ai dit (850) que les projections des méridiens sont des lignes droites. En effet puisqu'on suppose l'œil à l'un des pôles, il est dans le plan de tout méridien, le pôle étant un point commun à tous les méridiens. L'œil ne peut donc appercevoir la courbure de ces cercles.

Pour décrire les projections des méridiens, que l'on considère BFDQB comme représentant l'équateur ou le plan de projection. Chacun des diamètres de ce cercle dont le centre C est la projection (850) de l'un des pôles, sera la projection de l'un des méridiens.

853. Les méridiens et les parallèles décrits, plus de difficulté pour placer les villes ou les étoiles sur un planisphere terrestre ou céleste, selon leurs longitudes et latitudes respectives.

C'est de cette projection *polaire* que Ptolomée a fait usage pour la construction de son Astrolabe, et Robert de Vaugondy pour certaines cartes de la Russie. Elle est adoptée dans les planisphères célestes plus que dans les planisphères terrestres ; on s'en sert surtout pour les cartes qui renferment la moitié du Ciel.

854. Pour décrire l'écliptique sur ces cartes, imaginons que BQDFB soit le colure des solstices, BCD le plan de projection, F

et Q les deux pôles de l'équateur. Soit BU un arc égal à l'obliquité de l'écliptique : menons le diamètre RU ; R, U seront les deux points solstitiaux , et leurs projections sur le plan BCD seront les points T, P. Le diamètre de l'écliptique sur le plan de projection est donc PT. Mais $PT = CT + CP = \text{tang. CQT} + \text{tang. CQP} = \text{tang. } \frac{1}{2}FU + \text{tang. } \frac{1}{2}FR = \text{tang. } \frac{1}{2}FU + \cot. \frac{1}{2}FU = \frac{2}{\sin. FU}$, (I. 9°). Donc $\frac{1}{2}PT = \text{coséc. } FU = \text{séc. } BU$. Et par conséquent *pour décrire l'écliptique sur le plan de projection, on doit prendre pour rayon la sécante de l'obliquité de l'écliptique.*

Soit maintenant BFDQB l'équateur ou le plan de projection , et soient Q, F les points marqués 0° et 180°, c'est-à-dire ceux où l'écliptique doit couper l'équateur. Si on prend pour centre chacun de ces points successivement, et pour rayon la sécante de l'obliquité, il sera facile de trouver le point *m*, qui est le centre de l'écliptique qu'il s'agit de décrire.

855. On raisonnera de la même manière , lorsqu'on voudra tracer sur un planisphere céleste la projection de l'horizon d'un lieu quelconque. Soient par exemple RU le diamètre de cet horizon , Q et F les pôles de l'équateur : QR ou FU sera la hauteur du pôle ou la latitude du lieu dont il s'agit. Le rayon du cercle destiné à représenter l'horizon sera donc la cosécante de la latitude. Ce cercle se fait ordinairement en carton , et sert à déterminer sur les planispheres mobiles le lever et le coucher des astres.

856. La projection polaire, dont nous venons de donner une idée , est de toutes la plus facile. Mais la plus usitée, sur-tout pour les mappemondes , est celle qui suppose l'œil dans l'équateur, au point de 270° si l'on veut décrire notre hémisphère , et au point de 90° s'il est question de décrire l'hémisphère opposé.

857. Dans cette projection , que je nommerai *équatoriale*, les méridiens sont des cercles ainsi que les parallèles, et leurs rayons sur le plan de projection se déterminent comme il suit.

Soit BFDQB l'équateur , D le point duquel on commence à

Mmm ij

Fig. 91 compter les longitudes, Q le point de 90° où l'on suppose l'œil placé, et UR le diamètre d'un méridien dont on cherche la projection sur le plan représenté par la ligne BD, qui dans ce cas est le plan du premier méridien. Nous avons vu (854) que le cercle qui a pour diamètre UR, a pour projection un cercle qui a pour rayon $\frac{1}{2}PT = \coséc.FU$. Mais $FU = QR = 90^\circ - DR$, et DR est la longitude du méridien dont il s'agit. Donc *dans la projection équatoriale, le rayon d'un méridien est égal à la sécante de la longitude de ce méridien.*

Tout méridien passant par les pôles, il sera toujours facile de trouver sur la carte, de la manière indiquée (854), le centre d'un méridien quelconque.

858. Pour trouver la projection des parallèles ; soit représenté par la ligne QF le plan de l'équateur, l'œil étant toujours supposé au point Q, à 90° de longitude. Le plan de projection BCD sera encore le premier méridien ; mais dans la supposition actuelle, B, D seront les pôles de la Terre. Les diamètres des parallèles seront des lignes telles que GR, perpendiculaires à BD. Or, en supposant toujours l'œil au point Q, la projection stéréographique de GR est $PE = CP - CE = \tan\frac{1}{2}FR - \tan\frac{1}{2}FG$. Mais $FR = 180^\circ - QR = 180^\circ - FG$, et FG est la latitude du parallèle dont GR est le diamètre. Donc $PE = \cot\frac{1}{2}lat. - \tan\frac{1}{2}lat. = 2 \cot.lat., (I. 38^\circ)$. Ainsi, *dans la projection équatoriale, le rayon d'un parallèle est égal à la cotangente de la latitude de ce parallèle.*

Cette règle jointe à la précédente (857) dispense les Géographes de tout calcul. L'une et l'autre sont plus simples que celles qu'on a données jusqu'à présent.

Il y a toujours sur la circonférence du premier méridien ou du plan de projection, deux points par lesquels passe un parallèle quelconque : de sorte que connoissant le rayon d'un parallèle, il sera toujours facile d'en déterminer le centre sur le plan de projection.

859. Si on veut tracer sur une mappemonde la projection d'un horizon ; soit Z le zénith ou le pôle de cet horizon , UR le diamètre du même cercle , Q le point de 90° sur l'équateur , ou le pôle du premier méridien BCD ; on aura $ZR = 90^\circ = DQ$, et par conséquent $QZ = DR$. Mais QZ est (391) l'inclinaison de l'horizon sur le plan de projection BCD. Donc (857) la sécante de cette inclinaison est le rayon du même horizon projeté. Pour connoître cette inclinaison ; soit P le pôle , PH son élévation sur l'horizon proposé Fig. 92 MH , PM le premier méridien , et par conséquent l'angle P la longitude du lieu dont on veut projeter l'horizon ; l'angle M sera l'inclinaison cherchée. Or dans le triangle PMH rectangle en H , on a (VI. 12°) , $\cos.M = \sin.P \cos.PH$, ou $\cos.incl. = \sin.long. \cos.lat. = \frac{1}{2} \sin.(long. + lat.) + \frac{1}{2} \sin.(long. - lat.)$, (II. 14°). *V. l'addit.*

860. Pour faire voir combien les regles précédentes sont commodés dans les applications ; soit AFR le premier méridien vu du Fig. 93 point marqué 270° sur la circonférence de l'équateur , et TCN ce même premier méridien vu du point diamétralement opposé , c'est-à-dire du point marqué 90° sur la circonférence de l'équateur : et soit proposé de tracer et de représenter les deux hémisphères sur les cercles AFR , TCN. Que par le point de contact de ces deux cercles , on mene la droite mn formée de leurs diamètres ; que l'on conçoive que cette ligne soit la projection de l'équateur , laquelle doit être une ligne droite , puisque l'œil ne peut voir la courbure de ce cercle dans le plan duquel nous le supposons placé. Menons ensuite les deux diamètres AR , TN , perpendiculaires à mn ; ils seront les projections des méridiens de 90° et de 270° , et leurs extrémités seront les pôles de la Terre. Si A est le pôle arctique , T sera le même pôle. Le pôle antarctique sera au point R ou N.

861. Cela posé ; pour placer convenablement les différents pays sur la mappemonde , il faut tracer les cercles de longitude et de latitude. Veut-on , par exemple , décrire le méridien de 50° ? le rayon de ce cercle est (857) la sécante de 50° , qui dans les tables

Fig. 93 est de 1,5557 : je suppose que le diamètre AR de la projection soit de 400 parties sur une échelle de parties égales ; on multipliera (25) par 200 les lignes trigonométriques prises dans les tables , et on aura séc. $50^\circ = 311\frac{1}{2}$ environ. Cette distance prise sur l'échelle et portée de l'un des pôles sur l'équateur , donnera le point r , qui doit servir de centre pour décrire du rayon $311\frac{1}{2}$ le cercle de projection du méridien de 50° . Dans la figure , ADR est la projection de la moitié de ce méridien. Les tables donneront de la même manière le rayon de tout autre méridien ; et on n'aura aucun calcul à faire si on prend pour rayon de la projection une ligne qui sur l'échelle des parties égales soit exprimée par un nombre tel qu'il soit une puissance de 10.

862. Pour décrire les cercles de latitude , si on veut les avoir par exemple de dix en dix degrés , on divisera en 18 parties égales chaque demi-cercle terminé par les diamètres AR , TN. Je suppose l'arc CN = BN = 30° , c'est-à-dire égal à trois de ces parties ; le parallèle qui passera par les points B , C sera le parallèle de 60° de latitude. Le rayon de ce parallèle sur le plan de projection est (858) la cotangente de 60° , laquelle prise dans les tables et multipliée par 200 (en supposant toujours de 400 parties le diamètre AR de la projection) , donne $115\frac{1}{2}$. Cette ouverture de compas prise sur l'échelle , et portée de l'un des points B ou C sur le diamètre TN prolongé , donnera le centre du parallèle BPC de 60° de latitude qu'il s'agissoit de décrire.

On décrira de même les projections des autres parallèles.

863. Nous avons vu comment on peut tracer les mappemondes : actuellement soit proposé de marquer sur ces cartes l'horizon de l'hémisphère éclairé par le soleil à un moment donné , par exemple au moment où Vénus sortit de dessus le disque du soleil lors de son passage sur cet astro en 1769. Le soleil étoit alors dans le plan du méridien de 174° et avoit $22^\circ 36'$ de déclinaison boréale : il s'ensuit (859) que l'inclinaison de l'horizon demandé sur le plan de projection est de $84^\circ 28'$; la sécante de $84^\circ 28'$ est donc le rayon du

cercle projeté. De plus on voit par les données que ce même cercle doit couper l'équateur aux points de 84° et de 264° , et le méridien de 174° à $67^\circ 24'$ de latitude australe. On déterminera les points de 84° et de 264° par la méthode (861), qu'il suffira même d'employer pour trouver seulement l'un s de ces points, puisque l'autre S sera à la même distance du centre de projection, mais dans l'autre hémisphère. On décrira aussi le méridien de 174° et le parallèle (862) de $67^\circ 24'$, et on aura le point e d'intersection. Ayant ce point, le point s de 84° sur l'équateur, et la sécante de $84^\circ 28'$ pour rayon, on trouvera le point qui doit servir de centre pour décrire l'arc FsG qui représente la moitié de l'horizon cherché. On décrira l'arc ISH qui représente l'autre moitié, en prenant NH , TI égaux à GR , AF , et se servant du rayon qu'on aura employé pour décrire FsG .

D'après ces constructions, on voit qu'en supposant le soleil au point K du méridien de 174° , à $22^\circ 36'$ de distance boréale de l'équateur, l'hémisphère éclairé est $FAG + ITH$.

864. Nous avons traité de la projection stéréographique polaire et équatoriale des méridiens, des parallèles et des horizons. Pour avoir la projection stéréographique d'un petit cercle qui ne seroit ni parallèle ni perpendiculaire au plan de projection, comme on a déjà vu (849) que le petit cercle dont le diamètre est par exemple la corde UH , a pour projection le cercle dont ST est le diamètre, Fig. 91 il ne nous reste qu'à déterminer la valeur de ce diamètre ST . Or $ST = CS - CT = \text{tang.} \frac{1}{2} FH - \text{tang.} \frac{1}{2} FU$. Pour déterminer la projection du diamètre d'un petit cercle oblique au plan de projection, il faut donc connoître la plus grande distance FH et la plus petite distance FU de ce cercle au point F qui correspond au centre de la projection.

Et si le point F est entre les points H , U , il est évident qu'alors on a $ST = \text{tang.} \frac{1}{2} FH + \text{tang.} \frac{1}{2} FU$.

865. Pour décrire les cercles qui passent sur tous les points de

la Terre, desquels on peut voir l'entrée ou la sortie de Vénus lors de son passage sur le disque solaire ; M. de la Lande a donné , Liv. XI de son Astronomie ; des méthodes fort simples , et il a réuni et exposé très clairement dans ce même Livre tous les principes nécessaires pour le calcul ou pour la représentation graphique de toutes les circonstances d'un passage.

Comme l'objet de ce Traité n'est pas de former un Astronome ou un Géographe , je me contenterai d'avoir donné quelques notions des deux sortes de projections qui sont les plus connues , dans la seconde desquelles l'application de mes formules peut contribuer à abréger le travail.

866. J'avois dessein de faire voir aussi comment on applique la Trigonométrie à la Gnomonique. Mais tous les problèmes de la Gnomonique peuvent se réduire et ont été réduits en effet par divers Auteurs à la résolution des triangles rectilignes rectangles. Il suffit donc , pour résoudre ces problèmes , d'employer les formules que j'ai données , et il n'en est aucun qui m'ait paru mériter ou exiger la recherche d'une solution particulière.

A P P E N D I C E.

CE Traité étoit à demi imprimé lorsque M. l'Abbé de Lambre a bien voulu s'unir à moi pour en suivre la révision. J'ai profité plus d'une fois de ses conseils pendant le cours de l'impression : mais n'ayant pu faire entrer dans le corps de l'Ouvrage quelques-unes de ses regles et formules , plus simples et plus commodes que les miennes , j'ai cru devoir y suppléer ici. Je donnerai en même temps quelques éclaircissements , ainsi que les corrections des erreurs qu'un examen scrupuleux a fait découvrir depuis l'impression.

Art. 4, lig. 5 ; l'autre. *lisez* le

Art. 6, lig. 7, et art. 25, ligne 2 ; quelque *lisez* quelle que

Art. 8. C'est dans cet article qu'il eût été à propos d'expliquer le signe δ que j'ai adopté pour désigner la *différentielle* ou finie ou infiniment petite, d'une quantité variable. Mais c'est dans le cours de l'impression que ce signe a été imaginé par M. Didot l'aîné. Toujours animé du zèle qui le distingue, il a fait graver plusieurs caracteres nouveaux, pour que les signes algébriques fussent clairement indiqués.

Art. 27, lig. 2 ; et *lisez* ni

Page 10, lig. 3 ; $\frac{\sqrt{(RR - \cos.^2 A)}}{R \times \cos. A}$ *lisez* $\frac{R \sqrt{(RR - \cos.^2 A)}}{\cos. A}$

Art. 35, lig. 2. J'ajouterai pour les Comménçants que quelques Auteurs prolongent le rayon de l'autre côté du centre, et qu'alors ils prennent la tangente de l'angle obtus dans la direction opposée à celle de la tangente de l'angle aigu. Par exemple, si TU est la tangente d'un angle aigu TCU, TZ sera la tangente de l'angle obtus TCM, en supposant que MCZ soit une ligne droite. Mais puisque, suivant la définition ordinaire (7), TZ est la tangente qui appartient à l'arc TS, il me semble qu'à la rigueur un arc $> 90^\circ$ n'a point de lignes trigonométriques qui lui soient propres, et que s'il faut dès-lors qu'il les emprunte d'un autre arc, il vaut autant recourir à celui qu'indique le sinus. Au reste, pourvu qu'on parvienne à établir des regles exactes relativement aux signes, peu importe que l'on choisisse l'une ou l'autre méthode.

Fig. 1.

Art. 43, ligne 2 ; $\frac{1}{2}$ *lisez* $\frac{1}{4}$

Art. 115, lig. 4 ; $\cos. 120^\circ = \cos. 60^\circ$ *lisez* $\cos. 120^\circ = - \cos. 60^\circ$

En effet $\cos. 120^\circ = \cos. (180^\circ - 60^\circ) = (54) \cos. 180^\circ \cos. 60^\circ + \sin. 180^\circ \sin. 60^\circ = (42) - 1 \times \cos. 60^\circ + 0 \times \sin. 60^\circ = - \cos. 60^\circ$.

Pag. 35, lig. 18 ; tels *lisez* tel

lig. avant-derniere ; respectivement *lisez* relativement

N n n

Pag. 39, lig. 14; et pag. 41, lig. 17 et lig. dernière; infiniments *lisez* infiniment.

Pag. 44, lig. 3. . . . 12. Ces préceptes se rapportent seulement aux opérations analytiques dans lesquelles les arcs se supposent toujours moindres que de 90°. On trouve plusieurs exemples de ces opérations aux articles 687, 692, 693, &c.

Art. 151, lig. 10; produit pour chaque facteur *lisez* produit, par chaque facteur,

Pag. 60, lig. 18; ces coefficients *lisez* les valeurs des quantités.

Pag. 71, lig. 24; $\frac{1}{360}$ *lisez* $\frac{3}{100}$

Art. 181 et 182. On observera que ces produits étant formés des valeurs de M et de $\frac{1}{M}$ prises avec 25 décimales seulement, on ne peut être sûr de l'exactitude du dernier chiffre, ni même quelquefois de l'avant-dernier.

Pag. 94, lig. 25; qu'on a ensuite *lisez* qu'on a ensuite avec 14 décimales

Pag. 95, lig. 22; racine *lisez* racine 5°

Pag. 96, lig. 3; $\frac{2b}{(m^2 - m)a - 2}$ *lisez* $\frac{2b}{(m^2 - m)a^{m-2}}$

Art. 253, lig. 3; $(\sin.C \mp \delta C)$ *lisez* $\sin.(C \mp \delta C)$

Art. 255, lig. 8 et 15; (IV. 77°) *lisez* (III. 77°)

Pag. 134, lig. 1; influée *lisez* influé

Pag. 172, lig. 3; celui *lisez* ceux

Pag. 173, lig. 3. De cette formule on parvient aisément, en procédant comme je l'ai fait (463), à la suivante qui est plus commode pour le calcul; elle m'a été suggérée par M. de Lambre :

$$\sin. \frac{1}{2} AEP = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (ARP + RAE - RPE) \sin. \frac{1}{2} (ARP + RPE - RAE)}{\cos. RAE \cos. RPE}}.$$

Fig. 35

Pag. 174, lig. 23; M. de Lambre trouve l'angle cherché EAe par une seule formule qu'il démontre fort simplement au moyen de la Trigonométrie sphérique. Comme nous ne devons faire usage dans cet article que de la Trigonométrie rectiligne, nous parviendrons comme il suit à la même formule.

Si du point r on suppose une perpendiculaire abaissée sur RE , elle sera parallèle et égale à Ee , et on aura $Rr^2 = Ee^2 + (RE - re)^2 = Ee^2 + RE^2 + re^2 - 2RE \times re = Ee^2 + AR^2 - Ae^2 + Ar^2 - Ae^2 - 2RE \times re$. Donc $Ae^2 + Ae^2 - Ee^2 = AR^2 + Ar^2 - Rr^2 - 2RE \times re$; et par conséquent (232), $2AE \times Ae \times \cos.EAe = 2AR \times Ar \times \cos.RAr - 2RE \times re$, ou $\cos.EAe = \frac{AR \times Ar \times \cos.RAr - RE \times re}{AE \times Ae} = \frac{\cos.RAr - \sin.RAE \sin.rAe}{\cos.RAE \cos.rAe}$. J'applique à cette valeur de $\cos.EAe$ la méthode (463) qui me conduit à la formule de M. l'Abbé de Lambre,

$$\sin.\frac{1}{2}EAe = \sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(RAR + RAE - rAe) \sin.\frac{1}{2}(RAR + rAe - RAE)}{\cos.RAE \cos.rAe}}.$$

Art. 342. M. l'Abbé de Lambre résout ce problème de la manière suivante, qui est plus courte et plus commode pour le calcul que ma solution.

$$AD = \frac{AC \times \sin.ACD}{\sin.n} = \frac{AB \times \sin.ABD}{\sin.m}. \text{ Donc } \sin.ABD : \sin.ACD \text{ Fig. 44}$$

$\therefore AC \sin.m : AB \sin.n$, et par conséquent (II. 12°), $\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(ABD + ACD)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(ABD - ACD)} = \frac{AC \times \sin.m + AB \times \sin.n}{AC \times \sin.m - AB \times \sin.n}$; puis en employant la méthode (209),

$$\text{tang.}a = \frac{AB \times \sin.n}{AC \times \sin.m}, \text{ et}$$

$$\text{tang.}\frac{1}{2}(ABD - ACD) = \text{tang.}\frac{1}{2}(ABD + ACD) \cot.(45^\circ + a).$$

La somme $ABD + ACD$ est une quantité connue, puisque le quadrilatère $ABDC$ donne $ABD + ACD = 360^\circ - BAC - BDC$. On a donc, au moyen des deux formules ci-dessus, la valeur absolue de ABD et celle de ACD , et ces valeurs connues, la détermination des distances cherchées ne souffre plus de difficulté.

Lorsque le résultat donnera $\text{tang.}\frac{1}{2}(ABD - ACD)$ négative, on écrira $+$ $\text{tang.}\frac{1}{2}(ACD - ABD)$ au lieu de $- \text{tang.}\frac{1}{2}(ABD - ACD)$, (r54).

Art. 358, lig. 3. Je comprends, avec d'autres Auteurs, sous le nom général de *cas irréductible*, toutes les équations du troisième degré qui ont trois racines réelles. Il étoit inutile, pour le but que je me propose, d'entrer dans les distinctions de l'analyse sur la définition précise de ce cas; d'autant plus qu'il est indifférent à la Trigonométrie que les racines soient commensurables ou incommensurables; elle les trouve toujours avec une égale facilité.

Art. 361, lig. 10; $x = -\sin.(180^\circ + A)$ lisez $x = \sin.(180^\circ + A)$

lig. 13; lisez $x = \sin.(300^\circ + A) = \sin.(360^\circ - 60^\circ - A)$
 $= -\sin.(60^\circ - A)$

Et à la fin de cet article ajoutez: mA étant un multiple de A , et c la circonférence du cercle, les racines des équations (125) sont $\sin. A$, $\sin.(\frac{c}{m} + A)$, $\sin.(\frac{2c}{m} + A)$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à la dernière racine, qui est toujours $\sin.(\frac{(m-1)c}{m} + A)$.

Si dans ces expressions on substitue *cos.* à *sin.*, on aura les racines des équations qui donnent les valeurs des cosinus des arcs multiples.

Pag. 208, lig. 24 et 25; 60 lisez 60°

Pag. 224, lig. 3; ajoutez: En prenant la somme, on a une seconde valeur de A , laquelle satisfait à l'équation (F) qui est réellement du second degré, comme on le verra en substituant par exemple $\sqrt{(1 - \sin.^2 A)}$ au lieu de $\cos. A$, puis résolvant l'équation selon les méthodes ordinaires, pour en tirer la valeur analytique de $\sin. A$.

Art. 385, lig. 5; du lisez de

Pag. 246, lig. 7; que deux lisez qu'une seule
 lig. 9; puissent lisez puisse

Pag. 250, lig. 2; art. lisez n°.

Art. 463, lig. 10; (398). lisez (398): pourvu que l'arc cherché ne soit pas composé de la somme de deux arcs; car alors il peut être quelquefois plus grand que de 90°.

Art. 465, lig. 8 ; *par des voies plus laborieuses*. La méthode que j'ai suivie pour démontrer les analogies de Neper , est celle que M. Mauduit a employée (*Astronomie sphérique*).

Pag. 263 , lig. 19 ; en dehors. *Ajoutez* : Voyez cependant une exception (497).

Art. 488 , lig. 12. Au lieu de cette regle M. l'Abbé de Lambre a trouvé la suivante qui a cet avantage , que même avant qu'on ait calculé la valeur de l'angle cherché , elle fait connoître l'espece de cet angle toutes les fois que l'incertitude peut être levée : cela est utile sur-tout dans les problèmes (489, 490).

Un angle est de la même espece que le côté opposé , toutes les fois que l'un des côtés adjacents a une valeur ou intermédiaire entre la valeur du côté opposé et la valeur du supplément du côté opposé , ou égale à l'une de ces deux valeurs.

Par exemple soit $AC = 50^\circ$, et par conséquent $180^\circ - AC = 130^\circ$. Si la valeur de AB n'est ni $< 50^\circ$ ni $> 130^\circ$, l'angle C sera de la même espece que AB . Fig. 53

Cette regle peut se démontrer comme il suit. Puisque (VII. 11°), $\cos.C = \frac{\cos.AB - \cos.BC \cos.AC}{\sin.BC \sin.AC}$; il est clair que C sera de la même espece que AB , toutes les fois qu'on aura $\cos.AB > \cos.BC \cos.AC$. Or cela a lieu toutes les fois qu'on a $AC = AB$, ou $AC = 180^\circ - AB$, ou que la valeur de AC est entre celles de AB et de $180^\circ - AB$: car dans tous ces cas $\cos.AB$ égale ou surpasse $\cos.AC$, et l'on a alors $\cos.AB > \cos.BC \cos.AC$.

Je regrette de ne pouvoir insérer ici la démonstration synthétique de M. l'Abbé de Lambre , laquelle exigeroit une figure particuliere. De cette démonstration il suit 1°. que sa regle embrasse tous les cas dans lesquels on peut faire évanouir l'incertitude ; 2°. que la regle que j'ai donnée comprend de même tous ces cas.

Même article , ligne dernière ; des *lisez* de ces

Art. 492 , lig. 6. M. l'Abbé de Lambre substitue encore ici la

regle suivante, laquelle est utile sur-tout dans les problèmes (493, 494).

Un côté est de la même espèce que l'angle opposé, toutes les fois que l'un des angles adjacents a une valeur ou intermédiaire entre la valeur de l'angle opposé et la valeur du supplément de l'angle opposé, ou égale à l'une de ces deux valeurs.

Il est facile de déduire cette regle et sa démonstration de l'équation (VII. 29°), de la même manière que nous l'avons fait tout-à-l'heure pour la regle relative à l'art. 488.

Même art., lig. dernière; des *lisez* de ces

Pag. 279, lig. 6; (489 à 494) *lisez* (489, 494)

Pag. 286, lig. 2; *supprimez la seconde virgule*

lig. 6; On a donc *lisez* Or on a

Pag. 298, lig. 2; adjacent AB *lisez* AB adjacent à l'angle donné

Art. 536, lig. 5; dixiemes *lisez* décimales

Pag. 308, lig. 1; au triangle *lisez* aux parties du triangle

Art. 632, lig. 2; — ΔBC — ΔA *lisez* — ΔBC : — ΔA

Art. 709, lig. 5; correspond *lisez* correspondant d'ailleurs
lig. 6 et 7; angle : de sorte que si *lisez* angle, si

Pag. 355, lig. 10; ΔB *lisez* B

Art. 762, lig. 3; (757 *lisez* (757)

Art. 771. Les deux équations de cet article donnent la valeur de $z \propto u$ en parties de $R = 1$, telles que dans la table (AA).

Si on veut la valeur de $z \propto u$ en secondes, on multipliera par R'' chacun des coefficients de $\sin.u$, $\sin.2u$, &c., et de $\sin.z$, $\sin.2z$, &c.

Pag. 396, lig. 14. M. l'Abbé de Lambre m'a fait observer que pour les étoiles circompolaires, comme la valeur de tang. *décl.* change rapidement et très inégalement, l'emploi de la déclinaison intermédiaire ne suffit pas pour donner très exactement la valeur de la précession en ascension droite, quand il s'agit d'un intervalle de plusieurs années. On pourroit y remédier en partageant l'intervalle en des intervalles moindres, et multipliant

les calculs. Mais au surplus je propose la formule suivante, qui est rigoureuse, et que je déduis de la première analogie (638) en changeant les lettres et en substituant les dénominations qu'elles désignent, ainsi que je l'ai fait (784).

$$\sin. \text{préc. ascension droite} = 2 \sin. \frac{1}{2} \text{précession longitude} \times \frac{\cos. (\text{asc. dr.} + \text{préc. asc. dr.})}{\cos. (\text{long.} + \text{préc. long.})} \times$$

$$(\cos. \text{obl.} \cos. \text{long.} + \frac{1}{2} \text{préc. long.} \cos. \text{asc. dr.} + \sin. \text{long.} + \frac{1}{2} \text{préc. long.} \sin. \text{asc. dr.})$$

Au lieu de $\frac{\cos. (\text{asc. dr.} + \text{préc. asc. dr.})}{\cos. (\text{long.} + \text{préc. long.})}$, on peut substituer, si on le préfère, $\frac{\cos. \text{lat.}}{\cos. (\text{décl.} + \text{préc. décl.})}$.

Art. 788, à la fin, ajoutez : On peut employer au même usage une table de réduction de l'écliptique à l'équateur, telle que la table XVIII de M. de la Lande (*Astronomie*, Tom. I), pourvu qu'on prenne pour argument l'ascension droite de l'étoile, augmentée de 90°.

Art. 800, lig. 1; explications ajoutez (796)

Art. 806. M. l'Abbé de Lambre a composé douze formules nouvelles pour trouver la distance vraie entre deux astres, dont on aura observé la distance apparente. Je choisis une de ces formules, laquelle peut se déduire de celle de M. le Chevalier de Borda, et qui peut être préférée comme plus expéditive pour le calcul, quoiqu'elle exige la recherche de deux cosinus dans les tables trigonométriques en nombres naturels.

Soit D la distance apparente de deux astres, x leur distance vraie, A la hauteur apparente de l'un, a sa hauteur vraie, B la hauteur apparente de l'autre, b sa hauteur vraie. La formule de M. le Chevalier de Borda est celle-ci :

$$\sin. \frac{1}{2} x = \sqrt{\left(\cos. \frac{1}{2} a + b - \frac{\cos. \frac{1}{2} (A+B+D) \cos. \frac{1}{2} (A+B-D) \cos. a \cos. b}{\cos. A \cos. B} \right)},$$

et cette formule se calcule par les seules tables trigonométriques en logarithmes, en suivant la méthode (208).

Or si l'on exprime cette formule comme il suit : $\sin. \frac{1}{2} x =$

$\cos. \frac{1}{2}(a + b) = m$; on aura (I. 7^e, 24^e), $\frac{1 - \cos. x}{2} = \frac{1 + \cos.(a + b)}{2} = \frac{2m}{2}$, puis réduisant et transposant, $\cos. x = 2m - \cos.(a + b)$. Restituons dans cette équation la valeur de m , et nous aurons la formule de M. l'Abbé de Lambre :

$$\cos. x = \frac{2 \cos. \frac{1}{2}(A + B + D) \cos. \frac{1}{2}(A + B - D) \cos. a \cos. b}{\cos. A \cos. B} - \cos.(a + b).$$

Art. 819, lig. 23; lal une lisez la lune

Pag. 450, lig. 7; tang. $\frac{1}{2}(PCE + \frac{1}{2}\delta PCE)$ lisez tang. $(PCE + \frac{1}{2}\delta PCE)$

Art. 859, à la fin, ajoutez : On voit qu'en général dans la projection stéréographique de la sphere, tout grand cercle a pour rayon de projection la sécante de son inclinaison sur le plan de projection.

Art. 863; M. l'Abbé de Lambre a observé qu'on peut se dispenser de décrire les méridiens et le parallèle dont je fais usage dans ma construction. Les points F, G étant à égale distance des pôles, il suffit de trouver cette distance; ces deux points connus et le rayon, on aura le centre du cercle à décrire. Or le triangle PMH, rectangle en H (859), donne (VI. 10^e), $\cot. PM = \cos. P \cot. PH = \cos. long. \cot. lat.$, et PM est précisément la distance cherchée.

Pag. 407, lig. 4. $2RE \cdot re$, mettez $2RE \times re$.

Table I, formule 42^e; $\sqrt{\frac{1 + \cos. 2A}{1 - \cos. 2A}}$ lisez $\sqrt{\frac{1 - \cos. 2A}{1 + \cos. 2A}}$.

Table IX, 8. tang. ang. vertic. liz. tang. $\frac{1}{2}$ ang. vertic.



TABLE (AA).

Valeur des arcs de cercle en parties du rayon, en supposant le rayon égal à l'unité. Voyez (146).

1° = 0,017453	292519	943205	769236908	45° = 0,785398	163397	448309	615660846
2 0,034906	585039	886591	538473815	46 0,802851	455917	391605	384897754
3 0,052359	877559	829887	307710723	47 0,820304	748437	334901	154134661
4 0,069813	170079	773183	076947631	48 0,837758	040957	278196	923371569
5 0,087266	462599	716478	846184538	49 0,855211	333477	221492	692608477
6 0,104719	755119	659774	615421446	50 0,872664	625997	164788	461845384
7 0,122173	047639	603070	384658354	51 0,890117	918517	108084	231082292
8 0,139626	340159	546366	153895261	52 0,907571	211037	051380	000319200
9 0,157079	632679	489661	923132169	53 0,925024	503556	994675	769556107
10 0,174532	925199	432957	692369077	54 0,942477	796076	937971	538793015
11 0,191986	217719	376253	461605985	55 0,959931	088596	881267	308029923
12 0,209439	510239	319549	230842892	56 0,977384	381116	824563	077266830
13 0,226892	802759	262845	000079800	57 0,994837	673636	767858	846503738
14 0,244346	095279	206140	769316708	58 1,012290	966156	711154	615740646
15 0,261799	387799	149436	538553615	59 1,029744	258676	654450	384977553
16 0,279252	680319	092732	307790523	60 1,047197	551196	597746	154214461
17 0,296705	972839	036028	077027431	61 1,064650	843716	541041	923451369
18 0,314159	265358	979323	846264338	62 1,082104	136236	484337	692688276
19 0,331612	557878	922619	615501246	63 1,099557	428756	427633	461925184
20 0,349065	850398	865915	384738154	64 1,117010	721276	370929	231162092
21 0,366519	142918	809211	153975061	65 1,134464	013796	314225	000399000
22 0,383972	435438	752506	623211969	66 1,151917	306316	257520	769635907
23 0,401425	727958	695802	692448877	67 1,169370	598836	220816	538872815
24 0,418879	020478	639098	461685784	68 1,186823	891356	144112	308109723
25 0,436332	312998	582394	230922692	69 1,204277	183876	087408	077346630
26 0,453785	605518	525690	000150600	70 1,221730	476396	030703	846583538
27 0,471238	898038	468985	769396507	71 1,239183	768915	973999	615820446
28 0,488692	190558	412281	538633415	72 1,256637	061435	917295	385057353
29 0,506145	483078	355577	307870323	73 1,274090	353955	860591	154294261
30 0,523598	775598	298873	077107231	74 1,291543	646475	803886	923531169
31 0,541052	068118	242168	846344138	75 1,308996	938995	747182	692768076
32 0,558505	360638	185464	615581046	76 1,326450	231515	690478	462004984
33 0,575958	653158	128760	384817954	77 1,343903	524035	633774	231241892
34 0,593411	945678	072056	154054861	78 1,361356	816555	577070	000478799
35 0,610865	238198	015351	923291769	79 1,378810	109075	520365	769715707
36 0,628318	530717	958647	692528677	80 1,396263	401595	463661	538952615
37 0,645771	823237	901943	461765584	81 1,413716	694115	406957	308189522
38 0,663225	115757	845239	231002492	82 1,431169	986635	350253	077426430
39 0,680678	408277	788535	000239400	83 1,448623	279155	293548	846663338
40 0,698131	700797	731830	769476307	84 1,466076	571675	236844	615900246
41 0,715584	993317	675126	538713215	85 1,483529	864195	180140	385137153
42 0,733038	285837	618422	307950123	86 1,500983	156715	123436	154374061
43 0,750491	578357	561718	077187030	87 1,518436	449235	066731	923610969
44 0,767944	870877	505013	846423938	88 1,535889	741755	010027	692847876

89° =	1,553343	034274	953323	462084784	99° =	1,727875	959474	386281	154453861
90	1,570796	326794	896619	231321692	100	1,745329	251994	329576	923690769
91	1,588249	619314	839915	000558599	120	2,094395	102393	195492	308428922
92	1,605702	911834	783210	769795507	150	2,617993	877991	494365	385536153
93	1,623156	204354	726506	539032415	180	3,141592	665589	793238	462643383
94	1,640609	496874	669802	308269322	210	3,665191	429188	092111	539750614
95	1,658062	789394	613098	077506230	240	4,188790	204786	390984	616857844
96	1,675516	081914	556393	846743138	270	4,712388	980384	689857	693965075
97	1,692969	374434	499689	615980045	330	5,759586	531581	287603	848179536
98	1,710422	666954	442985	385216953	360	6,283185	307179	586476	925286767

1' =	0,000290	888208	665721	596153948	1" =	0,000004	848136	811095	359935899
2	0,000581	776417	331443	192307897	2	0,000009	696273	622190	719871798
3	0,000872	664625	997164	788461845	3	0,000014	544410	433286	079807697
4	0,001163	552834	662886	384615794	4	0,000019	392547	244381	439743597
5	0,001454	441043	328607	980769742	5	0,000024	240684	055476	799679496
6	0,001745	329251	994329	576923691	6	0,000029	088820	866572	159615395
7	0,002036	217460	660051	173077639	7	0,000033	936957	677667	519551294
8	0,002327	105669	325772	769231588	8	0,000038	785094	488762	879487193
9	0,002617	993877	991494	365385536	9	0,000043	633231	299858	239423092
10	0,002908	882086	657215	961539485	10	0,000048	481368	110953	599358991
20	0,005817	764173	314431	923078969	20	0,000096	962736	221907	198717983
30	0,008726	646259	971647	884618454	30	0,000145	444104	332860	798076974
40	0,011635	528346	628863	846157938	40	0,000193	925472	443814	397435966
50	0,014544	410433	286079	807697423	50	0,000242	406840	554767	996794957
60	0,017453	292519	943295	769236908	60	0,000290	888208	665721	596153948

*Additions à l'Errata des Tables de Logarithmes imprimées en
1 vol. in-12 par Desaint, 1768. Voy. (168).*

Comme les pages des Tables dont on donne ici l'Errata ne sont point numérotées, on y a suppléé, pour la Table des Logarithmes des sinus, tangentes, &c., en indiquant les degrés et minutes du sinus qui commence la page où se trouve la faute observée.

Les pages de la Table des Logarithmes des nombres sont de même désignées par le nombre qui les commence.

Errata de la Table des Logarithmes des sinus, tangentes, etc

1 ^{er} sinus de la page.	Colonne.	Fautes.	Corrections.
<i>Sin. 5°</i>	<i>30'</i>	<i>6</i>	<i>Tang. 4°</i>
9	0	4	9.299713
10	30	4	9.283907
		7	9.601971
11	30	4	9.326753
17	30	6	0.487765
20	30	5	0.642
			0.641
			<i>Tang. 84°</i>
			9.199713
			9.283907
			9.601971
			9.326853
			0.497765



Corrections pour les Tables de Caillet

Donner les $\log$ C les c. Mém. 1732. L. S. P. L. L. S. P. L. S. P. L. S. P.

page 114 L. 10... $1\frac{1}{2}$ c. L. $1\frac{1}{2}$ c. Log. 46. 4° cas de la suite des L. B. P.

Table des refractions. Ligne 11° 30'. Refr. suiv. Brailley. 11° 30'.

L'alt. des sols de 100 toises. L. 11° 30'. L. ~~4.772 59.42~~ 5.15° 23' 10". L. 4.764 8c.

Il est connu toutes ces fautes ; mais 3 de ces fautes dans la colonne de 1794. 3c 95
elles ont été corrigées en corrigées sur les copies des échantillons à l'échelle de 1790, par Jombert.

Vitesse nature 177. Log. 298 8c. Nomb. 369 70... Log... 0845.

Log 24. 94... 9781 après le n°. 1798, même 1797.

041101... 9461 Nom. 1798 L. 660499

76872 : Log... 7682.

Don. 14° 30' 30". 7682. 7682. 7682.

5

4

1 ^{er} sinus de la page.	Colonne.	Fautes.	Corrections.
sin. 23° 30'	2 ^{me}	9. 906179	9. 606179
29 30	2	9. 964342	9. 604342
30 0		IV. X. 20	IV. X. 0
30 30	6	Cotang. 10	Cotang. 30
31 30		VI. X. 1.	IV. X. 1
33 0	3, 4 ^e case.	0. 323	0. 322
33 30		VI. X. 26	IV. X. 26
39 0	7	sin. 51	sin. 50
42 0	4	9. 954447	9. 954437
42 30		I. VII.	I. VII. 17

Ajoutez une unité au dernier chiffre des logarithmes de cos. 17° 13', de cot. 31° 27', de tang. 38° 28' et de tang. 38° 47'.

Errata de la Table des Logarithmes des nombres naturels.

1 ^{er} nombre de la page.	Colonne.	Fautes.	Corrections.
810	8 ^o	0. 14' 0"	0. 14' 30"
900	6	457	458
		454	455
990	3	435	436
	6	421	422
1530	3, 1 ^{re} case.	283	284
	2 ^e case.		283
1890	3	288	228
	5	3. 280035	3. 290035
2250	7	2339	2329
4320	2	0. 12' 0"	1. 12' 0"
4590	8	0. 17' 30"	1. 17' 30"
4770	1	4883	4783
5040	6	65	85
5400	7	5463	5473
5580	2	1. 33' 30"	1. 33' 0"
5670	7	5938	5738
6210	4	6279	6269
7110	1	7233	7133
8010	1	8012	8022
	8	9. 908431	3. 908431
8190	1	8211	8212
11070	2	5. 044696	4. 044696
	6	Log. diff. 30	Log. diff. 39
11880	3	11933	11913
11970	5	11052	12052
12240	5	11310	12310
14850	5	14239	14939
16830	6	4. 238323	4. 228323

Ajoutez une unité au dernier chiffre des Logarithmes des nombres 252, 450, 451, 531, 646, 13267, 15097, 15668.

Retranchez une unité du dernier chiffre des Logarithmes des nombres 1623, 2692, 6545, 17509, 19116.

Transportez les différences 343, 261, 221, 217, 183, 175 des Logarithmes des nombres à la case blanche qui suit celle où se trouve chacune de ces différences.

TABLE (BB).

Logarithmes des nombres premiers, depuis 2 jusqu'à 1283. Voy. (190).

Dans cette Table les caractéristiques des Logarithmes sont omises.

Nomb.	Logarithmes.				Nomb.	Logarithmes.			
2	30102	99956	63981	19521	197	29446	62261	61592	92737
3	47712	12547	19662	43730	199	29885	30764	09706	65010
5	69897	00043	36018	80479	211	32428	24552	97692	66508
7	84509	80400	14256	83071	223	34830	48630	48160	67348
11	04139	26851	58225	04075	227	35602	58571	03122	72010
13	11394	33523	06836	76921	229	35983	54823	39887	99413
17	23044	89213	78273	92854	233	36735	59210	26018	97219
19	27875	36009	52828	96154	239	37839	79009	48137	68500
23	36172	78360	17592	87887	241	38201	70425	74868	38408
29	46239	79978	98956	08733	251	39967	37214	81038	13934
31	49136	16938	34272	67967	257	40993	31233	31294	53716
37	56820	17240	66994	99681	263	41995	57484	89757	86897
41	61278	38567	19735	49451	269	42975	22800	02407	98009
43	63346	84555	79586	52641	271	43296	92908	74105	72952
47	67209	78579	35717	46441	277	44247	97690	64448	55378
53	72427	58696	00789	04563	281	44870	63199	05079	89286
59	77085	20116	42144	19026	283	45178	64355	24290	23556
61	78532	98350	10767	03389	293	46686	76203	54109	45624
67	82607	48027	00826	43415	307	48713	83754	77186	48475
71	85125	83487	19075	28609	311	49276	03890	26837	50555
73	86332	28601	20455	90107	313	49554	43375	46448	48481
79	89762	70912	90441	42799	317	50105	92622	17751	49455
83	91907	80923	76073	90383	331	51982	79937	75718	73861
89	94939	00066	44912	78472	337	52762	99008	71338	62619
97	98677	17342	66244	85178	347	54032	94747	90873	71854
101	00432	13737	82642	57428	349	54282	54269	69179	89634
103	01283	72247	05172	20517	353	54777	47033	87822	56950
107	02938	37776	85209	64083	359	55509	44485	78319	14782
109	03742	64979	40623	63520	367	56466	60642	52089	33799
113	05307	84434	83419	72280	373	57170	88318	08687	60031
127	10380	37209	55956	86425	379	57863	92099	68072	34193
131	11727	12956	55764	26081	383	58319	87739	68622	74038
137	13672	05671	56406	96856	389	58994	96013	25707	73624
139	14301	48002	54095	08046	397	59879	05067	63115	06388
149	17318	62684	12274	03826	401	60314	43726	20182	30654
151	17897	69472	93169	43687	409	61172	33080	07341	80361
157	19589	96524	09233	73676	419	62221	40229	66295	30985
163	21218	76044	03957	80764	421	62428	20958	35668	30744
167	22271	64711	47583	27998	431	63447	72701	60731	60075
173	23804	61031	28795	41456	433	63648	78963	53365	44270
179	25285	30309	79893	16957	439	64246	45202	42121	37063
181	25767	85748	69184	51029	443	64640	37262	25069	56020
191	28103	33672	47727	53764	449	65224	63410	03323	17492
193	28555	73090	07773	76060	457	65991	62000	69850	22235

Nomb.	Logarithmes.			
461	66370	09253	89648	14507
463	66358	09910	17953	13567
467	66931	68805	66112	16309
479	68033	55134	14563	22010
487	68752	89612	14634	33246
491	69108	14921	22968	47275
499	69810	05456	23389	91417
503	70156	79850	55927	39710
509	70671	77823	36758	74657
521	71683	77232	99244	47424
523	71850	16888	67274	23926
541	73319	72631	06509	43688
547	73798	73263	33430	77381
557	74285	51951	73728	90044
563	75050	83948	51346	22909
569	75511	22663	95071	17229
571	75663	61082	45848	05004
577	76117	58131	55731	42849
587	76863	81012	47614	47606
593	77305	46933	64262	60640
599	77742	68223	89311	37983
601	77887	44720	02739	52089
607	78318	86910	75257	58096
613	78746	04745	18415	03774
617	79028	51640	33241	68205
619	79169	06490	20117	97680
631	80002	93592	44134	31302
641	80685	80295	18817	42225
643	80821	09729	24222	07249
647	81090	42806	68700	38446
653	81491	31812	75073	92143
659	81888	54145	94009	86128
661	82020	14594	85640	23665
673	82801	52642	23976	84648
677	83058	86986	85144	31601
683	83442	07036	81532	56140
691	83947	80473	74198	40758
701	84371	80179	66658	61706
709	85064	62351	83066	54285
719	85672	88903	82882	60777
727	86153	44108	59037	83621
733	86510	39746	41127	91317
739	86864	41183	94825	73669
743	87298	88137	60375	29242
751	87563	99370	04168	38975
757	87920	52775	00072	77709
761	88258	41667	70572	82637
769	88592	65598	01431	05960

Nomb.	Logarithmes.			
773	88817	94939	18324	90897
787	89597	47323	59064	55847
797	90145	83213	96112	34727
809	90794	85216	12272	30432
811	90902	08542	11156	03069
821	91434	31571	19440	77180
823	91539	98352	12269	83977
827	91750	55095	52546	67071
829	91855	45305	50273	55312
839	92376	19608	28700	27500
853	93094	90311	67523	03000
857	93298	08219	23198	16429
859	93399	31638	31242	30263
863	93601	07957	15299	59266
877	94299	95933	66040	51823
881	94497	59084	12047	91274
883	94596	07035	77568	58562
887	94792	36198	31726	39220
907	95760	72870	60095	25585
911	95951	83769	72998	24763
919	96331	55113	86111	26520
929	96801	57139	93641	76318
937	97173	95908	87778	26303
941	97308	96234	27256	90834
947	97634	99790	03273	41875
953	97909	29006	38326	40853
967	98512	64740	83001	67360
971	98721	92299	08004	86280
977	98989	45637	18773	07091
983	99255	35178	32135	62275
991	99607	36344	85775	32836
997	99869	51583	11605	71988
1009	00389	11662	36910	52172
1013	00560	94453	62282	42845
1019	00817	41810	06126	39490
1021	00902	57420	86910	24725
1031	01325	86652	83516	54691
1033	01410	03215	19620	57904
1039	01661	55475	57177	41240
1049	02077	54881	93557	85991
1051	02160	27160	28242	22008
1061	02371	33839	01342	66612
1063	02653	32615	23296	75697
1069	02897	77052	08778	01749
1087	03622	95440	86294	53993
1091	03782	47005	88341	87761
1093	03862	01619	49702	79227
1097	04020	66279	74711	13222

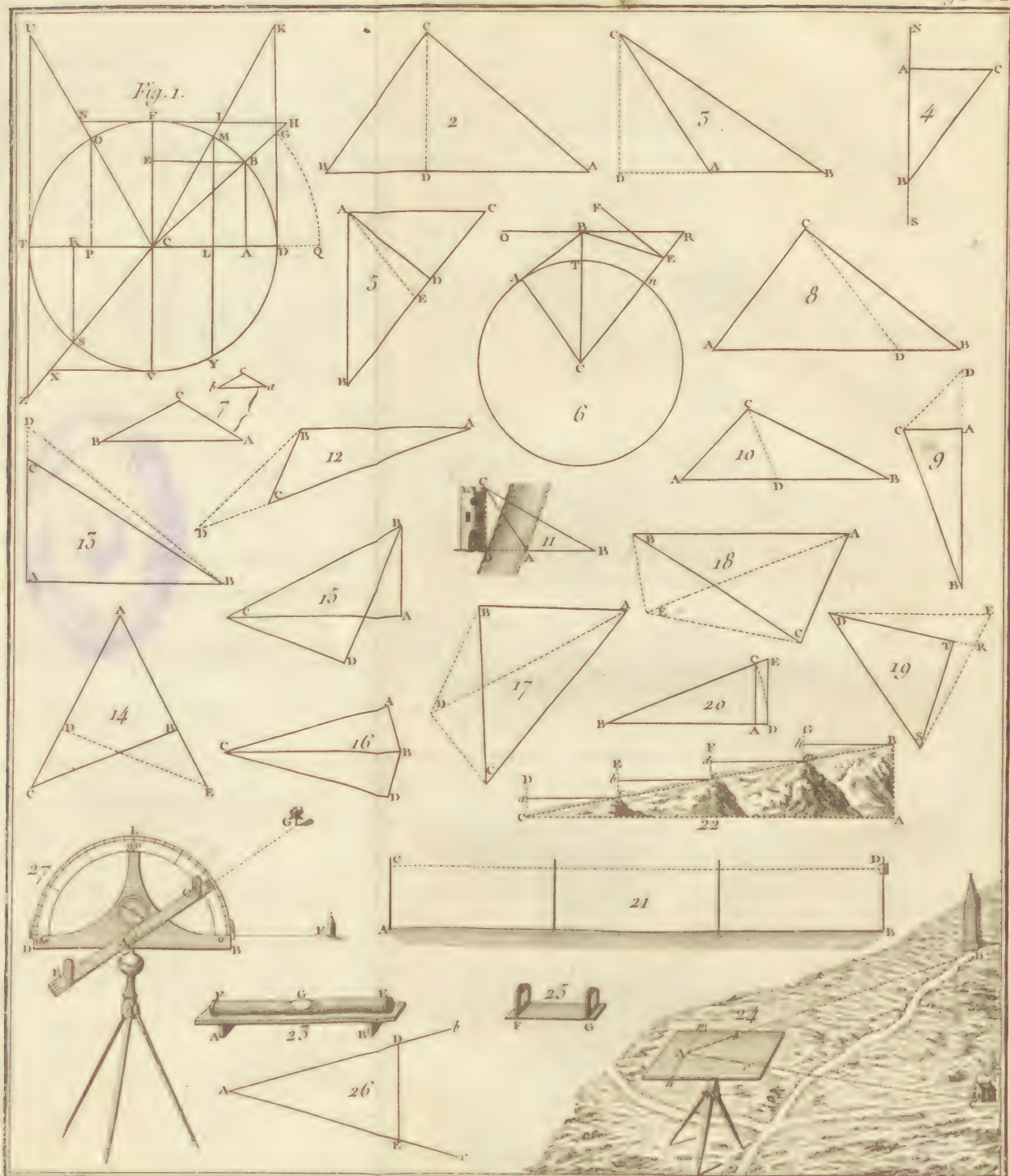
Nomb.	Logarithmes.				Nomb.	Logarithmes.			
1103	04257	55124	40190	59866	1201	07954	30074	02906	04893
1109	04493	15461	49160	06471	1213	08386	08008	66572	97420
1117	04805	31731	15609	05702	1217	08529	05782	30064	98886
1123	05037	97562	61457	78469	1223	08742	64570	36285	46333
1129	05269	39419	24967	86114	1229	08955	18828	86454	08564
1151	06107	53236	29791	80185	1231	09025	80529	31316	30782
1153	06182	93072	94699	02164	1237	09236	96996	29120	65363
1163	06557	97147	28448	41138	1249	09656	24383	74135	51203
1171	06855	68950	72363	12991	1259	10002	57301	07862	59756
1181	07224	98976	13514	79908	1277	10619	08972	63415	28661
1187	07445	07189	54591	22046	1279	10687	05444	78653	92264
1193	07664	04436	70341	87278	1283	10822	66563	74928	50365

Facteurs des nombres composés qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5.

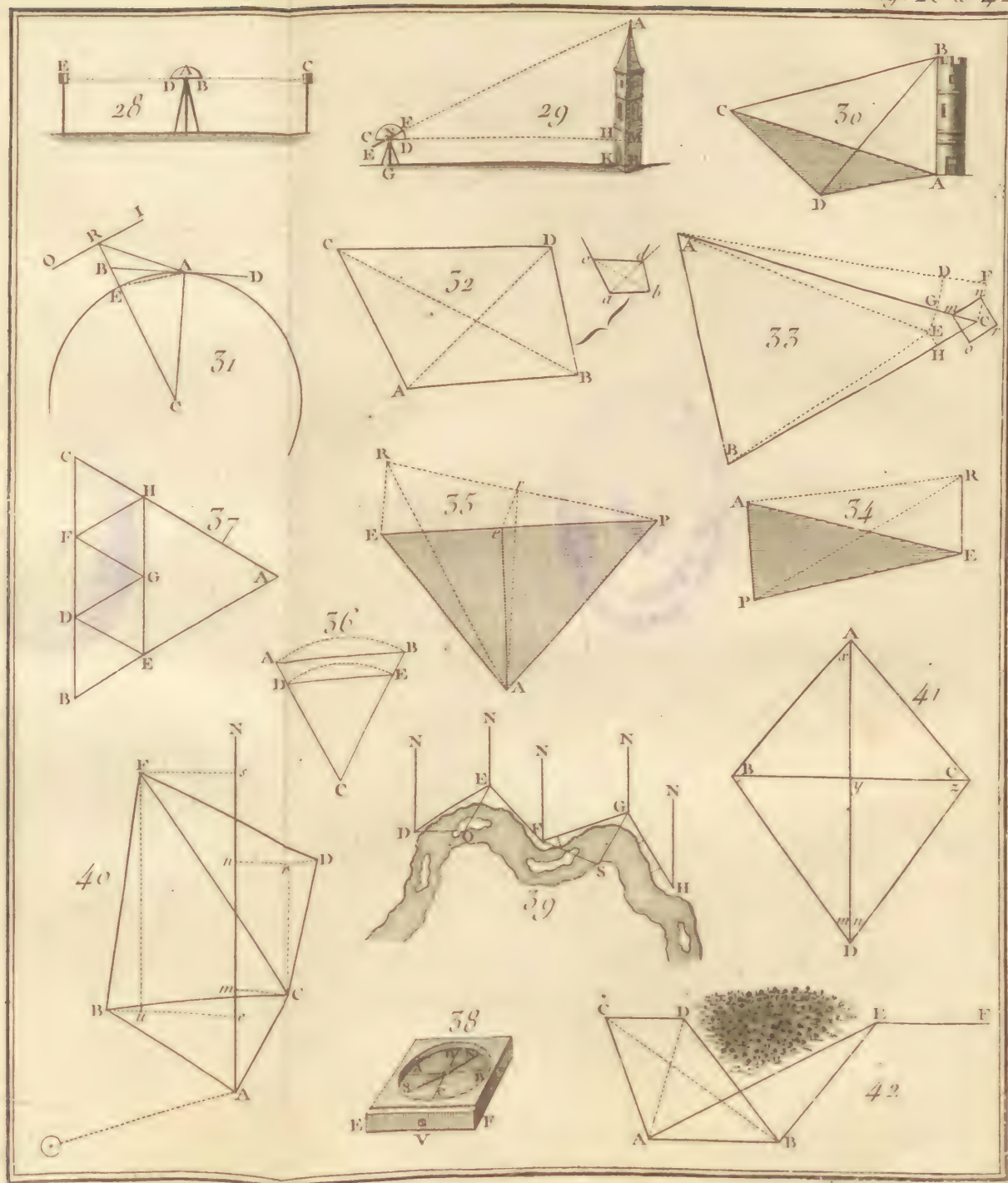
Nomb.	Facteurs.	Nomb.	Facteurs.	Nomb.	Facteurs.	Nomb.	Facteurs.	Nomb.	Facteurs.
49	= 7 . 7	377	= 13 . 29	637	= 7 . 7 . 13	871	= 13 . 67	1111	= 11 . 101
77	= 7 . 11	391	= 17 . 23	649	= 11 . 59	889	= 7 . 127	1121	= 19 . 59
91	= 7 . 13	403	= 13 . 31	667	= 23 . 29	893	= 19 . 47	1127	= 7 . 7 . 23
119	= 7 . 17	407	= 11 . 37	671	= 11 . 61	899	= 29 . 31	1133	= 11 . 103
121	= 11 . 11	413	= 7 . 59	679	= 7 . 97	901	= 17 . 53	1139	= 17 . 67
133	= 7 . 19	427	= 7 . 61	689	= 13 . 53	913	= 11 . 83	1141	= 7 . 163
143	= 11 . 13	437	= 19 . 23	697	= 17 . 41	917	= 7 . 131	1147	= 31 . 37
161	= 7 . 23	451	= 11 . 41	703	= 19 . 37	923	= 13 . 71	1157	= 13 . 89
169	= 13 . 13	469	= 7 . 67	707	= 7 . 101	931	= 7 . 7 . 19	1159	= 19 . 61
187	= 11 . 17	473	= 11 . 43	713	= 23 . 31	943	= 23 . 41	1169	= 7 . 167
203	= 7 . 29	481	= 13 . 37	721	= 7 . 103	949	= 13 . 73	1177	= 11 . 107
209	= 11 . 19	493	= 17 . 29	731	= 17 . 43	959	= 7 . 137	1183	= 7 . 13 . 13
217	= 7 . 31	497	= 7 . 71	737	= 11 . 67	961	= 31 . 31	1189	= 29 . 41
221	= 13 . 17	511	= 7 . 73	749	= 7 . 107	973	= 7 . 139	1199	= 11 . 109
247	= 13 . 19	517	= 11 . 47	763	= 7 . 109	979	= 11 . 89	1207	= 17 . 71
253	= 11 . 23	527	= 17 . 31	767	= 13 . 59	989	= 23 . 43	1211	= 7 . 173
259	= 7 . 37	529	= 23 . 23	779	= 19 . 41	1001	= 7 . 11 . 13	1219	= 23 . 53
287	= 7 . 41	533	= 13 . 41	781	= 11 . 71	1003	= 17 . 59	1241	= 17 . 73
289	= 17 . 17	539	= 7 . 7 . 11	791	= 7 . 113	1007	= 19 . 53	1243	= 11 . 113
299	= 13 . 23	551	= 19 . 29	793	= 13 . 61	1027	= 13 . 79	1247	= 29 . 43
301	= 7 . 43	553	= 7 . 79	799	= 17 . 47	1037	= 17 . 61	1253	= 7 . 179
319	= 11 . 29	559	= 13 . 43	803	= 11 . 73	1043	= 7 . 149	1261	= 13 . 97
323	= 17 . 19	581	= 7 . 83	817	= 19 . 43	1057	= 7 . 151	1267	= 7 . 181
329	= 7 . 47	583	= 11 . 53	833	= 7 . 7 . 17	1067	= 11 . 97	1271	= 31 . 41
341	= 11 . 31	589	= 19 . 31	841	= 29 . 29	1073	= 29 . 37	1273	= 19 . 67
343	= 7 . 7 . 7	611	= 13 . 47	847	= 7 . 11 . 11	1079	= 13 . 83		
361	= 19 . 19	623	= 7 . 89	851	= 23 . 37	1081	= 23 . 47		
371	= 7 . 53	629	= 17 . 37	869	= 11 . 79	1099	= 7 . 157		

F I N.

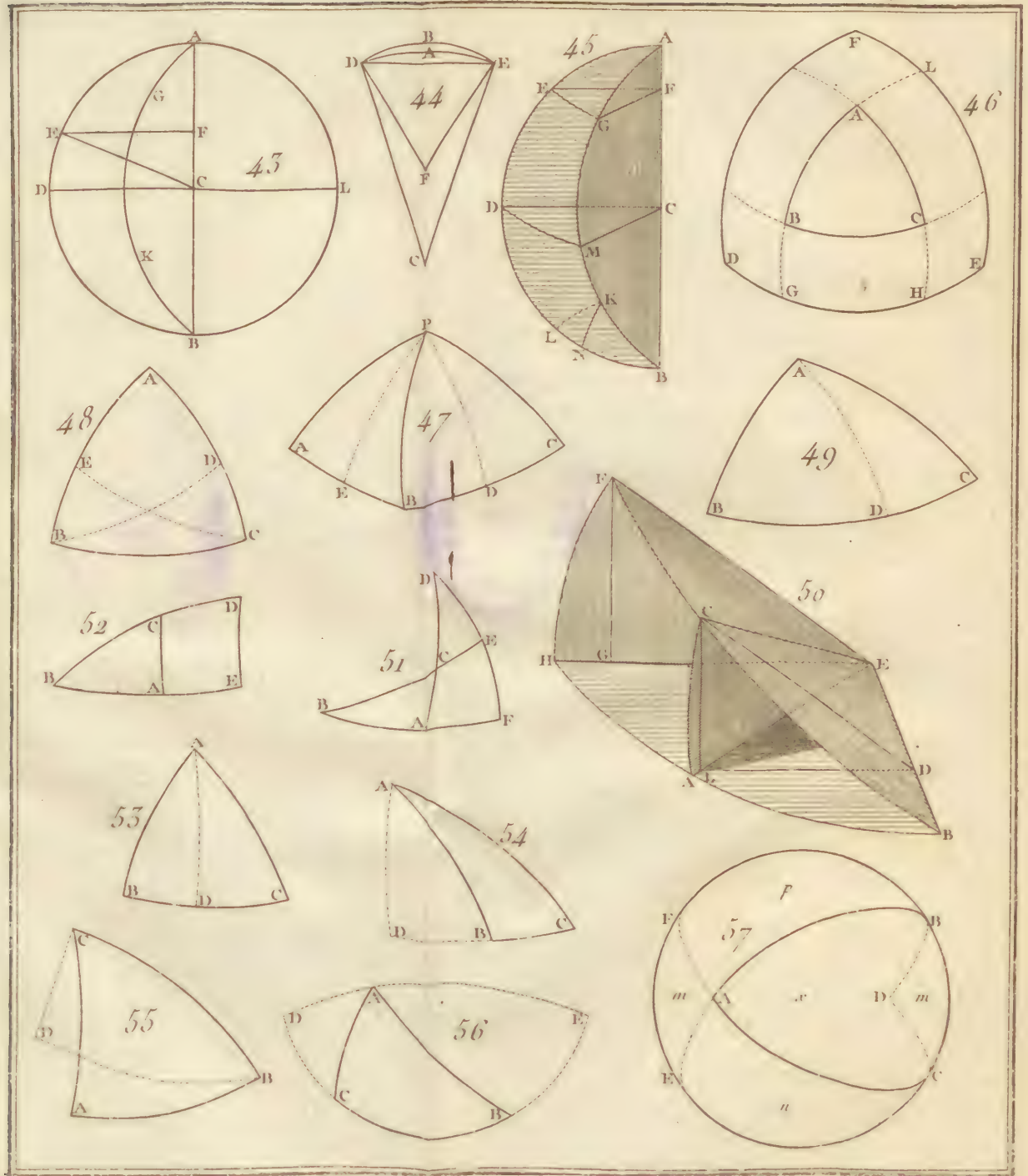




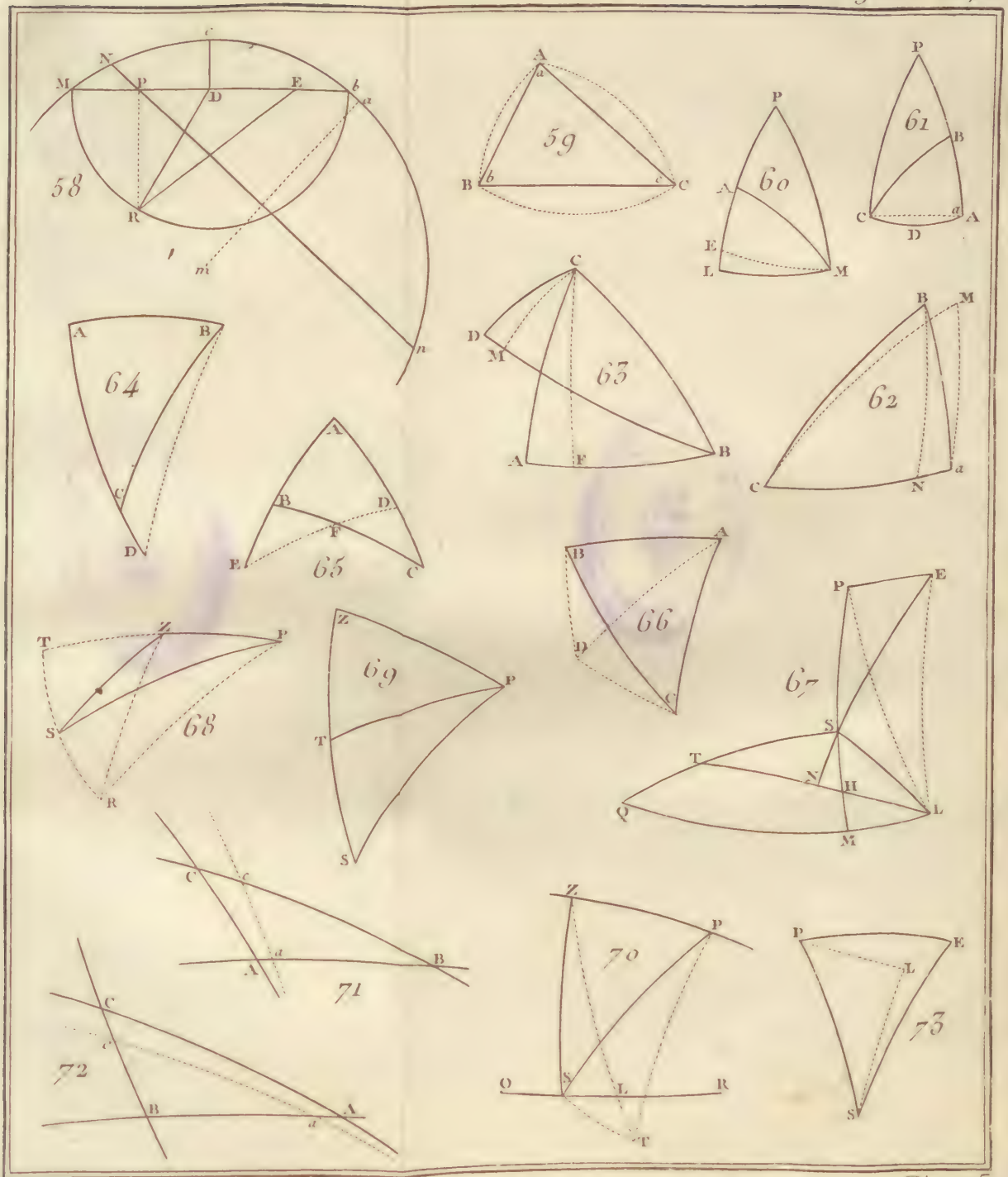




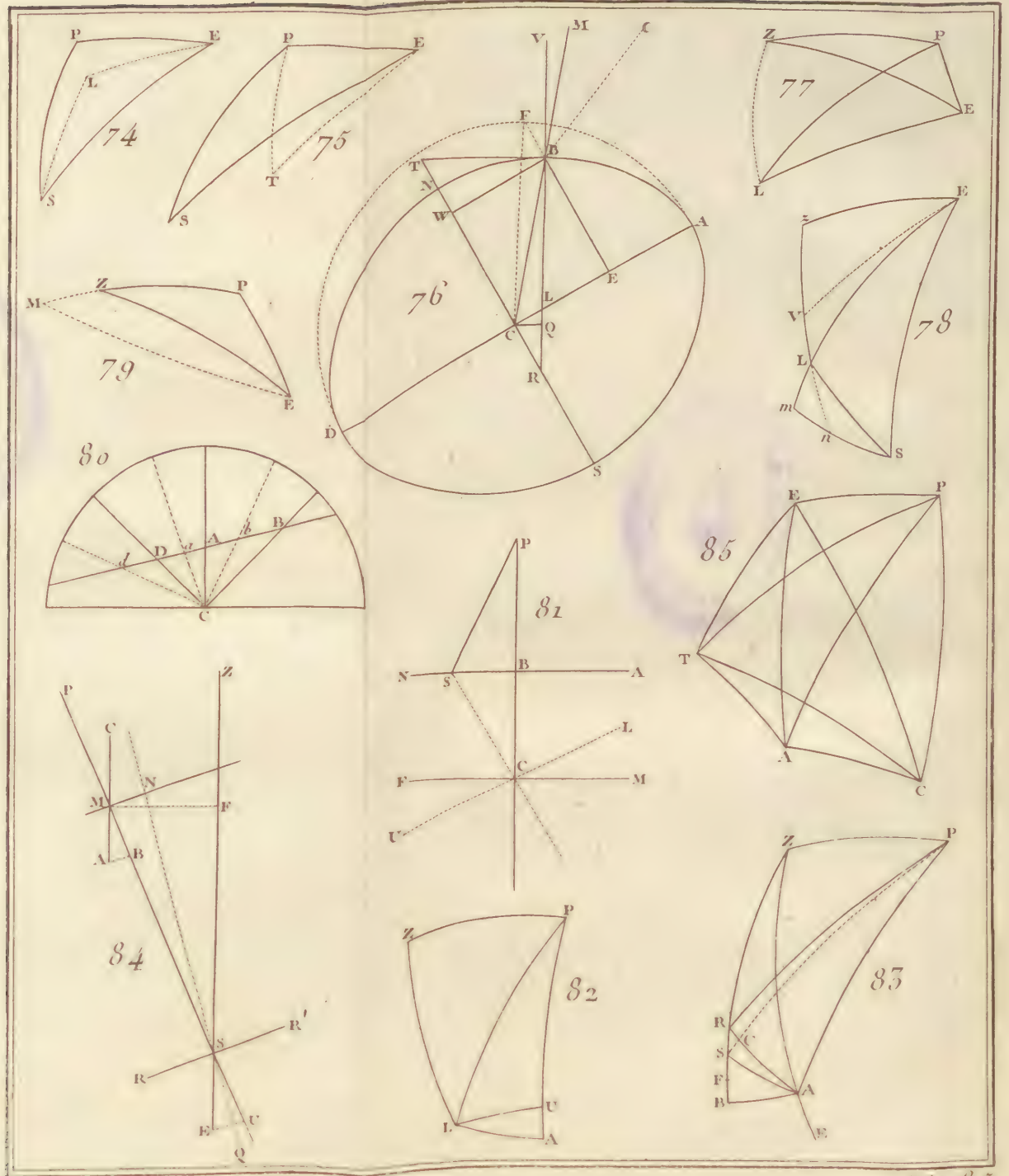




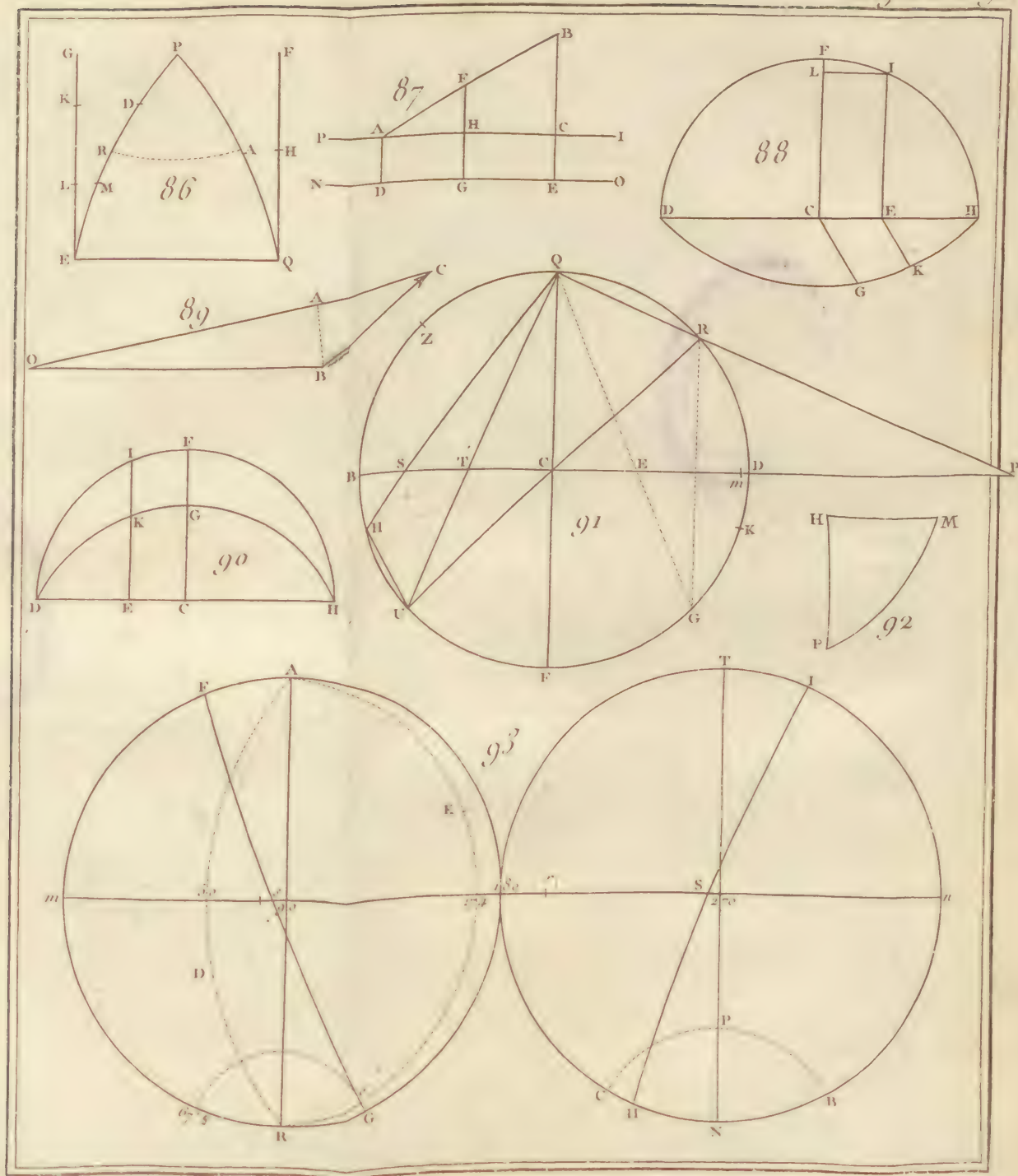














VALEURS ANALYTIQUES LES PLUS UTILES DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES. *Voyez l'Explication* (128).

<i>Valeurs de sin.A.</i>	<i>Valeurs de cos.A.</i>	<i>Valeurs de tang.A.</i>
1° FORMULE... $\cos.A \tan g.A$, (21).	16° $\frac{\sin.A}{\tan g.A}$, (21).	31° $\frac{\sin.A}{\cos.A}$, (21).
2° $\frac{\cos.A}{\cot.A}$, (22).	17° $\sin.A \cot.A$, (22).	32° $\frac{1}{\cot.A}$, (22).
3° $\sqrt{1 - \cos.^2 A}$, (28).	18° $\sqrt{1 - \sin.^2 A}$, (28).	33° $\sqrt{\left(\frac{1}{\cos.^2 A} - 1\right)}$, (29).
4° $\frac{1}{\sqrt{1 + \cot.^2 A}}$, (30).	19° $\frac{1}{\sqrt{1 + \tan g.^2 A}}$, (29).	34° $\frac{\sin.A}{\sqrt{1 - \sin.^2 A}}$, (32).
5° $\frac{\tan g.A}{\sqrt{1 + \tan g.^2 A}}$, (31).	20° $\frac{\cot.A}{\sqrt{1 + \cot.^2 A}}$, (31).	35° $\frac{\sqrt{1 - \cos.^2 A}}{\cos.A}$, (32).
6° $2 \sin. \frac{1}{2} A \cos. \frac{1}{2} A$, (63).	21° $\cos.^2 \frac{1}{2} A - \sin.^2 \frac{1}{2} A$, (64).	36° $\frac{2 \tan g. \frac{1}{2} A}{1 - \tan g.^2 \frac{1}{2} A}$, (65).
7° $\sqrt{\frac{1 - \cos. 2 A}{2}}$, (67).	22° $1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} A$, (66).	37° $\frac{2 \cot. \frac{1}{2} A}{\cot.^2 \frac{1}{2} A - 1}$, (65).
8° $\frac{2 \tan g. \frac{1}{2} A}{1 + \tan g.^2 \frac{1}{2} A}$, (73).	23° $2 \cos.^2 \frac{1}{2} A - 1$, (66).	38° $\frac{2}{\cot. \frac{1}{2} A - \tan g. \frac{1}{2} A}$, (68).
9° $\frac{2}{\cot. \frac{1}{2} A + \tan g. \frac{1}{2} A}$, (76).	24° $\sqrt{\frac{1 + \cos. 2 A}{2}}$, (66).	39° $\cot.A - 2 \cot. 2 A$, (69).
10° $\frac{1}{\cot.A + \tan g. \frac{1}{2} A}$, (78).	25° $\frac{1 - \tan g.^2 \frac{1}{2} A}{1 + \tan g.^2 \frac{1}{2} A}$, (74).	40° $\frac{1 - \cos. 2 A}{\sin. 2 A}$, (70).
11° $2 \sin.^2(45^\circ + \frac{1}{2} A) - 1$, (104).	26° $\frac{\cot. \frac{1}{2} A - \tan g. \frac{1}{2} A}{\cot. \frac{1}{2} A + \tan g. \frac{1}{2} A}$, (75).	41° $\frac{\sin. 2 A}{1 + \cos. 2 A}$, (71).
12° $1 - 2 \sin.^2(45^\circ - \frac{1}{2} A)$, (105).	27° $\frac{1}{1 + \tan g.A \tan g. \frac{1}{2} A}$, (79).	42° $\sqrt{\frac{1 - \cos. 2 A}{1 + \cos. 2 A}}$, (72).
13° $\frac{1 - \tan g.^2(45^\circ - \frac{1}{2} A)}{1 + \tan g.^2(45^\circ - \frac{1}{2} A)}$, (107).	28° $\frac{2}{\tan g.(45^\circ + \frac{1}{2} A) + \cot.(45^\circ + \frac{1}{2} A)}$, (109).	43° $\frac{\tan g.(45^\circ + \frac{1}{2} A) - \tan g.(45^\circ - \frac{1}{2} A)}{2}$, (103).
14° $\frac{\tan g.(45^\circ + \frac{1}{2} A) - \tan g. 45^\circ - \frac{1}{2} A}{\tan g.(45^\circ + \frac{1}{2} A) + \tan g. 45^\circ - \frac{1}{2} A}$, (108).	29° $2 \cos.(45^\circ + \frac{1}{2} A) \cos.(45^\circ - \frac{1}{2} A)$, (122).	
15° $\sin.(60^\circ + A) - \sin.(60^\circ - A)$, (110).	30° $\cos.(60^\circ + A) + \cos.(60^\circ - A)$, (111).	



FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES RELATIVES À DEUX ARCS. *Voyez l'Explication* (128).

1° $\sin.(A+B) = \sin.A \cos.B + \cos.A \sin.B, (51).$

2° $\sin.(A-B) = \sin.A \cos.B - \cos.A \sin.B, (52).$

3° $\cos.(A+B) = \cos.A \cos.B - \sin.A \sin.B, (53).$

4° $\cos.(A \smile B) = \cos.A \cos.B + \sin.A \sin.B, (54).$

5° $\text{tang.}(A+B) = \frac{\text{tang.}A + \text{tang.}B}{1 - \text{tang.}A \text{ tang.}B}, (56).$

6° $\text{tang.}(A-B) = \frac{\text{tang.}A - \text{tang.}B}{1 + \text{tang.}A \text{ tang.}B}, (57).$

7° $\left\{ \begin{array}{l} \sin.(45^\circ \pm B) = \\ \cos.(45^\circ \mp B) = \end{array} \right\} \frac{\cos.B \pm \sin.B}{\sqrt{2}}, (99), (100).$

8° $\text{tang.}(45^\circ \pm B) = \frac{1 \pm \text{tang.}B}{1 \mp \text{tang.}B}, (102).$

9° $\text{tang.}^2(45^\circ \pm \frac{1}{2}B) = \frac{1 \pm \sin.B}{1 \mp \sin.B}, (106).$

10° $\frac{\sin.(A+B)}{\sin.(A-B)} = \frac{\text{tang.}A + \text{tang.}B}{\text{tang.}A - \text{tang.}B} = \frac{\cot.B + \cot.A}{\cot.B - \cot.A}, (58).$

11° $\frac{\cos.(A+B)}{\cos.(A \smile B)} = \frac{\cot.B - \text{tang.}A}{\cot.B + \text{tang.}A} = \frac{\cot.A - \text{tang.}B}{\cot.A + \text{tang.}B}, (59).$

12° $\frac{\sin.A + \sin.B}{\sin.A - \sin.B} = \frac{\text{tang.} \frac{1}{2}(A+B)}{\text{tang.} \frac{1}{2}(A-B)}, (86).$

13° $\frac{\cos.B + \cos.A}{\cos.B - \cos.A} = \frac{\cot. \frac{1}{2}(A+B)}{\cot. \frac{1}{2}(A-B)}, (87).$

14° $\sin.A \cos.B = \frac{1}{2} \sin.(A+B) + \frac{1}{2} \sin.(A-B), (95).$

15° $\cos.A \sin.B = \frac{1}{2} \sin.(A+B) - \frac{1}{2} \sin.(A-B), (96).$

16° $\sin.A \sin.B = \frac{1}{2} \cos.(A \smile B) - \frac{1}{2} \cos.(A+B), (98).$

17° $\cos.A \cos.B = \frac{1}{2} \cos.(A+B) + \frac{1}{2} \cos.(A \smile B), (97).$

18° $\sin.A + \sin.B = 2 \sin. \frac{1}{2}(A+B) \cos. \frac{1}{2}(A \smile B), (80).$

19° $\cos.A + \cos.B = 2 \cos. \frac{1}{2}(A+B) \cos. \frac{1}{2}(A \smile B), (83).$

20° $\text{tang.}A + \text{tang.}B = \frac{\sin.(A+B)}{\cos.A \cos.B}, (89).$

21° $\cot.A + \cot.B = \frac{\sin.(A+B)}{\sin.A \sin.B}, (90).$

22° $\sin.A - \sin.B = 2 \sin. \frac{1}{2}(A-B) \cos. \frac{1}{2}(A+B), (81).$

23° $\cos.B - \cos.A = 2 \sin. \frac{1}{2}(A-B) \sin. \frac{1}{2}(A+B), (85).$

24° $\text{tang.}A - \text{tang.}B = \frac{\sin.(A-B)}{\cos.A \cos.B}, (91).$

25° $\cot.B - \cot.A = \frac{\sin.(A-B)}{\sin.A \sin.B}, (92).$

26° $\left\{ \begin{array}{l} \sin.^2A - \sin.^2B = \\ \cos.^2B - \cos.^2A = \end{array} \right\} \sin.(A-B) \sin.(A+B), (84).$

27° $\cos.^2A - \sin.^2B = \cos.(A \smile B) \cos.(A+B), (82).$

28° $\text{tang.}^2A - \text{tang.}^2B = \frac{\sin.(A-B) \sin.(A+B)}{\cos.^2A \cos.^2B}, (93).$

29° $\cot.^2B - \cot.^2A = \frac{\sin.(A-B) \sin.(A+B)}{\sin.^2A \sin.^2B}, (94).$

DIFFÉRENTIELLES FINIES DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES.

Voyez l'Observation (143, à la fin).

30° $\partial \sin.B = 2 \sin. \frac{1}{2} \partial B \cos.(B + \frac{1}{2} \partial B), (139).$

31° $-\partial \cos.B = 2 \sin. \frac{1}{2} \partial B \sin.(B + \frac{1}{2} \partial B), (139).$

32° $\partial \text{tang.}B = \frac{\sin. \partial B}{\cos.B \cos.(B + \partial B)}, (139).$

33° $-\partial \cot.B = \frac{\sin. \partial B}{\sin.B \sin.(B + \partial B)}, (139).$

34° $\left\{ \begin{array}{l} \partial(\sin.^2B) = \\ -\partial(\cos.^2B) = \end{array} \right\} \sin. \partial B \sin.(2B + \partial B), (142).$

35° $\partial(\text{tang.}^2B) = \frac{\sin. \partial B \sin.(2B + \partial B)}{\cos.^2B \cos.^2(B + \partial B)}, (142).$

36° $-\partial(\cot.^2B) = \frac{\sin. \partial B \sin.(2B + \partial B)}{\sin.^2B \sin.^2(B + \partial B)}, (142).$

Différentielles infiniment petites dans la forme ordinaire.

37° $\partial \sin.B = \partial B \cos.B, (140).$

38° $-\partial \cos.B = \partial B \sin.B, (140).$

39° $\partial \text{tang.}B = \frac{\partial B}{\cos.^2B}, (140).$

40° $-\partial \cot.B = \frac{\partial B}{\sin.^2B}, (140).$

41° $\left\{ \begin{array}{l} \partial(\sin.^2B) = \\ -\partial(\cos.^2B) = \end{array} \right\} 2 \partial B \sin.B \cos.B, (143).$

42° $\partial(\text{tang.}^2B) = \frac{2 \partial B \text{ tang.}B}{\cos.^2B}, (143).$

43° $-\partial(\cot.^2B) = \frac{2 \partial B \cot.B}{\sin.^2B}, (143).$

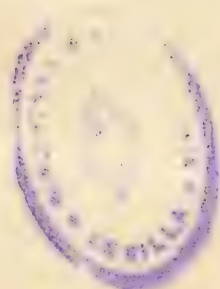


FORMULES analytiques pour résoudre dans tous les cas un triangle rectiligne ABC, dont trois parties sont données:

Voyez l'explication et la démonstration (235).

Valeurs de AB	Valeurs de AC	Valeurs de BC
1° FORMULE $\frac{BC \sin. C}{\sin. A}$	10° $\frac{AB \sin. B}{\sin. C}$	19° $\frac{AC \sin. A}{\sin. B}$
2° $\frac{AC \sin. C}{\sin. B}$	11° $\frac{BC \sin. B}{\sin. A}$	20° $\frac{AB \sin. A}{\sin. C}$
3° $\frac{BC}{\cos. B + \sin. B \cot. C}$	12° $\frac{AB}{\cos. A + \sin. A \cot. B}$	21° $\frac{AC}{\cos. C + \sin. C \cot. A}$
4° $\frac{AC}{\cos. A + \sin. A \cot. C}$	13° $\frac{BC}{\cos. C + \sin. C \cot. B}$	22° $\frac{AB}{\cos. B + \sin. B \cot. A}$
5° $BC \cos. B + BC \sin. B \cot. A$	14° $AB \cos. A + AB \sin. A \cot. C$	23° $AC \cos. C + AC \sin. C \cot. B$
6° $AC \cos. A + AC \sin. A \cot. B$	15° $BC \cos. C + BC \sin. C \cot. A$	24° $AB \cos. B + AB \sin. B \cot. C$
7° $\sqrt{(BC^2 + AC^2 - 2BC \times AC \cos. C)}$	16° $\sqrt{(BC^2 + AB^2 - 2BC \times AB \cos. B)}$	25° $\sqrt{(AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos. A)}$
8° $BC \cos. B \pm \sqrt{(AC^2 - BC^2 \sin.^2 B)}$	17° $AB \cos. A \pm \sqrt{(BC^2 - AB^2 \sin.^2 A)}$	26° $AC \cos. C \pm \sqrt{(AB^2 - AC^2 \sin.^2 C)}$
9° $AC \cos. A \pm \sqrt{(BC^2 - AC^2 \sin.^2 A)}$	18° $BC \cos. C \pm \sqrt{(AB^2 - BC^2 \sin.^2 B)}$	27° $AB \cos. B \pm \sqrt{(AC^2 - AB^2 \sin.^2 B)}$
Valeurs de $\sin. A$	Valeurs de $\cos. A$	Valeurs de TANG. A
28° $\frac{BC \sin. C}{AB}$	37° $\frac{\pm \sqrt{(AB^2 - BC^2 \sin.^2 C)}}{AB}$	46° $\frac{BC \sin. C}{\pm \sqrt{(AB^2 - BC^2 \sin.^2 C)}}$
29° $\frac{BC \sin. B}{AC}$	38° $\frac{\pm \sqrt{(AC^2 - BC^2 \sin.^2 B)}}{AC}$	47° $\frac{BC \sin. B}{\pm \sqrt{(AC^2 - BC^2 \sin.^2 B)}}$
30° $\sin. (B + C)$	39° $-\cos. (B + C)$	48° $-\text{tang. } (B + C)$
31° $\sin. B \cos. C + \cos. B \sin. C$	40° $\sin. B \sin. C - \cos. B \cos. C$	49° $\frac{\text{tang. B} + \text{tang. C}}{\text{tang. B tang. C} - 1}$
32° $\frac{BC \sin. C}{\sqrt{(BC^2 + AC^2 - 2BC \times AC \cos. C)}}$	41° $\frac{AC - BC \cos. C}{\sqrt{(BC^2 + AC^2 - 2BC \times AC \cos. C)}}$	50° $\frac{BC \sin. C}{AC - BC \cos. C}$
33° $\frac{BC \sin. B}{\sqrt{(BC^2 + AB^2 - 2BC \times AB \cos. B)}}$	42° $\frac{AB - BC \cos. B}{\sqrt{(BC^2 + AB^2 - 2BC \times AB \cos. B)}}$	51° $\frac{BC \sin. B}{AB - BC \cos. B}$
34° $\sqrt{1 - \left(\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC}\right)^2}$	43° $\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC}$	52° $\pm \sqrt{\left(\frac{2AB \times AC}{AB^2 + AC^2 - BC^2}\right)^2 - 1}$
35° $\frac{\sin. C (AC \cos. C \pm \sqrt{AB^2 - AC^2 \sin.^2 C})}{AB}$	44° $\frac{AC \sin.^2 C \mp \cos. C \sqrt{(AB^2 - AC^2 \sin.^2 C)}}{AB}$	53° $\frac{AC \cos. C \pm \sqrt{(AB^2 - AC^2 \sin.^2 C)}}{AC \sin. C \mp \cot. C \sqrt{(AB^2 - AC^2 \sin.^2 C)}}$
36° $\frac{\sin. B (AB \cos. B \pm \sqrt{AC^2 - AB^2 \sin.^2 B})}{AC}$	45° $\frac{AB \sin.^2 B \mp \cos. B \sqrt{(AC^2 - AB^2 \sin.^2 B)}}{AC}$	54° $\frac{AB \cos. B \pm \sqrt{(AC^2 - AB^2 \sin.^2 B)}}{AB \sin. B \mp \cot. B \sqrt{(AC^2 - AB^2 \sin.^2 B)}}$

Voyez ci-après la suite de la Table III.



Valeurs de $\sin.B$	Valeurs de $\cos.B$	Valeurs de $\text{TANG}.B$
55° FORMULE ... $\frac{AC \sin.A}{BC}$	64° $\pm \frac{\sqrt{(BC^2 - AC^2 \sin.^2 A)}}{BC}$	73° $\frac{AC \sin.A}{\pm \sqrt{(BC^2 - AC^2 \sin.^2 A)}}$
56° $\frac{AC \sin.C}{AB}$	65° $\pm \frac{\sqrt{(AB^2 - AC^2 \sin.^2 C)}}{AB}$	74° $\frac{AC \sin.C}{\pm \sqrt{(AB^2 - AC^2 \sin.^2 C)}}$
57° $\sin.(A + C)$	66° $-\cos.(A + C)$	75° $-\text{tang.}(A + C)$
58° $\sin.A \cos.C + \cos.A \sin.C$	67° $\sin.A \sin.C - \cos.A \cos.C$	76° $\frac{\text{tang.}A + \text{tang.}C}{\text{tang.}A \text{ tang.}C - 1}$
59° $\frac{AC \sin.A}{\sqrt{(AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos.A)}}$	68° $\frac{AB - AC \cos.A}{\sqrt{(AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos.A)}}$	77° $\frac{AC \sin.A}{AB - AC \cos.A}$
60° $\frac{AC \sin.C}{\sqrt{(BC^2 + AC^2 - 2BC \times AC \cos.C)}}$	69° $\frac{BC - AC \cos.C}{\sqrt{(BC^2 + AC^2 - 2BC \times AC \cos.C)}}$	78° $\frac{AC \sin.C}{BC - AC \cos.C}$
61° $\sqrt{1 - \left(\frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2BC \times AB}\right)^2}$	70° $\frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2BC \times AB}$	79° $\pm \sqrt{\left(\frac{2BC \times AB}{BC^2 + AB^2 - AC^2}\right)^2 - 1}$
62° $\frac{\sin.A (AB \cos.A \pm \sqrt{BC^2 - AB^2 \sin.^2 A})}{BC}$	71° $\frac{AB \sin.^2 A \mp \cos.A \sqrt{(BC^2 - AB^2 \sin.^2 A)}}{BC}$	80° $\frac{AB \cos.A \pm \sqrt{(BC^2 - AB^2 \sin.^2 A)}}{AB \sin.A \mp \cot.A \sqrt{(BC^2 - AB^2 \sin.^2 A)}}$
63° $\frac{\sin.C (BC \cos.C \pm \sqrt{AB^2 - BC^2 \sin.^2 C})}{AB}$	72° $\frac{BC \sin.^2 C \mp \cos.C \sqrt{(AB^2 - BC^2 \sin.^2 C)}}{AB}$	81° $\frac{BC \cos.C \pm \sqrt{(AB^2 - BC^2 \sin.^2 C)}}{BC \sin.C \mp \cot.C \sqrt{(AB^2 - BC^2 \sin.^2 C)}}$
Valeurs de $\sin.C$	Valeurs de $\cos.C$	Valeurs de $\text{TANG}.C$
82° $\frac{AB \sin.B}{AC}$	91° $\pm \frac{\sqrt{(AC^2 - AB^2 \sin.^2 B)}}{AC}$	100° $\frac{AB \sin.B}{\pm \sqrt{(AC^2 - AB^2 \sin.^2 B)}}$
83° $\frac{AB \sin.A}{BC}$	92° $\pm \frac{\sqrt{(BC^2 - AB^2 \sin.^2 A)}}{BC}$	101° $\frac{AB \sin.A}{\pm \sqrt{(BC^2 - AB^2 \sin.^2 A)}}$
84° $\sin.(A + B)$	93° $-\cos.(A + B)$	102° $-\text{tang.}(A + B)$
85° $\sin.A \cos.B + \cos.A \sin.B$	94° $\sin.A \sin.B - \cos.A \cos.B$	103° $\frac{\text{tang.}A + \text{tang.}B}{\text{tang.}A \text{ tang.}B - 1}$
86° $\frac{AB \sin.B}{\sqrt{(BC^2 + AB^2 - 2BC \times AB \cos.B)}}$	95° $\frac{BC - AB \cos.B}{\sqrt{(BC^2 + AB^2 - 2BC \times AB \cos.B)}}$	104° $\frac{AB \sin.B}{BC - AB \cos.B}$
87° $\frac{AB \sin.A}{\sqrt{(AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos.A)}}$	96° $\frac{AC - AB \cos.A}{\sqrt{(AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos.A)}}$	105° $\frac{AB \sin.A}{AC - AB \cos.A}$
88° $\sqrt{1 - \left(\frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \times AC}\right)^2}$	97° $\frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \times AC}$	106° $\pm \sqrt{\left(\frac{2BC \times AC}{BC^2 + AC^2 - AB^2}\right)^2 - 1}$
89° $\frac{\sin.B (BC \cos.B \pm \sqrt{AC^2 - BC^2 \sin.^2 B})}{AC}$	98° $\frac{BC \sin.^2 B \mp \cos.B \sqrt{(AC^2 - BC^2 \sin.^2 B)}}{AC}$	107° $\frac{BC \cos.B \pm \sqrt{(AC^2 - BC^2 \sin.^2 B)}}{BC \sin.B \mp \cot.B \sqrt{(AC^2 - BC^2 \sin.^2 B)}}$
90° $\frac{\sin.A (AC \cos.A \pm \sqrt{BC^2 - AC^2 \sin.^2 A})}{BC}$	99° $\frac{AC \sin.^2 A \mp \cos.A \sqrt{(BC^2 - AC^2 \sin.^2 A)}}{BC}$	108° $\frac{AC \cos.A \pm \sqrt{(BC^2 - AC^2 \sin.^2 A)}}{AC \sin.A \mp \cot.A \sqrt{(BC^2 - AC^2 \sin.^2 A)}}$



FORMULES POUR LA RÉOLUTION DES TRIANGLES OBLIQUANGLES, démontrées (224 à 234).

DONNÉES:	CHERCHÉES:	SOLUTIONS:
Trois angles et un côté.	Un des deux côtés inconnus.	1 ^e FORMULE...côté cherché = $\frac{\sin. \text{ang. opposé} \times \text{côté donné}}{\sin. \text{ang. opposé au côté donné}}$
Deux côtés et un angle opposé. <i>C'est avec ces données que les CAS DOUTEUX ont lieu.</i>	{ L'autre angle opposé. { L'angle compris. { Le troisieme côté.	2 ^e $\sin. \text{angle cherché} = \frac{\text{côté opposé} \times \sin. \text{ang. donné}}{\text{cote opposé a l'angle donné}}$ Cherchez par la 2 ^e formule l'angle opposé, et le 3 ^e vous sera aussi connu Cherchez par la 2 ^e l'angle opposé, et ensuite par la 1 ^e le troisieme côté
Deux côtés et l'angle compris.	{ Le troisieme côté. { Un des angles inconnus.	3 ^e $\left\{ \begin{array}{l} \text{tang. } a = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} \text{ ang. donné}}{\text{diff. des côtés donnés}} \sqrt{\text{du rectangle des côtés donnés}} \\ \text{côté cherché} = \frac{\text{diff. des côtés donnés}}{\cos. a}, (200) \end{array} \right.$ 4 ^e $\text{tang. } \frac{1}{2} \text{ diff. des ang. inconnus} = \cot. \frac{1}{2} \text{ ang. donné} \times \frac{\text{diff. des côtés donnés}}{\text{som. des côtés donnés}}$
Les trois côtés.	Un des angles.	Soit S la demi-somme des trois côtés: 5 ^e $\cos. \frac{1}{2} \text{ angle} = \sqrt{\frac{S(S - \text{côté opposé à l'angle cherché})}{\text{rectangle des côtés adjacents à l'ang. cherché}}}$ ou 6 ^e $\sin. \frac{1}{2} \text{ angle} = \sqrt{\frac{(S - \text{un des côtés adjac. à l'ang. cherché})(S - \text{l'autre côté adjac.})}{\text{rectangle des côtés adjacents à l'angle cherché}}}$



Résolution de toutes les Équations DU SECOND ET DU TROISIEME DEGRÉ, par le moyen de la Trigonométrie.

Voyez les démonstrations (348 à 361).

Équations du 2 ^e degré			
$x^2 + px = q.$	$x^2 - px = q.$	$x^2 + px = -q.$	$x^2 - px = -q.$
		Si $p^2 < 4q$, x est imaginaire.	Si $p^2 < 4q$, x est imaginaire.
SOLUTION.	SOLUTION.	SOLUTION.	SOLUTION.
$\text{tang. } A = \frac{2}{p} \sqrt{q}.$	$\text{tang. } A = \frac{2}{p} \sqrt{q}.$	$\sin. A = \frac{2}{p} \sqrt{q}.$	$\sin. A = \frac{2}{p} \sqrt{q}.$
Racine $x = \text{tang. } \frac{1}{2} A \sqrt{q}.$	$x = -\text{tang. } \frac{1}{2} A \sqrt{q}.$	$x = -\text{tang. } \frac{1}{2} A \sqrt{q}.$	$x = \text{tang. } \frac{1}{2} A \sqrt{q}.$
Autre racine $x = -\cot. \frac{1}{2} A \sqrt{q}.$	$x = \cot. \frac{1}{2} A \sqrt{q}.$	$x = -\cot. \frac{1}{2} A \sqrt{q}.$	$x = \cot. \frac{1}{2} A \sqrt{q}.$
Équations du 3 ^e degré			
$x^3 + px + q = 0.$	$x^3 + px - q = 0.$	$x^3 - px + q = 0.$	$x^3 - px - q = 0.$
		On suppose $4p^3 < 27q^2.$	On suppose $4p^3 < 27q^2.$
SOLUTION.	SOLUTION.	SOLUTION.	SOLUTION.
$\text{tang. } B = \frac{p}{3q} \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$	$\text{tang. } B = \frac{p}{3q} \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$	$\sin. B = \frac{p}{3q} \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$	$\sin. B = \frac{p}{3q} \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$
$\text{tang. } A = \sqrt[3]{\text{tang. } \frac{1}{2} B}.$	$\text{tang. } A = \sqrt[3]{\text{tang. } \frac{1}{2} B}.$	$\text{tang. } A = \sqrt[3]{\text{tang. } \frac{1}{2} B}.$	$\text{tang. } A = \sqrt[3]{\text{tang. } \frac{1}{2} B}.$
Seule racine réelle $x = -\cot. 2A \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$	$x = \cot. 2A \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$	$x = -\frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\sin. 2A}.$	$x = \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\sin. 2A}.$
Équations du 3 ^e degré dans le cas irréductible			
Ces solutions s'appliquent aux cas où l'on a $4p^3 >$ ou $= 27q^2.$			
	$x^3 - px + q = 0.$	$x^3 - px - q = 0.$	
	SOLUTION.	SOLUTION.	
	$\sin. 3A = \frac{3q}{p} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}.$	$\sin. 3A = \frac{3q}{p} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}.$	
Racine	$x = \sin. A \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$	$x = -\sin. A \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$	
Autre racine	$x = \sin. (60^\circ - A) \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$	$x = -\sin. (60^\circ - A) \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$	
Troisième racine	$x = -\sin. (60^\circ + A) \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$	$x = \sin. (60^\circ + A) \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$	



Formules pour la Résolution des Triangles sphériques rectangles ;

démontrées (418 à 429).

DONNÉES.	CHERCHÉES.	FORMULES.
L'hypothénuse et un angle.	Le côté * opposé à l'angle * donné.	1° FORMULE... $\sin.x = \sin.\text{hypoth.} \times \sin.\text{ang. donné}$
	Le côté adjacent.	2° $\text{tang}.x = \text{tang}.\text{hypothénuse} \times \cos.\text{angle donné}$
	L'autre angle.	3° $\text{cot}.x = \cos.\text{hypothénuse} \times \text{tang}.\text{angle donné}$
L'hypothénuse et un côté.	L'autre côté.	4° $\cos.x = \frac{\cos.\text{hypothénuse}}{\cos.\text{côté donné}}$
	L'angle adjacent au côté donné.	5° $\cos.x = \text{tang}.\text{côté donné} \times \text{cot}.\text{hypothénuse}$
	L'angle * opposé.	6° $\sin.x = \frac{\sin.\text{côté * donné}}{\sin.\text{hypothénuse}}$
Un côté et l'angle opposé. <i>C'est avec ces données que les CAS DOUTEUX ont lieu.</i>	L'hypothénuse.	7° $\sin.x = \frac{\sin.\text{côté donné}}{\sin.\text{angle donné}}$
	L'autre côté.	8° $\sin.x = \text{tang}.\text{côté donné} \times \text{cot}.\text{angle donné}$
	L'autre angle.	9° $\sin.x = \frac{\cos.\text{angle donné}}{\cos.\text{côté donné}}$
Un côté et l'angle adjacent.	L'hypothénuse.	10° $\text{cot}.x = \cos.\text{angle donné} \times \text{cot}.\text{côté donné}$
	L'autre côté.	11° $\text{tang}.x = \text{tang}.\text{angle donné} \times \sin.\text{côté donné}$
	L'autre angle.	12° $\cos.x = \sin.\text{angle donné} \times \cos.\text{côté donné}$
Les deux côtés.	L'hypothénuse.	13° $\cos.x = \text{rectangle} \cos.\text{côtés donnés}$
	Un angle.	14° $\text{cot}.x = \sin.\text{côté adjacent} \times \text{cot}.\text{côté opposé}$
Les deux angles.	L'hypothénuse.	15° $\cos.x = \text{rectangle} \cot.\text{angles donnés}$
	Un côté.	16° $\cos.x = \frac{\cos.\text{angle opposé}}{\sin.\text{angle adjacent}}$

x désigne la quantité cherchée.

Les arcs marqués d'un astérisque sont de même espèce entre eux (420) : le signe (42) détermine l'espèce de tous les autres, si ce n'est dans les cas douteux.

Si les sinus ou cosinus des arcs cherchés étoient très grands, on auroit recours aux formules (431 à 437) pour avoir les arcs avec précision.



Expressions analytiques des lignes trigonométriques d'un Triangle sphérique ABC.

Voyez (495).

$$1^{\circ} \text{ FORMULE... } \sin.A = \frac{\sin.BC \sin.C}{\sin.AB}$$

$$2^{\circ} \sin.A = \frac{\sin.BC \sin.B}{\sin.AC}$$

$$3^{\circ} \sin.B = \frac{\sin.AC \sin.A}{\sin.BC}$$

$$4^{\circ} \sin.B = \frac{\sin.AC \sin.C}{\sin.AB}$$

$$5^{\circ} \sin.C = \frac{\sin.AB \sin.B}{\sin.AC}$$

$$6^{\circ} \sin.C = \frac{\sin.AB \sin.A}{\sin.BC}$$

$$7^{\circ} \cos.A = \frac{\cos.BC - \cos.AB \cos.AC}{\sin.AB \sin.AC}$$

$$8^{\circ} \cos.A = \cos.BC \sin.B \sin.C - \cos.B \cos.C$$

$$9^{\circ} \cos.B = \frac{\cos.AC - \cos.BC \cos.AB}{\sin.BC \sin.AB}$$

$$10^{\circ} \cos.B = \cos.AC \sin.A \sin.C - \cos.A \cos.C$$

$$11^{\circ} \cos.C = \frac{\cos.AB - \cos.BC \cos.AC}{\sin.BC \sin.AC}$$

$$12^{\circ} \cos.C = \cos.AB \sin.A \sin.B - \cos.A \cos.B$$

$$13^{\circ} \text{ tang. } A = \frac{\sin.B}{\sin.AB \cot.BC - \cos.AB \cos.B}$$

$$14^{\circ} \text{ tang. } A = \frac{\sin.C}{\sin.AC \cot.BC - \cos.AC \cos.C}$$

$$15^{\circ} \text{ tang. } B = \frac{\sin.C}{\sin.BC \cot.AC - \cos.BC \cos.C}$$

$$16^{\circ} \text{ tang. } B = \frac{\sin.A}{\sin.AB \cot.AC - \cos.AB \cos.A}$$

$$17^{\circ} \text{ tang. } C = \frac{\sin.A}{\sin.AC \cot.AB - \cos.AC \cos.A}$$

$$18^{\circ} \text{ tang. } C = \frac{\sin.B}{\sin.BC \cot.AB - \cos.BC \cos.B}$$

$$19^{\circ} \sin.BC = \frac{\sin.AB \sin.A}{\sin.C}$$

$$20^{\circ} \sin.BC = \frac{\sin.AC \sin.A}{\sin.B}$$

$$21^{\circ} \sin.AC = \frac{\sin.BC \sin.B}{\sin.A}$$

$$22^{\circ} \sin.AC = \frac{\sin.AB \sin.B}{\sin.C}$$

$$23^{\circ} \sin.AB = \frac{\sin.AC \sin.C}{\sin.B}$$

$$24^{\circ} \sin.AB = \frac{\sin.BC \sin.C}{\sin.A}$$

$$25^{\circ} \cos.BC = \frac{\cos.A + \cos.B \cos.C}{\sin.B \sin.C}$$

$$26^{\circ} \cos.BC = \cos.A \sin.AB \sin.AC + \cos.AB \cos.AC$$

$$27^{\circ} \cos.AC = \frac{\cos.B + \cos.A \cos.C}{\sin.A \sin.C}$$

$$28^{\circ} \cos.AC = \cos.B \sin.BC \sin.AB + \cos.BC \cos.AB$$

$$29^{\circ} \cos.AB = \frac{\cos.C + \cos.A \cos.B}{\sin.A \sin.B}$$

$$30^{\circ} \cos.AB = \cos.C \sin.BC \sin.AC + \cos.BC \cos.AC$$

$$31^{\circ} \text{ tang. } BC = \frac{\sin.AB}{\sin.B \cot.A + \cos.B \cos.AB}$$

$$32^{\circ} \text{ tang. } BC = \frac{\sin.AC}{\sin.C \cot.A + \cos.C \cos.AC}$$

$$33^{\circ} \text{ tang. } AC = \frac{\sin.BC}{\sin.C \cot.B + \cos.C \cos.BC}$$

$$34^{\circ} \text{ tang. } AC = \frac{\sin.AB}{\sin.A \cot.B + \cos.A \cos.AB}$$

$$35^{\circ} \text{ tang. } AB = \frac{\sin.AC}{\sin.A \cot.C + \cos.A \cos.AC}$$

$$36^{\circ} \text{ tang. } AB = \frac{\sin.BC}{\sin.B \cot.C + \cos.B \cos.BC}$$



Formules trigonométriques pour la résolution des triangles sphériques obliques.

Voyez (496).

DONNÉES.	CHERCHÉES.	SOLUTIONS.
Deux côtés et un angle opposé.	L'angle opposé à l'autre côté donné.	1 ^e SOLUTION... $\sin.$ angle cherché = $\frac{\sin. \text{côté opposé} \sin. \text{angle donné}}{\sin. \text{côté opposé à l'angle donné}}$, (488). L'espece de l'angle cherché est douteuse, quand la regle suivante ne la détermine pas : La demi-somme des côtés donnés et la demi-somme des angles opposés sont toujours de la même espece.
	L'angle compris entre les côtés donnés.	2 ^e $\left\{ \begin{array}{l} \cot. \text{I segment} = \tan. \text{angle donné} \cos. \text{côté adjacent.} \\ \cos. \text{II segment} = \frac{\cos. \text{I segment} \tan. \text{côté adjacent à l'angle donné}}{\tan. \text{côté opposé à l'angle donné}}. \\ \text{I segment} \pm \text{II segment} = \text{angle cherché, (489).} \end{array} \right.$
	Le troisieme côté.	3 ^e $\left\{ \begin{array}{l} \tan. \text{I segment} = \cos. \text{angle donné} \tan. \text{côté adjacent.} \\ \cos. \text{II segment} = \frac{\cos. \text{I segment} \cos. \text{côté opposé à l'angle donné}}{\cos. \text{côté adjacent à l'angle donné}}. \\ \text{I segment} \pm \text{II segment} = \text{côté cherché, (490).} \end{array} \right.$ Dans les 2 ^e et 3 ^e solutions on doit prendre la somme des segments, quand les angles opposés aux côtés donnés sont de même espece; sinon, la différence. Et par conséquent ces deux cas sont douteux, quand le précédent l'est. Mais la regle suivante suffira souvent pour détruire l'incertitude : Si la somme des segments est $> 180^\circ$, prenez leur différence; si II segment est $> \text{I segment}$, prenez leur somme.
Deux angles et un côté opposé.	Le côté opposé à l'autre angle donné.	4 ^e $\sin.$ côté cherché = $\frac{\sin. \text{ang. opposé} \sin. \text{côté donné}}{\sin. \text{ang. opposé au côté donné}}$, (492). L'espece du côté cherché est douteuse, quand la regle suivante ne la détermine pas : La demi-somme des angles donnés et la demi-somme des côtés opposés sont toujours de la même espece.
	Le côté compris entre les angles donnés.	5 ^e $\left\{ \begin{array}{l} \tan. \text{I segment} = \tan. \text{côté donné} \cos. \text{angle adjacent.} \\ \sin. \text{II segment} = \frac{\sin. \text{I segment} \tan. \text{angle adjacent au côté donné}}{\tan. \text{angle opposé au côté donné}}. \\ \text{I segment} \pm \text{II segment} = \text{côté cherché, (493).} \end{array} \right.$
	Le troisieme angle.	6 ^e $\left\{ \begin{array}{l} \cot. \text{I segment} = \cos. \text{côté donné} \tan. \text{angle adjacent.} \\ \sin. \text{II segment} = \frac{\sin. \text{I segm.} \cos. \text{angle opposé au côté donné}}{\cos. \text{angle adjacent au côté donné}}. \\ \text{I segment} \pm \text{II segment} = \text{angle cherché, (494).} \end{array} \right.$ Dans les 5 ^e et 6 ^e solutions, si les angles donnés sont de même espece, prenez la somme des segments; sinon, la différence. Mais le II segment a deux valeurs : la plus grande est à rejeter, si elle donne la somme $> 180^\circ$, ou si elle donne la différence négative. En général les especes des segments sont entr'elles, comme les especes des côtés opposés aux angles donnés sont entr'elles. Et par conséquent ces deux cas sont douteux, quand le précédent l'est.

Voyez ci-après la suite de la Table VIII.



DONNÉES.	CHERCHÉS.	SOLUTIONS.
Deux côtés et l'angle compris.	Un des angles inconnus. } 7°	On nommera <i>côté donné</i> le côté opposé à l'angle cherché; l'autre côté connu, <i>base</i>. $\text{tang. I segment} = \cos. \text{angle donné} \text{ tang. côté donné.}$ II segment = base — I segment. $\text{tang. angle cherché} = \text{tang. angle donné} \times \frac{\sin. \text{I segm.}}{\sin. \text{II segm.}}, (472).$ Si I segment est > base, <i>sin. II segment</i> sera négatif.
	Le troisieme côté. } 8°	On nommera <i>base</i> l'un, à volonté, des côtés donnés; l'autre, <i>côté donné</i>. $\text{tang. I segment} = \cos. \text{angle donné} \text{ tang. côté donné.}$ II segment = base $\cap$ I segment. $\cos. \text{côté cherché} = \cos. \text{côté donné} \times \frac{\cos. \text{II segm.}}{\cos. \text{I segm.}}, (477).$ Si le côté cherché est petit, pour l'avoir avec exactitude on aura recours à la solution (478).
Deux angles et le côté compris.	Un des côtés inconnus. } 9°	On nommera <i>angle donné</i> l'angle opposé au côté cherché; l'autre angle connu, <i>angle vertical</i>. $\cot. \text{I segment} = \text{tang. angle donné} \cos. \text{côté donné.}$ II segment = angle vertical $\cap$ I segment. $\text{tang. côté cherché} = \text{tang. côté donné} \times \frac{\cos. \text{I segm.}}{\cos. \text{II segm.}}, (482).$
	Le troisieme angle. } 10°	On nommera <i>angle vertical</i> l'un, à volonté, des angles connus; l'autre, <i>angle donné</i>. $\cot. \text{I segment} = \text{tang. angle donné} \cos. \text{côté donné.}$ II segment = angle vertical — I segment. $\cos. \text{angle cherché} = \cos. \text{angle donné} \times \frac{\sin. \text{II segm.}}{\sin. \text{I segm.}}, (486).$ Lorsque I segment est > angle vertical, <i>sin. II segment</i> est négatif. Si l'angle cherché est petit, on aura recours à la solution (487).
Les trois côtés.	Un angle. } 11°	Je nomme <i>a, b, c</i> les trois côtés; <i>s</i>, leur demi-somme: <i>a</i> est le côté opposé à l'angle cherché. $\sin. \frac{1}{2} \text{ angle cherché} = \sqrt{\frac{\sin. (s-b) \sin. (s-c)}{\sin. b \times \sin. c}}, (463);$ OU $\cos. \frac{1}{2} \text{ angle cherché} = \sqrt{\frac{\sin. s \times \sin. (s-a)}{\sin. b \times \sin. c}}, (464).$
Les trois angles.	Un côté. } 12°	A, B, C sont les trois angles; S, leur demi-somme: A est l'angle opposé au côté cherché. $\sin. \frac{1}{2} \text{ côté cherché} = \sqrt{-\frac{\cos. S \cos. (S \cap A)}{\sin. B \sin. C}}, (467);$ OU $\cos. \frac{1}{2} \text{ côté cherché} = \sqrt{\frac{\cos. (S \cap B) \cos. (S \cap C)}{\sin. B \sin. C}}, (468).$



Résolution des Triangles sphériques obliquangles, par les analogies de Neper.

Voyez (497).

DONNÉES.

CHERCHÉES.

SOLUTIONS.

Deux côtés et
l'angle compris.Avec ces données seu-
lement, on ne peut avoir
immédiatement le troisi-
ème côté par les analogies
de Neper.Un des angles
inconnus.1^e SOLUTION

$$\left\{ \begin{aligned} \text{tang. } \frac{1}{2}a &= \text{cot. } \frac{1}{2}\text{angle donné} \times \frac{\sin. \text{différ. côtés donnés}}{\sin. \text{somme côtés donnés}} \\ \text{grand segment} &= \frac{1}{2}\text{angle donné} + \frac{1}{2}a. \\ \text{petit segment} &= \frac{1}{2}\text{angle donné} - \frac{1}{2}a. \\ \text{cot. angle cherché} &= \cos. \text{côté adj. tang. segm. adj. (473).} \end{aligned} \right.$$

Dans cette dernière équation on emploiera le grand segment avec le plus grand des côtés connus, le petit segment avec le plus petit: et si le petit segment se trouve être négatif et $< 90^\circ$ on fera négative la tang. de ce segment.

Les deux angles
inconnus.2^e

$$\left\{ \begin{aligned} \text{tang. } \frac{1}{2}\text{diff. angles cherchés} &= \frac{\text{cot. } \frac{1}{2}\text{angle donné} \sin. \frac{1}{2}\text{différence côtés donnés}}{\sin. \frac{1}{2}\text{somme côtés donnés}} \\ \text{tang. } \frac{1}{2}\text{som. angles cherchés} &= \frac{\text{cot. } \frac{1}{2}\text{angle donné} \cos. \frac{1}{2}\text{diff. côtés don.}}{\cos. \frac{1}{2}\text{somme côtés donnés}} \end{aligned} \right. (474).$$

Deux angles et
le côté compris.Avec ces données seu-
lement, on ne peut avoir
immédiatement le troisi-
ème angle par les analogies
de Neper.Un des côtés
inconnus.3^e

$$\left\{ \begin{aligned} \text{tang. } \frac{1}{2}a &= \text{tang. } \frac{1}{2}\text{côté donné} \times \frac{\sin. \text{différ. angles donnés}}{\sin. \text{somme angles donnés}} \\ \text{grand segment} &= \frac{1}{2}\text{côté donné} + \frac{1}{2}a. \\ \text{petit segment} &= \frac{1}{2}\text{côté donné} - \frac{1}{2}a. \\ \text{cot. côté cherché} &= \cos. \text{angle adjacent cot. segm. adjacent, (483).} \end{aligned} \right.$$

Dans cette dernière équation on emploiera le plus petit des deux angles connus avec le grand segment, le plus grand avec le petit segment: et si le petit segment se trouve être négatif et $< 90^\circ$, on fera négative la cot. de ce segment.

Les deux côtés
inconnus.4^e

$$\left\{ \begin{aligned} \text{tang. } \frac{1}{2}\text{diff. côtés inconnus} &= \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}\text{côté donné} \sin. \frac{1}{2}\text{différence angles donnés}}{\sin. \frac{1}{2}\text{somme angles donnés}} \\ \text{tang. } \frac{1}{2}\text{somme côtés inconnus} &= \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}\text{côté donné} \cos. \frac{1}{2}\text{diff. angles don.}}{\cos. \frac{1}{2}\text{somme angles donnés}} \end{aligned} \right. (484)$$

Voyez ci-après la suite de la Table IX.



DONNÉES.	CHERCHÉES.	SOLUTIONS.
Deux côtés et les deux angles opposés.	Le troisieme côté. 5°	$\left. \begin{aligned} \text{tang.} \frac{1}{2} \text{ côté cherché} &= \text{tang.} \frac{1}{2} \text{ diff. côtés don.} \times \frac{\sin. \frac{1}{2} \text{ somme angles donnés}}{\sin. \frac{1}{2} \text{ différ. angles donnés}} \\ \text{ou} \\ \text{tang.} \frac{1}{2} \text{ côté cherché} &= \text{tang.} \frac{1}{2} \text{ som. côtés don.} \times \frac{\cos. \frac{1}{2} \text{ som. ang. don.}}{\cos. \frac{1}{2} \text{ diff. ang. don.}}, (484). \end{aligned} \right\}$
	Le troisieme angle. 6°	$\left. \begin{aligned} \text{tang.} \frac{1}{2} \text{ angle cherché} &= \text{cot.} \frac{1}{2} \text{ diff. angles donnés} \times \frac{\sin. \frac{1}{2} \text{ diff. côtés donnés}}{\sin. \frac{1}{2} \text{ som. côtés donnés}} \\ \text{ou} \\ \text{tang.} \frac{1}{2} \text{ ang. cherché} &= \text{cot.} \frac{1}{2} \text{ som. ang. don.} \times \frac{\cos. \frac{1}{2} \text{ diff. côtés donnés}}{\cos. \frac{1}{2} \text{ som. côtés don.}}, (474). \end{aligned} \right\}$
Les trois côtés.	Un angle. 7°	On nommera <i>base</i> l'un, à volonté, des côtés adjacents à l'angle cherché, <i>côtés</i> les deux autres. $\left. \begin{aligned} \text{tang.} \frac{1}{2} a &= \text{tang.} \frac{1}{2} \text{ somme côtés } \text{tang.} \frac{1}{2} \text{ différence côtés } \text{cot.} \frac{1}{2} \text{ base.} \\ \text{grand segment} &= \frac{1}{2} \text{ base} + \frac{1}{2} a. \\ \text{petit segment} &= \frac{1}{2} \text{ base} - \frac{1}{2} a. \end{aligned} \right\}$
		$\cos. \text{ angle cherché} = \text{tang. segment adjacent } \text{cot. côté adjac.}, (465).$ Dans cette dernière équation on emploiera le grand segment avec le plus grand côté, le petit avec le plus petit côté : et si le petit segment se trouve être négatif et $< 90^\circ$, on fera négative la <i>tang.</i> de ce segment.
Les trois angles.	Un côté. 8°	On nommera <i>angle vertical</i> l'un, à volonté, des angles adjacents au côté cherché ; <i>angles</i> simplement, les deux autres. $\left. \begin{aligned} \text{tang.} \frac{1}{2} a &= \text{tang.} \frac{1}{2} \text{ som. angles } \text{tang.} \frac{1}{2} \text{ diff. angles } \text{tang.} \frac{1}{2} \text{ ang. vertical.} \\ \text{grand segment} &= \frac{1}{2} \text{ angle vertical} + \frac{1}{2} a. \\ \text{petit segment} &= \frac{1}{2} \text{ angle vertical} - \frac{1}{2} a. \end{aligned} \right\}$
		$\cos. \text{ côté cherché} = \text{cot. segment adjacent } \text{cot. angle adjacent}, (469)$ Dans cette dernière équation on emploiera le grand segment avec le plus petit angle, le petit segment avec le plus grand angle : et si le petit segment se trouve être négatif et $< 90^\circ$, on fera négative la <i>cot.</i> de ce segment.













213

CAGNOLI
TRIGONOMET



20

+



+